В. А. Алексеев, И. Я. Колпаков-Мирошниченко, О факторповерхностях P^2 по конечной группе, *УМН*, 1988, том 43, выпуск 5, 171–172

https://www.mathnet.ru/rm1984

О ФАКТОРПОВЕРХНОСТЯХ P^2 ПО КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ

В. А. Алексеев, И. Я. Колпаков-Мирошниченко

Пусть X — нормальная алгебраическая поверхность над полем $\mathbb{C}$. На поверхности X определен канонический дивизор Вейля K_X. Поверхность X называется *лог-поверхностью Дель-Пеццо*, если она имеет только факторособенности и некоторая кратность $-nK_X$ является обильным дивизором Картье. Все эти поверхности рациональны. Примерами лог-поверхностей Дель-Пеццо с $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}$ являются факторповерхности P^2 по конечной группе. Мы показываем, что этим класс таких поверхностей не исчерпывается. Известно, что существуют три поверхности с обильным антиканоническим дивизором и с $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}$, каждая из которых имеет ровно одну особую точку — E_6, E_7, E_8 соответственно (см., например, [1], [2]). Оказывается, они не имеют вида P^2/G.

Обозначения. Символами G, A будем обозначать конечные подгруппы в $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$, символами G', A' — конечные подгруппы в $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ такие, что $\alpha(G') = G$, $\alpha(A') = A$ при естественном гомоморфизме α: $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$.

Напомним некоторые факты о двумерных факторособенностях. Все они рациональны. При минимальном разрешении вклеивается дерево рациональных кривых, которые образуют взвешенный граф типов A_n, D_n, E_n, если каждой рациональной кривой C_i сопоставить вершину с весом $-C_i^2$ и две вершины соединить ребром, если $C_i \cdot C_j = 1$. Все такие графы перечислены в [3]. Дюваленским особенностям соответствуют графы с весами 2 при всех вершинах. Будем обозначать эти особенности A_n, D_n, E_n. Торическими являются в точности те особенности, которые имеют взвешенные графы типа A_n. Другое их описание: факторы по абелевым группам.

Лемма. *Пусть (U, P) — торическая особенность, i: $U \to U$ — инволюция, оставляющая точку P неподвижной. Тогда факторособенность (V, Q), $V = U/i$ имеет граф типа A_n или D_n.*

Доказательство леммы непосредственное.

Теорема. *Среди факторповерхностей P^2/G нет поверхностей в точности с одной особой точкой E_6, E_7 или E_8 соответственно.*

Доказательство. Пусть $G' \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ — конечная группа, которая действует на $V \simeq \mathbb{C}^3$. Возможны три случая: 1) G' — импримитивная группа, т.е. существует разложение $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$, $\dim V_i = 1$ и для любого элемента g группы G' $g(V_i) = V_j$. В таком случае G' содержит нормальную абелеву подгруппу $A' = \{a \in G' \mid a(V_i) = V_i,\ i = 1, 2, 3\}$ и $G'/A' \subset S_3$. 2) G' — приводимая группа, т.е. существует разложение $V = V_1 \oplus V_2$, $\dim V_1 = 1$ и $\dim V_2 = 2$, $G(V_i) = V_i$, $i = 1, 2$. Так как нас интересует только образ группы G' в $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$, можно считать, что $G' = 1 \oplus H$, $H \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. 3) G' — примитивная группа, т.е. не входит в предыдущие случаи.

Разберем эти случаи последовательно.

1) Имеем $P^2/G = (P^2/A)/(G/A) = (P^2/A)/(G'/A')$. Поверхность P^2/A имеет три или менее особые точки, которые соответствуют пространствам V_1, V_2, V_3. Эти особенности — торические. Группа G'/A' их как-то переставляет. При помощи леммы получаем, что на P^2/G нет особенностей E_6, E_7, E_8.

2) Можно считать, что группа H примитивна, иначе G' попадает в первый случай. Все такие группы перечислены в [4], леммы 2.3—2.5. Будем пользоваться обозначениями этой работы. Рассмотрим группу $\mathcal{G}_1$ с $Z(\mathcal{G}_1) = \{\pm E\}$ из лемм 2.3, 2.4, 2.5 или группу $\mathcal{G}_2$ из леммы 2.5. Пусть x, y, z — однородные координаты на P^2. На бесконечности (т.е. на гиперплоскости $x = 0$) есть три типа точек с нетривиальной стационарной подгруппой. Стационарная подгруппа точки $(0,0,1)$ имеет вид $x \to x$, $y \to iy$, $z \to -iz$. Эта точка отображается в неособую точку на P^2/G, если добавлены корни степени $4k$, и в особенности A_1, в противном случае. Но при добавлении к рассматриваемым группам корней 4-й степени получаются группы, порожденные отражениями, поэтому после добавления корней степени $4k$, на конечной части имеем торическую особенность. «Бесконечные точки» всегда переходят в торические.

Теперь рассмотрим группу $\mathcal{G}_2$ из леммы 2.3. Элемент $1 \oplus (-\alpha A)$ в подходящем базисе имеет вид $x \to x$, $y \to -\alpha\varepsilon y$, $z \to -\alpha\varepsilon^2 z$, где $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$. Этот элемент вместе с элементом $x \to x$, $y \to \mu y$, $z \to \mu z$ порождает стационарную подгруппу точек $(0, 0, 1)$ и $(0, 1, 0)$.

Чтобы эти точки перешли в неособые на P^2/G, необходимо $3^r \mid d$, но тогда $\mathcal{G}_2$ совпадает с уже разобранной группой $\mathcal{G}_1$.

Наконец, последний случай — группа $\mathcal{G}_2$ из леммы 2.4. Обозначим

$$C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & -1\end{pmatrix}.$$

В подходящем базисе элемент $1 \oplus \beta C$ имеет вид $x \to x$, $y \to \eta\beta y$, $z \to \eta^{-1}\beta z$, где $\eta = e^{\pi i/4}$. Этот элемент вместе с элементами $x \to x$, $y \to \beta^2 y$, $z \to \beta^2 z$ и $x \to x$, $y \to \nu y$, $z \to \nu z$ порождает стационарную подгруппу точки $(0, 0, 1)$. Если $r \neq 3$, то вновь, для того чтобы эта точка перешла в неособую, необходимо $2^r \mid d$, опять приходим к случаю группы $\mathcal{G}_1$. Пусть $r = 3$. Точно так же, как в случае группы $\mathcal{G}_2$ из леммы 2.3 замечаем, что $3 \mid d$. По формулам, приведенным в [4], можно проверить, что при $d = 3$ группа $\mathcal{G}_2$ порождена отражениями. Следовательно, при добавлении корней степени $3k$ на конечной части будет торическая особенность.

3) Все трехмерные примитивные группы с точностью до скалярных матриц перечислены в [5]; всего 6 групп. Непосредственно проверяется, что и в этом случае искомых поверхностей нет. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Du Val P. On isolated singularities of surfaces which do not affect the condition of adjunction, I, II, III//Proc. Cambridge Phil. Soc.—1934.— T. 30, № 3.— P. 453—465, 483—491.

[2] Bindschadler D., Brenton L., Drucker O. Rational mappings of Del Pezzo surfaces//Tohóku Math. J.—1984.— T. 36.— № 4.— P. 561—609.

[3] Brieskorn E. Rational singularitaten Komplexer Flächen//Invent. Math.—1968.— T. 4, № 5.— P. 336—358.

[4] Huffman W. C. Polynomial invariants of finite linear groups of degree two//Canad. J. Math. 1980.— T. 32, № 2.— P. 317—330.

[5] Blichfeldt H. F. Finite collineation groups//Chicago, Chicago Univ. Press, 1917.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в Правление общества 1 июня 1987 г.