Расстояние между сопряженными алгебраическими числами в кластерах

Н. В. Бударина, Ф. Гетце

Для натуральных чисел $n \geqslant 2$ и $Q > 1$ введем класс целочисленных многочленов $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$:

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P = n,\ H(P) \leqslant Q\},$$

где $H = H(P) = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$ – высота P. Всюду далее, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, – корни P, а $c_1 = c_1(n)$, $c_2 = c_2(n)$, … – величины, зависящие от n и не зависящие от H и Q. Далее $a \ll b$ означает, что существует константа $c > 0$ такая, что $a \leqslant cb$; выражение $a \asymp b$ эквивалентно $a \ll b \ll a$. Существует много характеристик P, связанных с его корнями. Например, производная P' в корне α_1:

$$P'(\alpha_1) = a_n(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\dots(\alpha_1 - \alpha_n),$$

дискриминант $D(P)$:

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Оценки $|P'(\alpha_1)|$ и $|D(P)|$ как сверху, так и снизу имеют важное значение в теории трансцендентных чисел и теории диофантовых приближений [1]. На этих оценках основано доказательство проблемы Малера [2], аналога метрической теоремы А. Я. Хинчина для многочленов произвольной степени, получение точного значения размерности Хаусдорфа множеств действительных и комплексных чисел с заданной мерой трансцендентности [1].

В последние годы началось систематическое изучение величин $|\alpha_i - \alpha_j|$ для различных сопряженных алгебраических чисел α_i и α_j, и более общей задачи о кластерах $M_k = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} |\alpha_i - \alpha_j|$ различных корней $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ целочисленного многочлена P степени n, где $2 \leqslant k \leqslant n$. Оценка снизу для $|\alpha_i - \alpha_j|$ была получена Малером [3]:

$$|\alpha_i - \alpha_j| > \sqrt{3}\,(n+1)^{-(2n+1)/2} H(P)^{-n+1},$$

которая является частным случаем оценки снизу

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} |\alpha_i - \alpha_j| \gg H(P)^{-n+1}, \tag{1}$$

справедливой для любого целочисленного многочлена P степени n и имеющего, по крайней мере, $k \geqslant 2$ различных корней $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Пусть $n, k \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условию $2 \leqslant k \leqslant n$. Обозначим через $E(n,k)$, соответственно $E_{\mathrm{irr}}(n,k)$, инфимум действительных чисел δ, для которых неравенство

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} |\alpha_i - \alpha_j| \geqslant H(P)^{-\delta}$$

выполняется для каждого целочисленного многочлена P, соответственно целочисленного неприводимого многочлена P, степени n и достаточно большой высоты с различными корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Из (1) следует, что $E_{\mathrm{irr}}(n,k) \leqslant E(n,k) \leqslant n-1$ для любых n и k, удовлетворяющих $2 \leqslant k \leqslant n$.

Работа выполнена при поддержке гранта CRC 701 университета Билефельда.
DOI: 10.4213/mzm10334

Существование близких сопряженных чисел доказано в работах [4]–[8]. К настоящему времени известны только следующие точные оценки

$$E_{\mathrm{irr}}(2,2)=E(2,2)=1, \qquad E_{\mathrm{irr}}(3,2)=E(3,2)=2$$

(см. [6]). Наилучшие к настоящему времени оценки снизу

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{irr}}(n,2) &\geqslant \frac{n}{2}+\frac{n-2}{4(n-1)} \qquad &\text{для}\quad n\geqslant 4,\\ E(n,2) &\geqslant \frac{2n-1}{3} \qquad &\text{для}\quad n\geqslant 4, \end{aligned}$$

доказаны в [7] и [8] соответственно.

Относительно нижних оценок для $E(n,k)$ и $E_{\mathrm{irr}}(n,k)$, $k>2$, в [6] доказано следующее:

$$\begin{aligned} &E_{\mathrm{irr}}(n,n-1)=n-1 &&\text{для}\quad n\geqslant 4,\\ &E(n,k)\geqslant \frac{k-1}{k}\,n, \quad E_{\mathrm{irr}}(n,k)\geqslant \frac{k-1}{k}\,n &&\text{для}\quad k\geqslant 3, \quad n=tk, \quad t\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

В работе [8] показано, что для любого целого $k\geqslant 3$ существует рациональное число $c_1(k)$ такое, что при любом $n\geqslant k$ справедливо неравенство

$$E(n,k)\geqslant \frac{k}{k+1}\,n-c_1(k). \tag{2}$$

В данной работе мы получаем в большей части диапазона изменения k лучшие, чем в (2), оценки для $E_{\mathrm{irr}}(n,k)$. Более того, мы даем оценки снизу для количества многочленов $P\in\mathcal{P}_n(Q)$, для которых такие оценки выполняются.

Теорема 1. *Пусть $2\leqslant k\leqslant n$ и $0\leqslant\gamma\leqslant 2(n+1)/(k(k+1))$. Тогда существует N_1, где $N_1>c_2Q^{n+1-((k-1)(k+2)/2)\gamma}$, многочленов $P\in\mathcal{P}_n(Q)$ таких, что*

$$E_{\mathrm{irr}}(n,k)\geqslant \frac{k(k-1)}{2}\,\gamma.$$

Следствие 1. *При $\gamma=2(n+1)/(k(k+1))$ получаем $E_{\mathrm{irr}}(n,k)\geqslant((k-1)/(k+1))(n+1)$, что при $k>c_3n$, где $c_3<1$, улучшает оценку (2).*

Если $k=n$, то $E_{\mathrm{irr}}(n,n)\geqslant n-1$ и $N_1>c_4Q^{2/n}$, т.е. в этом случае оценки сверху и снизу для кластера M_n совпадают.

Замечание 1. Интересным является тот факт, что оценки для кластера

$$M_k'=|\alpha_1-\alpha_2||\alpha_1-\alpha_3|\cdots|\alpha_1-\alpha_k|, \qquad 2\leqslant k\leqslant n,$$

который является нормированным значением модуля производной в корне (или его частью), получаются, а может и являются, такими же как и для одного сомножителя $|\alpha_1-\alpha_i|$. Из теоремы 1 можно получить, что существует не менее $c_5Q^{(n+1)/3}$ многочленов $P\in\mathcal{P}_n(Q)$, для различных сопряженных корней которых выполняются неравенства

$$|\alpha_1-\alpha_2|\ll Q^{-(n+1)/3}, \qquad M_k'\ll Q^{-(n+1)/3}, \quad k>2.$$

Доказательство теоремы 1. Обозначим через B_1 множество точек x из интервала $I\subset[-1/2,1/2]$, для которых при

$$v_0\geqslant v_1\geqslant\cdots\geqslant v_m\geqslant -1, \quad 0\leqslant j\leqslant m, \qquad \sum_{i=0}^{m} v_i=n-m \tag{3}$$

система неравенств

$$\begin{aligned} &\delta_0 Q^{-v_j} < |P^{(j)}(x)| < c_0 Q^{-v_j}, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m, \qquad P^{(0)}(x) = P(x), \\ &\delta_0 Q < |P^{(j)}(x)| < c_0 Q, \qquad m+1 \leqslant j \leqslant n \end{aligned} \tag{4}$$

имеет решение в неприводимых многочленах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. Согласно определению $E_{\mathrm{irr}}(n, m+1)$ имеем $2 \leqslant m+1 \leqslant n$.

Для приложений системы неравенств (4) потребуем, чтобы при $1 \leqslant j \leqslant m$ последовательность

$$d_j = v_{j-1} - v_j, \qquad d_{m+1} = v_m + 1 \tag{5}$$

не возрастала. Упорядочим корни многочлена P относительно точки x так, чтобы

$$|x-\alpha_1| \leqslant |x-\alpha_2| \leqslant \dots \leqslant |x-\alpha_n|.$$

В работе [4] доказана следующая лемма, которая имеет много приложений при оценках дискриминантов и результантов.

Лемма 1. *Пусть даны целые числа $n \geqslant 2$ и $m \in [0, n-1]$. Тогда существуют положительные постоянные $\delta_0 = \delta_0(n)$ и $c_0 = c_0(n)$ такие, что $\mu B_1 > (3/4)\mu I$.*

Лемма 2. *Пусть $x \in B_1$. Тогда при выполнении условия (5) корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1}$ многочлена P удовлетворяют неравенствам*

$$|x-\alpha_j| \ll Q^{-v_{j-1}+v_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \qquad |x-\alpha_{m+1}| \ll Q^{-v_m-1}.$$

Лемма 2 доказана в [9].

Возьмем $\gamma = 1 + v_m$, $\gamma = v_{j-1} - v_j$, $2 \leqslant j \leqslant m$ и $v_0 - v_1 \geqslant \gamma$. Тогда

$$v_m = -1+\gamma, \quad v_{m-1} = v_m + \gamma = -1+2\gamma, \quad \dots, \quad v_1 = v_2 + \gamma = -1 + m\gamma.$$

Из равенства $\sum_{i=0}^{m} v_i = n - m$ получаем $v_0 = n - (m(m+1)/2)\gamma$. Вычислим $v_0 - v_1 = n+1-(m(m+3)/2)\gamma$. Поскольку $v_0 - v_1 \geqslant \gamma$, то $0 \leqslant \gamma \leqslant 2(n+1)/((m+1)(m+2))$, откуда следует, что

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m+1} |\alpha_i - \alpha_j| &\leqslant \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m+1} (|x-\alpha_i| + |x-\alpha_j|) \\ &\ll \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m+1} |x-\alpha_j| \asymp Q^{-(m(m+1)/2)\gamma}. \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, в точке $x \in B_1$ мы построили многочлен P такой, что для кластера M_{m+1} справедливо неравенство (6) и $|x-\alpha_1| < c_6 Q^{-v_0+v_1}$. Этот же многочлен P может быть решением (4)–(6) и для других точек $x \in B_1$, в окрестности которых есть другие корни многочлена P. Мера объединения таких интервалов, взятая по n корням многочлена P не превосходит $2nc_6 Q^{-v_0+v_1}$. Возьмем другую точку $x' \in B_1$ вне этого объединения и построим новый многочлен с кластером корней M_{m+1}, удовлетворяющим (6) и т.д. Поскольку по лемме 1 множество B_1 имеет меру, большую $(3/4)\mu I$, то в результате построим не менее

$$\frac{3}{4} 2^{-1} n^{-1} c_6^{-1} Q^{v_0 - v_1} \mu I \gg Q^{v_0-v_1} \asymp Q^{n+1-(m(m+3)/2)\gamma}$$

многочленов, кластеры M_{m+1} которых удовлетворяют (6), причем никакие многочлены в этом наборе не будут совпадать. Положим $k = m+1$. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Baker, W. M. Schmidt, *Proc. London Math. Soc.* (3), **21** (1970), 1–11. **[2]** В. Г. Спринджук, *Проблема Малера в метрической теории чисел*, Наука и техника, Минск, 1967. **[3]** K. Mahler, *Michigan Math. J.*, **11**:3 (1964), 257–262. **[4]** V. V. Beresnevich, V. I. Bernik, F. Götze, *Compositio Math.*, **146**:5 (2010), 1165–1179. **[5]** Y. Bugeaud, M. Mignotte, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **47**:2 (2004), 553–556. **[6]** Y. Bugeaud, M. Mignotte, *Int. J. Number Theory*, **6**:3 (2010), 587–602. **[7]** Y. Bugeaud, A. Dujella, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **43**:6 (2011), 1239–1244. **[8]** Y. Bugeaud, A. Dujella, *Root Separation for Reducible Integer Polynomials*, arXiv: math.NT/1306.2128v1. **[9]** В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гетце, *Докл. НАН Беларуси*, **54**:5 (2010), 21–23.

Н. В. Бударина
Хабаровское отделение Института
прикладной математики ДВО РАН
E-mail: buda77@mail.ru

Поступило
03.07.2013

Ф. Гетце
Bielefeld University, Германия
E-mail: goetze@math.uni-bielefeld.de