С. И. Мазурик, В. П. Шапеев, Применение символьных преобразований на ЭВМ для исследования аппроксимации и устойчивости разностных схем,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986, том 26, номер 4, 586–600

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26, 1986 **№ 4**

УДК 519.68:519.63

ПРИМЕНЕНИЕ СИМВОЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА ЭВМ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ АППРОКСИМАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

МАЗУРИК С. И., ШАПЕЕВ В. П.

(Новосибирск)

Предлагаются некоторые способы организации аналитического исследования на ЭВМ в символьном виде аппроксимации и устойчивости разностных схем для систем дифференциальных уравнений с частными производными со многими независимыми переменными. Описывается комплекс программ, реализующий эти алгоритмы на ЭВМ. Приводятся некоторые наглядные примеры работы программ комплекса.

В настоящее время одним из широко используемых и универсальных методов численного решения дифференциальных уравнений с частными производными является метод конечных разностей [1]–[5]. Многие вопросы теории разностных схем часто приводят к задачам, алгоритмы решения которых используют громоздкие выкладки в символьном виде, что указывает на целесообразность применения символьных преобразований на ЭВМ в этой области вычислительной математики [6]–[8]. Актуальность применения ЭВМ для автоматизации аналитических выкладок показали полученные на вычислительных машинах результаты, имеющие важные приложения в физике и математике [6], [7].

Основным вопросом теории разностных схем является построение разностных уравнений, аппроксимирующих заданные дифференциальные уравнения. Среди разнообразных требований, предъявляемых к искомым разностным схемам, в первую очередь выделяют требования аппроксимации и устойчивости, которые в некоторых случаях достаточны для сходимости разностного решения к решению дифференциальной задачи [1]–[5]. Трудоемкость аналитических выкладок при исследовании аппроксимации и устойчивости систем разностных уравнений, встречающихся в приложениях, указывает на необходимость применения ЭВМ и для этой цели. Актуальность и целесообразность такого применения ЭВМ обусловливается и тем обстоятельством, что появляется все больше работ по построению разностных схем с помощью ЭВМ [9]–[12], для которых затем необходима утомительная проверка указанных выше свойств. Отметим еще существование работ (см., например, [9], [13]), посвященных построению многопараметрических семейств разностных схем. Причем требования повышенной аппроксимации и устойчивости накладывают строгие ограничения на выбор свободных параметров в семействах таких схем.

Данная статья посвящена использованию ЭВМ при исследовании аппроксимации и устойчивости разностных схем для систем дифференциальных уравнений со многими независимыми переменными. В настоящее время существует всего лишь несколько работ на эту тему (см., например, [9], [12], [14]. В отличие от [9], ниже рассматривается реализация на ЭВМ процесса исследования аппроксимации разностных схем как для одного, так и для системы дифференциальных уравнений, которые могут быть неоднородными, с переменными коэффициентами и квазилинейными. Что касается анализа устойчивости разностных схем, то в настоящей работе рассмотрено применение ЭВМ для метода Фурье, в соответствии с которым предложен и реализован на ЭВМ алгоритм. В отличие от реализаций в [12], [14], данная расширена дополнительными приемами анализа и является более завершенной.

Рассматриваемые здесь реализации алгоритмов исследования аппроксимации и устойчивости разностных схем осуществлены в виде комплекса программ, выполненного в рамках мониторной системы «ДУБНА» на БЭСМ-6 на языке РЕФАЛ, специально предназначенном для символьных преобразований [15].

§ 1. Исследование аппроксимации

В основе алгоритма нахождения погрешности аппроксимации разностных схем лежат следующие понятия [1]–[5], [16].

Пусть ω_h – сетка в некоторой области X евклидова пространства $\{x=(x_1,\dots,x_N)\}$; ω_τ – сетка отрезка $0\leqslant t\leqslant t_0$, где t – временна́я переменная; h и τ – шаги сетки, $\omega_{h\tau}=\omega_h\times\omega_\tau=\{(x,t),\ x\in\omega_h,\ t\in\omega_\tau\}$; L – дифференциальный оператор, $L_{h\tau}$ – разностный оператор, заданный на сетке $\omega_{h\tau}$; U – пространство гладких функций $u(x,t)$, $U_{h\tau}$ – пространство сеточных функций $u_{h\tau}(x,t)$, заданных на $\omega_{h\tau}$; $\|\cdot\|_{h\tau}$ – норма в $U_{h\tau}$.

Погрешностью аппроксимации называется величина

$$\Psi_{h\tau}(x,t)=L_{h\tau}u_{h\tau}(x,t)-(Lu)_{h\tau}(x,t),\qquad (x,t)\in\omega_{h\tau}.$$

Разностный оператор $L_{h\tau}$ аппроксимирует дифференциальный оператор L с порядком n по x и порядком m по t $(n, m>0)$ в точке $x(t)$ сетки $\omega_{h\tau}$, если

$$\|\Psi_{h\tau}\|_{h\tau}=O(|h|^n,\tau^m).$$

Дадим краткое описание комплекса программ, реализующего процесс вычисления погрешности аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой.

Рассматривается система квазилинейных дифференциальных уравнений с неизвестными функциями u_j, $j=1, 2,\dots, M$, от независимых переменных x_i, t, $i=1, 2,\dots, N$. Программы комплекса работают в классе полиномов и дробно-рациональных функций. Поэтому коэффициенты уравнения, с которыми может работать комплекс, должны быть полиномами и дробно-рациональными функциями относительно u_j, x_i, t, $j=1, 2,\dots, M$, $i=1, 2,\dots, N$, и младших производных u_j по независимым переменным. Если в выражения коэффициентов заданной системы уравнений входят другие функции от u_j, x_i, t, $j=1, 2,\dots, M$, $i=1, 2,\dots, N$, то для них вводятся промежуточные обозначения $F_q(u_1,\dots,u_M, x_1,\dots,x_N, t)$, $q=1, 2,\dots$ $\dots, P$, вид которых подставляется только в окончательный результат. Этот прием позволяет расширить класс рассматриваемых систем уравнений и разностных схем.

В исходной системе дифференциальных уравнений (линейных относительно старших производных с коэффициентами, являющимися полиномами и дробно-рациональными функциями от x_i, t, $i=1, 2,\dots, N$, F_q, $q=1, 2,\dots, P$, и их производных и от u_j, $j=1, 2,\dots, M$, и их младших производных) производные неизвестных функций $u_1, \dots, u_M$ по независимым переменным $x_1, \dots, x_N$, t обозначаются следующим образом:

$$DU(j, i_1, \dots, i_{N+1}) = \frac{\partial^s u_j(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_N^{i_N} \partial t^{i_{N+1}}}, \qquad j=1, 2, \dots, M,$$

где $s = \sum_{l=1}^{N+1} i_l$, а производные функций, зависящих от $u_1, \dots, u_M, x_1, \dots, x_N, t$, обозначаются

$$DF(j_1, \dots, j_M, i_1, \dots, i_{N+1}) = \frac{\partial^s F(u_1, \dots, u_M, x_1, \dots, x_N, t)}{\partial u_1^{j_1} \dots \partial u_M^{j_M} \partial x_1^{i_1} \dots \partial x_N^{i_N} \partial t^{i_{N+1}}}$$

где

$$s = \sum_{r=1}^{M} j_r + \sum_{l=1}^{N+1} i_l.$$

Для удобства реализации алгоритма вычисления погрешности аппроксимации каждое дифференциальное уравнение исходной системы вводится в виде, разрешенном относительно любой старшей производной, соответствующей неизвестной функции u_j, $j=1, 2, \dots, M$. Для этого необходимо из всех уравнений системы выделить самую старшую производную какой-нибудь функции u_{j_1}, $j_1=1, 2, \dots, M$, и разрешить относительно нее одно из уравнений, где она встречается. Затем из оставшихся неразрешенных уравнений опять нужно выделить любую самую старшую производную функции u_{j_2}, $j_2 \neq j_1$, и относительно нее разрешить одно из уравнений системы, и так далее, каждый раз разрешая соответствующее уравнение системы относительно старшей производной функции u_{j_k}, $j_k \neq j_1, \dots$ $\dots, j_{k-1}$, $k=2, 3, \dots, M$. После окончания этого процесса каждое дифференциальное уравнение исходной системы будет записано в виде либо

$$DU(j, i_1, \dots, i_{N+1}) = (V_1)/(V_2),$$

либо

$$DU(j, i_1, \dots, i_{N+1}) = (V_1),$$

где V_1, V_2 — полиномы от $x_1, \dots, x_N$, t; F_q и их производных и от $u_1, \dots, u_M$ и их младших производных.

В настоящей работе разностная схема представляет собой систему разностных уравнений, каждое из которых записано в виде

$$(1.1) \qquad \sum_{\substack{0 \leq \beta_1 + \dots + \beta_M \leq \chi \\ 0 \leq \gamma_1 + \dots + \gamma_P \leq \theta}} C_{\beta\gamma} * F^{\gamma}(u, x, t)(I_\gamma) * U^{\beta}(I_\beta) * H_{\beta\gamma}(H),$$

где γ_q, $\beta_j \geq 0$, $q=1, 2, \dots, P$, $j=1, 2, \dots, M$; $C_{\beta\gamma}$ — произведение констант (среди которых может быть и число); $I_\gamma = (I_{\gamma_1}, \dots, I_{\gamma_P})$, $I_\beta = (I_{\beta_1}, \dots, I_{\beta_M})$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_P) \in \mathbf{N}^P$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_M) \in \mathbf{N}^M$, $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел; заданный вектор $I_\alpha = (I_\alpha^1, \dots, I_\alpha^{N+1})$ отождествляется с точкой $(x_1 + I_\alpha^1 \Delta x_1, \dots, x_N + I_\alpha^N \Delta x_N, t + I_\alpha^{N+1} \Delta t)$, где индекс α принимает целые значения $\beta_1, \dots, \beta_M, \gamma_1, \dots, \gamma_P$ (если $I_\alpha^l = 0$ для всех $l=1, 2, \dots, N+1$, то $I_\alpha = 0$); $F^\gamma(u, x, t)(I_\gamma) = F_1^{\gamma_1}(u, x, t)(I_{\gamma_1}) * \dots * F_q^{\gamma_q}(u, x, t)(I_{\gamma_P})$, где через $F_1(u, x, t), \dots, F_P(u, x, t)$ обозначены некоторые функции, зависящие от $u = (u_1, \dots, u_M)$, $x = (x_1, \dots, x_N)$ и t; $F_q^{\gamma_q}(u, x, t)(I_{\gamma_q})$ — значение функции $F_q(u, x, t)$ в степени γ_q, взятое в точке I_{γ_q} (при этом подразумевается, что функции $u_1, \dots, u_M$ берутся в той же самой точке I_γ); $U^\beta(I_\beta) = U_1^{\beta_1}(I_{\beta_1}) * \cdots$

$\ldots * U_M^{\beta_M}(I_{\beta_M})$ — произведение разностных функций U_j в степени β_j, $j=1, 2, \ldots, M$, взятых, соответственно, в точках $I_{\beta_1}, \ldots, I_{\beta_M}$; $H_{\beta\gamma}(H)=H_{\beta\gamma}(H_1, \ldots, H_{N+1})$, где $H_1, \ldots, H_{N+1}$ — набор заданных чисел, соответствующий вектору $((\Delta x_1)^{H_1}, \ldots, (\Delta x_N)^{H_N}, (\Delta t)^{H_{N+1}})$.

Входными данными комплекса в этом случае являются система дифференциальных уравнений, разностная схема и K — порядок разложения всех функций в ряд Тейлора.

Замечания. 1. В связи с выбранным способом реализации алгоритма нахождения погрешности аппроксимации разностных схем необходимо степени функций в (1.1) при записи схем для ввода в ЭВМ развернуть в соответствующее произведение первых степеней одинаковых функций.

2. Число K задается из соображений экономии времени работы и объема памяти вычислительной машины. В случае когда значения K недостаточно для вычисления порядка аппроксимации разностной схемы, комплекс либо выводит диагностику, что соответствующее дифференциальное уравнение системы выделить нельзя (поскольку разложение функций в ряд Тейлора не проведено до необходимого порядка), либо выводятся не все члены погрешности аппроксимации, по которым можно полностью судить о порядке аппроксимации, либо выводится пусто (что происходит в результате сокращения всех членов погрешности аппроксимации). В этих случаях необходимо увеличить значение K в разумных пределах, поскольку задание значения K, большего необходимого, влечет за собой увеличение времени счета и рост объема требуемой памяти, а также вывод ненужных членов высокого порядка.

Комплекс работает в следующем порядке.

1. Ввод исходных данных.

2. Составление таблицы всех дифференциальных следствий до порядка $K+1$ включительно, полученных последовательным дифференцированием исходных уравнений по всем независимым переменным $x_1, \ldots, x_N$, t.

Перечисленные ниже пп. 3—9 работают в цикле, в котором последовательно рассматривается каждое разностное уравнение отдельно от других.

3. Разложение в точке $(x_1, \ldots, x_N, t)$ всех разностных функций и функций, зависящих от них и от независимых перменных, в ряд Тейлора до порядка K включительно. Результат разложения всех функций в разностном уравнении обозначим через W_1.

4. Приведение в выражении W_1 подобных по степеням шагов сетки членов.

5. Замена в преобразованном выражении W_1 всех производных неизвестных функций $u_1, \ldots, u_M$, которые находятся в левых частях полученных в п. 2 дифференциальных следствий исходных дифференциальных уравнений, на соответствующие выражения, стоящие в правых частях. Выражение, полученное после замены, обозначим через W_2.

6. Выделение в выражении W_2 исходного дифференциального уравнения. Оставшуюся часть выражения W_2 обозначим через W_3.

7. Приведение в W_3 подобных относительно степеней шагов сетки членов.

8. Вывод на печать погрешности аппроксимации дифференциального уравнения рассматриваемым разностным.

9. Автоматический переход на рассмотрение следующего разностного уравнения схемы (т. е. переход к п. 3) или окончание работы.

Выходными данными рассматриваемой программы комплекса являются:

1) вся вводимая информация (что делается прежде всего для контроля ввода);

2) погрешность аппроксимации всех разностных уравнений схемы, по которой можно судить, с каким порядком данная разностная схема аппроксимирует исходные дифференциальные уравнения (рассматриваются для этого лишь члены с минимальными степенями шагов).

В случае, когда рассматриваемая разностная схема локально не аппроксимирует исходную систему дифференциальных уравнений, т. е. комплекс программ при выполнении указанных выше требований на число K, вид разностной схемы и системы уравнений не может выделить из очередного разностного уравнения соответствующее ему дифференциальное, выдается диагностика: «Разностная схема не аппроксимирует исходную систему уравнений», и комплекс заканчивает работу. Вместе с тем на печать выводятся те члены уравнения, которые удалось выделить в итоговом выражении, полученном после 4-го шага алгоритма, и оставшиеся члены этого выражения, что позволяет проследить, какой член того или иного уравнения не удалось выделить в очередном разностном уравнении. В соответствии с этим перед новым запуском комплекса программ можно сделать предлагаемые пользователем необходимые изменения в разностной схеме и заново применить комплекс к подправленной схеме. Случай, когда минимальное значение степеней шагов равно нулю, пользователь обнаруживает при просмотре выходной информации, выданной на печать комплексом программ.

§ 2. Исследование устойчивости

При исследовании устойчивости разностных схем используются различные подходы: метод априорных оценок [1]—[5], [16], [17], разнообразные спектральные методы [1]—[5], [17], метод дифференциального приближения [18] и др. Поскольку спектральные методы алгоритмически несложны, значительная часть работ по анализу устойчивости разностных схем основана на применении этих методов. В данном параграфе описывается реализация на ЭВМ одного из спектральных методов — метода Фурье [1]—[5], [17].

Идея этого метода заключается в изучении решений разностных уравнений с помощью преобразования Фурье. Прием состоит в изучении поведения решений, которые ищутся в классе функций вида

$$(2.1)\qquad u(x,t)=\mu_s(t)\exp\{i[s\cdot x]\},\qquad i^2=-1,$$

где $s=(s_1,\dots,s_N)$ — вектор размерности пространства независимых переменных. Совокупность функций (2.1), как известно, образует фундаментальное множество решений однородного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами, и от применяемой разностной схемы требуется, чтобы коэффициенты $\mu_s(t)$ были равномерно ограничены по s и t при любом $t\in[0,T]$. Схема, удовлетворяющая этому требованию, называется устойчивой. Как известно, в случае постоянных коэффициентов и достаточно простых областей с помощью преобразования Фурье разностных уравнений найден довольно легко проверяемый алгебраический критерий устойчивости Неймана. Кратко изложим основные шаги процесса получения этого критерия [1]—[4], [17].

Рассмотрим систему разностных уравнений, заданную в виде двухслойных формул (т. е. формул, содержащих всего два «временных слоя»:

t^n и t^{n+1}):

$$A_1 u^{n+1} - A_0 u^n = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha \in N_1} A_1{}^\alpha u^{n+1}(x+\alpha\Delta x) - \sum_{\alpha \in N_0} A_0{}^\alpha u^n(x+\alpha\Delta x) = 0, \tag{2.2}$$

где суммирование ведется по конечным множествам N_1 и N_0 точек $x+\alpha\Delta x = (x_1+\alpha_1\Delta x_1, \dots, x_N+\alpha_N\Delta x_N)$, соседних с точкой $x=(x_1, \dots, x_N)$ пространственной сетки ω_h, где $\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ — заданный вектор. Для каждого α матрицы $A_0{}^\alpha$ и $A_1{}^\alpha$ имеют размер $N\times N$ и постоянные элементы.

Заменим разностные функции $u^n(x)$ и $u^{n+1}(x)$ в выражении (2.2) на гармонические вида (2.1), применив к разностным функциям преобразование Фурье [1]—[4], [17]. Члены полученного выражения содержат множитель

$$\exp\{i[s_1(x_1+\alpha_1\Delta x_1) + \dots + s_N(x_N+\alpha_N\Delta x_N)]\}.$$

Сократив на величину $\exp\{i[s\cdot x]\}$ все члены уравнения, получим

$$B_1 \mu^{n+1}(s) - B_0 \mu^n(s) = 0, \tag{2.3}$$

где B_1 обозначает матрицу

$$B_1 = \sum_{\alpha \in N_1} A_1{}^\alpha \exp\{i[s_1\alpha_1\Delta x_1 + \dots + s_N\alpha_N\Delta x_N]\},$$

а B_0 определяется аналогично. Матрицы B_0 и B_1 зависят только от s и Δt, поскольку предполагается выполнение соотношений

$$\Delta x_i = g_i(\Delta t), \quad i=1, 2, \dots, N.$$

Пусть (2.3) разрешимо относительно $\mu^{n+1}(s)$, т. е. можно записать

$$\mu^{n+1}(s) = G(s, \Delta t)\mu^n(s), \tag{2.4}$$

где

$$G(s, \Delta t) = B_1{}^{-1} B_0. \tag{2.5}$$

Матрица $G(s, \Delta t)$ называется матрицей перехода со слоя n на слой $n+1$. Условие устойчивости разностной схемы (2.2) означает, что для некоторого $\tau>0$ матрицы $G^n(s, \Delta t)$ равномерно ограничены на $0\leqslant n\Delta t\leqslant T$, $0<\Delta t\leqslant\tau$ для всех s (см. [1]—[5], [17]). Если обозначить через $R(s, \Delta t)$ спектральный радиус матрицы $G(s, \Delta t)$, то в общем случае (вопрос о выборе нормы матрицы изложен в [1]—[4], [17])

$$R^n(s, \Delta t) \leqslant \|G^n(s, \Delta t)\| \leqslant \|G(s, \Delta t)\|^n.$$

Следовательно, необходимым условием устойчивости является существование такой постоянной C, что $R^n(s, \Delta t) \leqslant C$ на $0\leqslant n\Delta t\leqslant T$, $0<\Delta t\leqslant\tau$ для всех s. Учитывая определение спектрального радиуса [4], для всех s получаем

$$|\lambda_j| \leqslant 1 + o(\Delta t), \quad 0<\Delta t\leqslant\tau, \quad j=1, 2, \dots, p, \tag{2.6}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ — собственные значения матрицы перехода $G(s, \Delta t)$. Условие (2.6) и является критерием устойчивости Неймана.

Замечания. 3. В общем случае критерий Неймана (2.6) является лишь необходимым для устойчивости разностных схем, однако на практике им иногда можно пользоваться как достаточным.

Вместе с тем в нескольких специальных случаях достаточность условия (2.6) может быть доказана строго, в частности для матриц перехода, принадлежащих классу нормальных, т. е. удовлетворяющих условию

$$G^*G-GG^*=0, \tag{2.7}$$

где G^* — эрмитово-сопряженная матрица G (см. [19]).

Если же матрица перехода унитарная, т. е.

$$G^*G=E \tag{2.8}$$

(E – единичная матрица), то исходная разностная схема безусловно устойчива. В этом случае известно [19], что собственные значения унитарной матрицы равны по модулю единице, поэтому необходимое условие устойчивости (2.6) всегда выполняется. К тому же унитарная матрица относится к классу нормальных (удовлетворяет условию (2.7)), следовательно, условие (2.6) в этом случае и достаточно для устойчивости.

Имеются и другие случаи, когда можно провести анализ устойчивости разностных схем или показать достаточность условия (2.6), не вычисляя характеристического уравнения схемы, а лишь проверяя определенные свойства матрицы перехода [4].

4. Метод Фурье применим и для случая многослойных схем. Уравнение, имеющее $r+2$ слоя, разрешимое относительно неизвестной вектор-функции на верхнем слое

$$u^{n+1}=A_0u^n+A_1u^{n-1}+\ldots+A_ru^{n-r}, \tag{2.9}$$

где A_i, $i=0,1,\ldots,r,$ – линейные ограниченные операторы, можно свести к двухслойной схеме введением новых переменных

$$u_1{}^n=u^{n-1},\quad u_2{}^n=u^{n-2},\ldots,u_r{}^n=u^{n-r}.$$

Разностная схема (2.9) примет вид, аналогичный (2.2):

$$\begin{aligned} &u^{n+1}-A_0u^n-A_1u_1{}^n-\ldots-A_ru_r{}^n=0,\\ &\overset{n+1}{u_1}-u^n=0,\\ &\ldots\ldots\\ &\overset{n+1}{u_r}-\overset{n}{u_{r-1}}=0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Система разностных уравнений (2.10) эквивалентна исходной $(r+2)$-слойной схеме (2.9). Для исследования ее устойчивости можно уже использовать рассматриваемый метод.

Изложим последовательность работы программы комплекса, которая реализует схему метода Фурье.

1. Ввод исходной разностной схемы, и подстановка вместо разностных функций соответствующих функций вида (2.1).

2. Приведение подобных членов при одинаковых степенях амплитуд, и выполнение в полученных коэффициентах различных тригонометрических преобразований, например

$$\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}=i\sin\varphi,\qquad \frac{-e^{i\varphi}+2-e^{-i\varphi}}{4}=\sin^2\frac{\varphi}{2},\qquad i^2=-1,$$

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1,\qquad 2\sin\varphi\cos\varphi=\sin(2\varphi),$$

$$\cos\varphi-\cos\psi=-2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\ \text{и т. п.}$$

3. Выполнение арифметических действий над полиномами, которые необходимы для получения формулы (2.4).

4. Составление матрицы перехода по формуле (2.5).

5. Проведение алгебраических действий над матрицами, необходимых для составления эрмитово-сопряженной матрицы перехода.

6. Проверка матрицы перехода на нормальность, т. е. проверка условия (2.7). Если оно выполнено, то переходим к следующему пункту, иначе — к п. 8.

7. Проверка матрицы на унитарность, т. е. проверка условия (2.8). Если оно выполнено — то окончание работы, поскольку исходная разностная схема абсолютно устойчива (см. замечание 3), иначе — переход к следующему пункту, с учетом того, что условие (2.6) является и достаточным для устойчивости.

8. Вычисление определителя характеристической матрицы перехода.

9. Получение характеристического уравнения, и различные его упрощения (приведение подобных, преобразование комплексных и тригонометрических выражений и т. д.).

10. Общее исследование характеристического уравнения, связанное с попытками понижения порядка уравнения. Здесь рассмотрены случаи: отсутствие свободного члена, биквадратные уравнения и др.

11. Выделение у уравнения корней, равных ± 1. При наличии таковых, используя алгоритм деления двух полиномов, производим понижение порядка рассматриваемого уравнения.

12. Исследование корней уравнения разветвляется в зависимости от его порядка.

а. Уравнение 1-го порядка. Рассмотрены следующие случаи: наличие экспоненциальных членов, наличие мнимой единицы i, свободный член в виде дроби, наличие тригонометрических функций sin и cos, различные комбинации этих случаев.

б. Квадратное уравнение. Проверка условия (2.6) основана на критерии Гурвица.

Замечание 5. Критерий Гурвица заключается в следующем [20]: корни квадратного уравнения $\lambda^2+b\lambda+c=0$ по модулю меньше или равны единице тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: $|b|\leqslant 1+c$ и $|c|\leqslant 1$.

в. Уравнения 3-го и 4-го порядка. Приведение их определенной подстановкой к «неполному» виду, т. е. для уравнения 3-го порядка начало решения соответствует методу Кардано, для 4-го порядка — методу Декарта — Эйлера [21].

г. Все те случаи, когда трудно или невозможно проанализировать устойчивость разностных схем аналитически (сюда относится и случай уравнений порядка больше 4).

Работу п. г пользователь заказывает во входных данных комплекса. ЭВМ в этом случае выводит на печать уравнение в фортраноподобном виде и на указанной пользователем зоне ленты автоматически генерирует программу на ФОРТРАНе для численного нахождения корней уравнения и их модулей при конкретном численном задании значений шагов сетки и параметров, необходимых для счета. Параметры и порядок их задания указываются комплексом программ. Затем необходимо задать численные значения требуемых параметров (можно сразу несколько вариантов) и, вызвав сгенерированную программу, запустить ее на счет.

Замечание 6. Программа для численного нахождения корней уравнения и их модулей написана в соответствии с трехшаговым алгоритмом, предложенным в [22], и пользователю заранее указывается место ее нахождения на ленте. Вопросы о выборе метода численного решения уравнения, об особенностях генерации программы, реализующей этот метод, о символьно-численном интерфейсе, о точности численного решения и т. п. из-за своей сложности требуют отдельного рассмотрения.

Программа комплекса, реализующая изложенную выше схему исследования устойчивости, имеет единственное входное данное — разностную схему, каждое уравнение которой записано в виде (1.1), но в нем отсутствуют члены $F^{\gamma}(u, x, t)(I_{\gamma})$ и не может допускаться произведение нескольких зависимых функций и произведение разностных функций, поскольку схема должна быть линейной (для нелинейных схем необходима линеаризация нелинейных членов). Таким образом, каждое разностное уравнение схемы с учетом введенных ранее обозначений имеет вид

$$\sum_{l}\sum_{r} C_{lr} * U_l(I_r) * H_{lr}(H),$$

где под $U_l(I_r)$ теперь понимается не произведение, а одна разностная функция u_l, взятая в точке I_r, а $l=1, 2, \ldots, M$ — номер компоненты вектор-функции u.

Выходными данными программы являются: 1) исходные данные, матрица перехода, ее эрмитово-сопряженная, их произведение и характеристическое уравнение; 2) различные сообщения о результатах проверки указанных выше свойств матриц и характеристического уравнения; 3) неравенства, которые необходимо проверить (и выполнение которых эквивалентно выполнению условия (2.6)), или окончательный вывод об устойчивости; 4) в случаях, указанных выше, выводится также сгенерированная на ленте программа на ФОРТРАНе и список параметров, задание которых требуется для дальнейшего численного счета с помощью указанной программы.

§ 3. Основные функции комплекса программ

Для того чтобы более полно охарактеризовать данный комплекс программ и его возможности, перечислим те основные функции, которые в соответствии с рассмотренными алгоритмами необходимо было перенести на ЭВМ.

1. Подстановка одного выражения в другое.
2. Формальное дифференцирование сложных функций.
3. Разложение в ряд Тейлора.
4. Различные необходимые тригонометрические преобразования (примеры которых указаны выше).
5. Арифметика полиномов (умножение, деление, сложение, вычитание, нахождение НОДа двух полиномов и т. п.).
6. Построение матриц, элементами которых являются полиномы.
7. Алгебра матриц (умножение, вычитание, транспонирование, сопряжение и т. п.).
8. Проверка матрицы на нормальность, унитарность.
9. Вычисление определителя матрицы.

Замечание 7. Для счета определителей реализованы различные алгоритмы, см. [21], [23].

10. Выделение у уравнения корней, равных ± 1.
11. Аналитическое решение или оценка корней уравнения.

12. Генерация ФОРТРАН-программ для численного решения уравнения.

13. Арифметика рациональных чисел.

14. Работа с комплексными выражениями.

Замечание 8. Пп. 13 и 14 возникли в связи с тем, что в языке РЕФАЛ, на котором написан данный комплекс, пока нет ни рациональных, ни комплексных чисел.

§ 4. Примеры работы программ комплекса

Работа данного комплекса программ проверена на большом количестве примеров как известных, так и построенных на ЭВМ разностных схем [1]—[5], [9], [16], [17], [20], [24], [25]. В том числе с его помощью исследованы схемы, для которых процесс вычисления вручную погрешности аппроксимации или матрицы перехода и характеристического уравнения весьма затруднителен. Так, были исследованы схемы для задачи распространения свободных длинноволновых колебаний, для краевой задачи о поперечных колебаниях упругого стержня (явная и неявная схемы), различные схемы для уравнений акустики, многие центрально-разностные схемы, используемые в теории мелкой воды [1]—[4], [17], [24], [25]. С целью проверки правильности вычисления остаточного члена аппроксимации разностных схем использованы также многие схемы для задач газовой динамики и теории упругости [5], [16], [17], [20].

Рассмотрим результаты работы программ комплекса на известных примерах, не столько трудоемких, сколько наглядных и демонстрирующих работу программ в различных случаях. Разумеется, применение комплекса не ограничивается примерами, подобными приведенным. Класс схем, с которыми может работать данный комплекс, указан выше (см. § 1 и 2).

Сначала покажем работу программы комплекса, реализующей на ЭВМ алгоритм вычисления погрешности аппроксимации разностных схем.

Пример 1. Случай постоянных коэффициентов.

Рассмотрим систему уравнений равновесия неоднородного изотропного упругого твердого тела в случае плоской деформации [16]:

$$(4.1а)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\left((2\mu+\lambda)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+ \\ +\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=0,$$

$$(4.1б)\qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+ \\ +\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left((2\mu+\lambda)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)=0,$$

где неизвестные функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — перемещения по осям Ox_1 и Ox_2 соответственно, а $\lambda(x)>0$ и $\mu(x)>0$ — коэффициенты Ламе. Для задачи (4.1) взята следующая разностная схема (для простоты рассматривается случай, когда λ и μ постоянные) [16]:

(4.2а) $$(\lambda+2\mu)(u_1)_{\bar{x}_1x_1}+\mu(u_1)_{x_2x_2}+\frac{\lambda+\mu}{2}[(u_2)_{x_1x_2}+(u_2)_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]=0,$$

(4.2б) $$\frac{\lambda+\mu}{2}[(u_1)_{x_1x_2}+(u_1)_{\bar{x}_1\bar{x}_2}]+\mu(u_2)_{\bar{x}_1x_1}+(\lambda+2\mu)(u_2)_{\bar{x}_2x_2}=0,$$

где обозначено

$$(v_{mk})_{x_1}=(v_{m+1,k}-v_{mk})/h_1, \qquad (v_{mk})_{x_2}=(v_{m,k+1}-v_{mk})/h_2,$$

$$(v_{mk})_{\bar{x}_1}=(v_{m,k}-v_{m-1,k})/h_1, \qquad (v_{mk})_{\bar{x}_2}=(v_{mk}-v_{m,k-1})/h_2,$$

$$v=u_1,\ u_2.$$

В результате работы программы получена погрешность аппроксимации разностной схемой (4.2) системы (4.1), в которой минимальными компонентами вектора степеней шагов являются $H(2, 2)$, $H(2, 0)$, $H(0, 2)$. Следовательно, порядок, с которым разностная схема (4.2) аппроксимирует уравнения (4.1), есть $O(h_1^2+h_2^2)$.

Пример 2. Случай квазилинейных уравнений.

Для системы уравнений изэнтропического течения [5]

(4.3а) $$\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \qquad u_2=\ln\rho,$$

(4.3б) $$\frac{\partial u_2}{\partial t}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial x}+C\frac{\partial u_1}{\partial x}=0, \qquad C=\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S,$$

рассмотрим схему Лелевье (при $u_2<0$)

(4.4а) $$\frac{(u_1)_m^n-(u_1)_m^n}{\tau}+(u_2)_m^n\frac{(u_1)_{m+1}^n-(u_1)_m^n}{h}+\frac{(u_2)_{m+1}^n-(u_2)_{m-1}^n}{2h}=0,$$

(4.4б) $$\frac{(u_2)_m^{n+1}-(u_2)_m^n}{\tau}+(u_2)_m^n\frac{(u_2)_{m+1}^n-(u_2)_m^n}{h}+$$
$$+C_m^n\frac{(u_1)_{m+1}^{n+1}-(u_1)_{m-1}^{n+1}}{2h}=0.$$

Входные данные для рассматриваемого примера запишутся в соответствии с § 1 следующим образом: исходная система дифференциальных уравнений

DU1(1, 0, 1)=(–U2*DU1(1, 1, 0)–DU2(2, 1, 0)),

DU2(2, 0, 1)=(–U2*DU2(2, 1, 0)–C*DU1(1, 1, 0));

исследуемая разностная схема

U1(0, 1)*H(0, –1)–U1(0)*H(0, –1)+U2(0)*U1(1, 0)*
*H(–1, 0)–U2(0)*U1(0)*H(–1, 0)+1/2*U2(1, 0)*
*H(–1, 0)–1/2*U2(–1, 0)*H(–1, 0),

U2(0, 1)*H(0, –1)–U2(0)*H(0, –1)+U2(0)*U2(1,0)*
*H(–1, 0)–U2(0)*U2(0)*H(–1, 0)+1/2*C(T, X)(0)*
*U1(1, 1)*H(–1, 0)–1/2*C(T, X)(0)*U1(–1, 1)*H(–1, 0);

число $K=3$.

В результате работы программы получена следующая погрешность аппроксимации уравнения (4.4а):

```
1/2*U2*DU1(1, 2, 0)*H(1, 0)+1/6*DU2(2, 3, 0)*H(2, 0)+
+1/6*U2*DU1(1, 3, 0)*H(2, 0)+(-1/2*DU2(2, 1, 1)+
+1/2*U2**2*DU1(1, 2, 0)+1/2*U2*DU1(1,1,0)*DU2(2,1,0)+
+1/2*U2*DU2(2,2,0)-1/2*DU1(1,1,0)*DU2(2,0,1))*
*H(0, 1)+(...)*H(0, 2),
```

в которой минимальными компонентами вектора степеней шагов являются H(1, 0) и H(0, 1). Аналогичный результат получается и для уравнения (4.4б).

Следовательно, порядок, с которым разностная схема (4.4) аппроксимирует систему дифференциальных уравнений (4.3), есть $O(h, \tau)$.

Приведем примеры работы программы, реализующей алгоритм исследования устойчивости.

Пример 3. Для системы уравнений акустики

$$\frac{\partial u}{\partial t}+C^2\frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial v}+C^2\frac{\partial w}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

рассмотрим один из простых вариантов центрально-разностной схемы Элиассена [24]:

$$\text{(4.5а)} \qquad \frac{u_{mk}^{n+1}-u_{mk}^{n-1}}{\tau}+\frac{C^2}{h}(w_{m+1,k}^{n}-w_{m-1,k}^{n})=0,$$

$$\text{(4.5б)} \qquad \frac{v_{mk}^{n+1}-v_{mk}^{n-1}}{\tau}+\frac{C^2}{h}(w_{m,k+1}^{n}-w_{m,k-1}^{n})=0,$$

$$\text{(4.5в)} \qquad \frac{w_{mk}^{n+1}-w_{mk}^{n-1}}{\tau}+\frac{1}{h}(u_{m+1,k}^{n}-u_{m-1,k}^{n})+\frac{1}{h}(v_{m,k+1}^{n}-v_{m,k-1}^{n})=0.$$

Поскольку данная схема трехслойная, прежде чем применить программу, необходимо в соответствии с замечанием 4 записать схему в каноническом (двухслойном) виде. Проделав это, получим схему

$$\frac{(u_1)_{mk}^{n+1}-(u_2)_{mk}^{n}}{\tau}+\frac{C^2}{h}[(u_5)_{m+1,k}^{n}-(u_5)_{m-1,k}^{n}]=0,$$

$$(u_2)_{mk}^{n+1}-(u_1)_{mk}^{n}=0,$$

$$\frac{(u_3)_{mk}^{n+1}-(u_4)_{mk}^{n}}{\tau}+\frac{C^2}{h}[(u_5)_{m,k+1}^{n}-(u_5)_{m,k-1}^{n}]=0,$$

$$(u_4)_{mk}^{n+1}-(u_3)_{mk}^{n}=0,$$

$$\frac{(u_5)_{mk}^{n+1}-(u_6)_{mk}^{n}}{\tau}+\frac{1}{h}\{[(u_1)_{m+1,k}^{n}-(u_1)_{m-1,k}^{n}]+$$

$$+[(u_3)_{m,k+1}^{n}-(u_3)_{m,k-1}^{n}]\}=0,$$

$$(u_6)_{mk}^{n+1}-(u_5)_{mk}^{n}=0,$$

с которой программа уже может работать.

В результате работы программы получена матрица перехода

$$G=\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2*C**2*R1*Q1*I & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2*C**2*R1*Q2*I & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -2*R1*Q1*I & 0 & -2*R1*Q2*I & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|,$$

где R1=H(−1, 1) — отношение шагов сетки, $I^2=-1$, $Q1=\sin x_1$, $Q2=\sin x_2$, λ — характеристическая величина. ЭВМ также вывела матрицу, эрмитово-сопряженную к G, и их произведение (ввиду громоздкости они здесь не выписаны). Проверяя указанные выше свойства (см. замечание 3), ЭВМ установила, что матрица перехода не принадлежит классу нормальных матриц. Затем она вывела характеристическое уравнение, которое имеет вид

λ**6+(4*C**2*R1**2*(SIN(X1)**2+

+SIN(X2)**2)−3)*λ**4+(−4*C**2*R1**2*(SIN(X1)**2+

+SIN(X2)**2)+3)*λ**2−1=0.

Далее ЭВМ сделала подстановку μ=λ**2 и тем самым свела исследование к изучению кубичного относительно μ уравнения (здесь и далее запись уравнений приводится не в фортраноподобном виде, в котором выводит их ЭВМ, а в обычном)

$$\mu^3+[4C^2R_1^2(\sin^2 x_1+\sin^2 x_2)-3]\mu^2+[3-4C^2R_1^2(\sin^2 x_1+$$

$$+\sin^2 x_2)]\mu-1=0.$$

ЭВМ установила также, что один из корней этого уравнения равен 1, а два других находятся из уравнения

$$\mu^2+[4C^2R_1^2(\sin^2 x_1+\sin^2 x_2)-2]\mu+1=0.$$

Затем она напечатала диагностику, что модули корней данного уравнения будут равны единице, если выполнено условие

$$|4C^2R_1^2(\sin^2 x_1+\sin^2 x_2)-2|\leqslant 2,$$

и закончила свою работу. Отсюда видно, что условие Неймана (2.6) выполнено для схемы (4.5), если $C^2R_1^2(\sin^2 x_1+\sin^2 x_2)\leqslant 1$, что приводит к ограничению $CR_1=C\tau/h\leqslant 1/\sqrt{2}$. Время работы программы на ЭВМ БЭСМ-6 около 1 мин.

Пример 4. Рассмотрим неявную разностную схему для системы уравнений, эквивалентной волновому уравнению $\partial^2 w/\partial t^2=C^2\partial^2 w/\partial x^2$, а именно (см. [24])

$$\frac{(u_1)_m^{n+1}-(u_1)_m^n}{\tau}=\frac{C}{4h}[(u_2)_{m+1}^{n+1}-(u_2)_{m-1}^{n+1}+(u_2)_{m+1}^{n}-(u_2)_{m-1}^{n}], \tag{4.6а}$$

$$\frac{(u_2)_m^{n+1}-(u_2)_m^n}{\tau}=\frac{C}{4h}[(u_1)_{m+1}^{n+1}-(u_1)_{m-1}^{n+1}+(u_1)_{m+1}^{n}-(u_1)_{m-1}^{n}]. \tag{4.6б}$$

Для данной схемы в результате работы программы получена матрица перехода (запишем ее в обычном виде)

$$G=\left\|\begin{matrix}(-N_1C^2R_1^2Q_2^2+1)F_3 & CR_1Q_2F_3\mathbf{i}\\ CR_1Q_2F_3\mathbf{i} & (-N_1C^2R_1^2Q_2^2+1)F_3\end{matrix}\right\|,$$

где $N_1={}^1/_4$, $R_1=H(-1,\ 1)$, $Q_2=\sin x$, $F_3=[1+C^2R_1^2\sin^2(x)/4]^{-1}$, $\mathbf{i}^2=-1$. Автоматически показано, что данная матрица удовлетворяет свойствам (2.7) и (2.8), и выдана диагностика, что разностная схема (4.6) абсолютно устойчива. Время работы программы для данного примера ~30 с.

Выводы

Предложенный в настоящей статье комплекс программ для аналитического исследования на ЭВМ аппроксимации и устойчивости разностных схем для систем дифференциальных уравнений с частными производными со многими независимыми переменными за небольшое время позволяет на ЭВМ в символьном виде вычислить погрешность аппроксимации схем, матрицу перехода, проверяя для нее выполнение указанных выше свойств (2.7) и (2.8), характеристическое уравнение и реализует отдельные приемы оценки для численного нахождения модулей корней характеристического уравнения. Систему неравенств, которая может получиться в результате работы данного комплекса, необходимо решать в символьном виде вручную, поскольку в общем случае автоматизация этого процесса на ЭВМ затруднительна. Величина исследуемых схем (с точки зрения длины их записи и занимаемого объема памяти) ограничена только возможностями ЭВМ (БЭСМ-6). Данный комплекс программ может быть перенесен и на машины ЕС, возможности которых по объему памяти являются более широкими.

Надо отметить также, что при исследовании аппроксимации в систему дифференциальных уравнений можно включать начальные и граничные условия, а в разностную схему — соответственно, их разностные аналоги. Тогда программа проведет анализ аппроксимации не только для одного дифференциального оператора, но и целиком для всей дифференциальной задачи.

Что касается программы, реализующей метод Фурье, то область ее применения может быть расширена в соответствии с принципом «замороженных» коэффициентов и с признаком К. И. Бабенко и И. М. Гельфанда [1]. Т. е. данной программой можно пользоваться и в случае переменных коэффициентов, и в случае, когда необходимо учитывать влияние границ. В первом случае надо только во входных данных заменить постоянные величины, например С на С⟨X1⟩, и понимать под этим обозначением переменную величину C, взятую в точке x_1. Во втором случае надо вместо одной исследовать три разностные задачи (на левом, на правом концах и во внутренней точке, см. [1]). Следовательно, надо использовать данную программу либо три раза, делая необходимые изменения во входных данных, либо один раз, но рассмотреть три случая задания переменных коэффициентов в соответствующих точках.

В случае симметричного шаблона, использующего узлы равномерной по криволинейным координатам сетки, для анализа схем, очевидно, можно использовать указанный выше вид разностной схемы, поскольку все члены, выражающие криволинейность сетки, войдут в коэффициенты при сеточных функциях. В других же случаях вид записи схемы во входных данных комплекса зависит от способа описания шаблона. Поэтому требуется внести дополнительные несущественные изменения в описанный вариант комплекса. В настоящей статье этот вопрос не рассматривается. Данный комплекс программ работает и в случае разностных схем с дробными шагами.

Таким образом, описанный здесь комплекс программ можно использовать для исследования аппроксимации и устойчивости довольно широкого класса разностных схем.

Литература

1. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
3. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
4. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
5. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. *Van Hulzen J. A., Calmet J.* Computer algebra systems. – Computing Suppl., 1982, v. 4, p. 221–243.
7. *Calmet J., Van Hulzen J. A.* Computer algebra applications. – Computing Suppl., 1982, v. 4, p. 245–258.
8. *Ng E. W.* Symbolic-numeric interface: a review. – Lect. Notes in Computer Sci., 1979, v. 72, p. 330–345.
9. *Валиуллин А. Н. и др.* Применение символьных преобразований на ЭВМ для построения и анализа разностных схем. – Препринт Ин-та теор. и прикл. механ. СО АН СССР. Новосибирск, 1981, № 7.
10. *Ефимов Г. Б. и др.* Автоматизация программирования операторных разностных схем.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М.: 1982, № 20.
11. *Keller H. B., Pereyra V.* Symbolic generation of finite difference formulas.– Math. Comput., 1978, v. 32, № 144, p. 955–971.
12. *Wirth M. C.* Automatic generation of finite difference equations and Fourier stability analysis.– Proc. 1981 ACM SYMSAC, 1981, p. 73–78.
13. *Giese J. H., Khalil H. M., Ulery D. L.* Multiparameter families of difference approximations for the first initial boundary value problem for the heat equation in an arbitrary region.– J. Engng Math., 1978, v. 12, № 2, p. 97–114.
14. *Мазурик С. И.* Применение ЭВМ для исследования устойчивости разностных схем для систем дифференциальных уравнений.– В кн.: Материалы XX Всес. научн. студ. конф. Математика. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1982, с. 41–45.
15. Базисный РЕФАЛ и его реализация на вычислительных машинах.– Препринт ЦНИ и проектно-эксперим. ин-та автоматизир. систем в стр-ве. М., 1977, вып. V-40.
16. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
17. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
18. *Шокин Ю. И.* Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979.
19. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
20. *Валиуллин А. Н.* Схемы повышенной точности для задач математической физики. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1973.
21. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1962.
22. *Jenkins M. A., Traub J. F.* Zeros of a complex polynomial.– Communs ACM, 1972, v. 15, № 2, p. 97–99.
23. *Ганжа В. Г., Мурзин Ф. А., Шапеев В. П.* Два алгоритма вычисления в символьном виде определителей разреженных матриц и их реализации на ЭВМ.– Препринт Ин-та теор. и прикл. механ. СО АН СССР. Новосибирск, 1980, № 24.
24. *Вольцингер Н. Е., Пясковский Р. В.* Основные океанологические задачи теории мелкой воды. Л.: Гидрометеоиздат, 1968.
25. *Марчук Ан. Г., Чубаров Л. Б., Шокин Ю. И.* Численное моделирование волн цунами. Новосибирск: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 13.VIII.1984
Переработанный вариант 6.III.1985