Г. А. Исаева, Видоизмененная задача Дирихле для эллиптической системы, вырождающейся в нуле и на n-мерной сфере, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1996, том 2, выпуск 4, 1205–1212

Видоизмененная задача Дирихле для эллиптической системы, вырождающейся в нуле и на n-мерной сфере

Г. А. ИСАЕВА
Иркутский государственный университет
e-mail: isaeva@math.isu.runnet.ru

УДК 517.956

Ключевые слова: эллиптические системы, вырождение, задача Дирихле.

Аннотация

Принадлежность системы с переменными коэффициентами тому или иному гомотопическому классу зависит от точки области, в которой рассматривается система. Многообразия вырождения разбивают первоначальную область на части. Представляет интерес изучение влияния такого вырождения на характер разрешимости граничных задач [1].

Рассмотрена система n уравнений второго порядка

$$-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\Delta u_j+\lambda\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0,\quad j=1,\ldots,n,$$

с вещественным параметром $\lambda>0$, эллиптичная везде, кроме начала координат и n-мерной сферы, на которых происходит параболическое вырождение.

Доказано, что видоизмененная задача Дирихле для этой системы в шаре, как содержащем сферу вырождения, так и находящемся внутри нее, разрешима и ее решение единственно в классе ограниченных функций.

Abstract

G. A. Isaeva, The modified Dirichlet problem for the elliptic system of equations that degenerates on the n-dimensional sphere and at the origin of coordinates, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **2**(1996), 1205–1212.

The belonging of a system of partial differential equations with variable coefficients to one or another homotopic type depends on the domain point at which this system is considered. The degeneration manifolds split the original region into parts. The study of the influence of such degeneration on the solvability character of the boundary value problems is important.

We consider the system of n partial second order differential equations

$$-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\Delta u_j+\lambda\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0,\quad j=1,\ldots,n,$$

with real parameter $\lambda>0$. This system is elliptic everywhere, except the origin of coordinates and the n-dimensional sphere with radius $\sqrt{\lambda}$, on which the parabolic degeneration occurs.

Фундаментальная и прикладная математика 1996, **2**, № 4, 1205–1212.

We prove that the modified Dirichlet problem for this system considered within a ball that either contains the degeneration sphere or is situated inside it, is solvable, and the solution is unique in the class of bounded functions.

Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\Delta u_j+\lambda\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0,\quad j=1,\ldots,n, \tag{1}$$

где $\lambda>0$ — вещественный параметр. Введем обозначение

$$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \tag{2}$$

Продифференцируем каждое j-е уравнение системы (1) по x_j, $j=1,\ldots,n$:

$$-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta u_j-2x_j\Delta u_j+\lambda\frac{\partial^2 H}{\partial x_j^2}=0,\quad j=1,\ldots,n,$$

и сложим полученные соотношения:

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2-\lambda)\Delta H+2\sum_{j=1}^{n}x_j\Delta u_j=0.$$

С учетом выражений для Δu_j из (1) получим

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2-\lambda)\Delta H+2\lambda\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial H}{\partial x_j}=0. \tag{3}$$

Характеристический определитель системы (1) имеет вид

$$\det=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2-\lambda)\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2\right)^n,$$

следовательно, система (1) эллиптична везде, кроме точки $x_1=\ldots=x_n=0$ и n-мерной сферы $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=\lambda$, на которых происходит параболическое вырождение.

I. Пусть область $\mathcal{D}$ является шаром $\{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<R^2\}$, содержащим сферу вырождения: $\underline{R^2>\lambda}$. Рассмотрим задачу Дирихле в следующей постановке: найти регулярное в шаре $\mathcal{D}$ ограниченное решение системы (1), удовлетворяющее на границе Γ: $\{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=R^2\}$ условиям

$$u_j\big|_{\Gamma}=f_j,\quad f_j\in C^{2,\alpha}(\Gamma),\quad j=1,\ldots,n-1, \tag{4}$$

$$u_n\big|_{\delta\Gamma}=f_n,\quad f_n\in C^{1,\alpha}(\delta\Gamma),\quad \delta\Gamma\colon\ \{x_n=0,\ \ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2=R^2\}. \tag{5}$$

С учетом обозначения

$$\tau = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = r^2$$

уравнение (3) приведем к виду

$$(\tau-\lambda)\Delta H + \frac{2\lambda}{\tau}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\tau-\lambda)\frac{\partial H}{\partial x_i}\right] + \frac{2(\lambda-\tau)}{\tau}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0.$$

Умножим полученное уравнение на H. С учетом соотношений

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\tau-\lambda)H\frac{\partial H}{\partial x_i}\right] = H\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\tau-\lambda)\frac{\partial H}{\partial x_i}\right] + \sum_{i=1}^{n}(\tau-\lambda)\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)^2;$$

$$H\ \frac{2(\lambda-\tau)}{\tau}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\lambda-\tau}{\tau}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial (H^2)}{\partial x_i}$$

получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\tau-\lambda)H\frac{\partial H}{\partial x_i}\right] - \sum_{i=1}^{n}(\tau-\lambda)\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\lambda-\tau}{\tau}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial (H^2)}{\partial x_i} = 0. \tag{6}$$

Используя формулу

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(H^2\right) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial (H^2)}{\partial x_i},$$

преобразуем третье слагаемое уравнения (6)

$$\frac{\lambda-\tau}{\tau}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial (H^2)}{\partial x_i} = \frac{\lambda-r^2}{r}\frac{\partial (H^2)}{\partial r} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda-r^2}{r}H^2\right) - H^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda-r^2}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda-r^2}{r}H^2\right) + H^2\frac{\lambda+r^2}{r^2}.$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\tau-\lambda)H\frac{\partial H}{\partial x_i}\right] + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda-r^2}{r}H^2\right) + \sum_{i=1}^{n}(\lambda-\tau)\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)^2 + H^2\frac{\lambda+r^2}{r^2} = 0. \tag{7}$$

Проинтегрируем полученное выражение по шару $\mathcal{D}_\lambda$ радиуса $\sqrt{\lambda}$. По формуле Остроградского интеграл от первого слагаемого равен

$$\int\limits_{\mathcal{D}_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\tau-\lambda)H\frac{\partial H}{\partial x_i}\right] dX = \int\limits_{\Gamma_\lambda} \sum_{i=1}^{n}(\tau-\lambda)H\frac{\partial H}{\partial x_i}\cos\alpha_i dS,$$

где $\alpha_i = (\widehat{n, x_i})$ — углы между внешней нормалью к сфере Γ_λ и координатными осями, dX — элемент объема, dS — элемент площади поверхности. Этот интеграл равен нулю, так как на сфере Γ_λ $\tau = \lambda$.

Второе слагаемое формулы (7) имеет особенность при $r = 0$. Но функция $\dfrac{1}{r}$ ограничена в области $\mathcal{D}_\lambda$, из которой выброшен шар K_ε, и непрерывно дифференцируема в области $\mathcal{D}_\lambda - K_\varepsilon$ с границей $\Gamma_\lambda + \Gamma_\varepsilon$. Следовательно, можно применить формулу Остроградского

$$\int\limits_{\mathcal{D}_\lambda - K_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda - r^2}{r} H^2\right) dX = \int\limits_{\Gamma_\lambda} \frac{\lambda - r^2}{r} H^2 dS + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\lambda - r^2}{r} H^2 dS.$$

По определению несобственного интеграла

$$\int\limits_{\mathcal{D}_\lambda} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda - r^2}{r} H^2\right) dX = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathcal{D}_\lambda - K_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda - r^2}{r} H^2\right) dX =$$
$$= (\lambda - \lambda)\omega_n \lambda^{\frac{n}{2}-1} \left(H^2\right)_{\mathcal{D}_\lambda} + \lim_{\varepsilon \to 0} (\lambda - \varepsilon^2)\omega_n \varepsilon^{n-2} \left(H^2\right)_{K_\varepsilon} = 0, \quad n > 2,$$

где $\omega_n = 2(\pi)^{\frac{n}{2}} \left[\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\right]^{-1}$ — площадь n-мерной сферы, $\left(H^2\right)_{\mathcal{D}_\lambda}$, $\left(H^2\right)_{K_\varepsilon}$ — средние значения функции H^2 соответственно в шарах $\mathcal{D}_\lambda$ и K_ε.

При интегрировании третьего и четвертого слагаемых формулы (7) по $\mathcal{D}_\lambda$ получаем равенство

$$\int\limits_{\mathcal{D}_\lambda} \sum_{i=1}^{n} (\lambda - \tau) \left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)^2 dX + \int\limits_{\mathcal{D}_\lambda} H^2 \frac{\lambda + r^2}{r^2} dX = 0,$$

которое возможно лишь при $H \equiv 0$.

Таким образом, в шаре $\mathcal{D}_\lambda$ уравнение (3) не имеет ограниченных интегрируемых решений, кроме $H = 0$. Докажем, что и вне этого шара решение только нулевое. Рассмотрим решения уравнения (3) вида

$$H_l(X) = F_l(\tau)\omega_l(X), \tag{8}$$

где $\omega_l(X)$ — однородный гармонический многочлен степени l [1]:

$$\Delta\omega_l = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \omega_l}{\partial x_i} = l\omega_l.$$

Для определения $F_l(\tau)$ подставим выражение (8) в уравнение (3)

$$\tau(\tau - \lambda)\Delta\left[F_l(\tau)\ \omega_l\right] + 2\lambda \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[F_l(\tau)\ \omega_l\right] = 0. \tag{9}$$

Оператор Лапласа для функции $F_l(\tau)$ имеет вид

$$\Delta F_l(\tau) = 4\tau F_l'' + 2nF_l',$$

так как

$$\frac{\partial F_l}{\partial x_i} = 2x_i F_l', \quad \frac{\partial^2 F_l}{\partial x_i^2} = 4x_i^2 F_l'' + 2F_l'.$$

Оператор Лапласа от произведения двух функций равен

$$\Delta\left[F_l(\tau)\ \omega_l\right] = \Delta F_l(\tau)\ \omega_l + F_l(\tau)\ \Delta\omega_l + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_l(\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial \omega_l}{\partial x_i} =$$
$$= (4\tau F_l'' + 2nF_l')\,\omega_l + 4F_l'\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial\omega_l}{\partial x_i} = 4\omega_l\left[\tau F_l'' + \left(\frac{n}{2}+l\right)F_l'\right].$$

Преобразовав второе слагаемое уравнения (9)

$$2\lambda\omega_l\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial F_l}{\partial x_j} + 2\lambda F_l\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial\omega_l}{\partial x_j} = 4\lambda F_l'\tau\omega_l + 2\lambda F_l l\omega_l,$$

получим

$$\left\{\tau(\tau-\lambda)\left[\tau F_l'' + \left(\frac{n}{2}+l\right)F_l'\right] + \tau\lambda F_l' + \frac{\lambda l}{2}F_l\right\}4\omega_l = 0,$$

или

$$F_l'' + \left(\frac{l+\frac{n}{2}-1}{\tau} + \frac{1}{\tau-\lambda}\right)F_l' + \frac{\lambda l}{2\tau}\frac{1}{\tau(\tau-\lambda)}F_l = 0. \tag{10}$$

Качественную характеристику аналитической структуры фундаментальных систем решений в окрестности особых точек дифференциального уравнения (10) дает схема Римана [2]

$$F_l(\tau) = F_l\left\{\begin{matrix} 0, & \lambda, & \infty & \\ \rho_1, & 0, & 0 & \tau \\ \rho_2, & 0, & l & \end{matrix}\right\},$$

где разность между корнями определяющего уравнения, соответствующего регулярной особой точке $\tau = 0$,

$$\rho_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(l+\frac{n}{2}-2\right) \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(l+\frac{n}{2}-2\right)^2 + 2l}$$

$$\rho_2 - \rho_1 = \sqrt{\left(l+\frac{n}{2}-2\right)^2 + 2l}$$

не равна целому числу. Значит, в окрестности нуля решение уравнения (10) имеет вид

$$F_l(\tau) = (C_1\tau^{\rho_1} + C_2\tau^{\rho_2})\sum_{k=0}^{\infty} a_k\tau^k$$

и для выбора ограниченного решения нужно положить $C_1 = 0$.

В окрестности второй регулярной особой точки $\tau = \lambda$ оба корня равны нулю, значит, решение уравнения (10) имеет вид ([3])

$$F_l(\tau) = (C_3 + C_4\ln|\tau-\lambda|)\tau^0\sum_{k=0}^{\infty} b_k(\tau-\lambda)^k$$

и нужно взять $C_4 = 0$, так как мы ищем ограниченное решение.

Нетрудно найти выражение всех коэффициентов b_k через $b_0 \neq 0$ и доказать сходимость полученных рядов [3]. При $\tau = \lambda$

$$F_l(\lambda) = C_3 b_0,$$

но при $\tau < \lambda$, как уже доказано, $H_l = F_l(\tau)\omega_l \equiv 0$. В силу непрерывности и единственности искомого решения $b_0 = 0$ и

$$H \equiv 0 \quad \text{при всех} \quad \tau > 0.$$

Таким образом, в случае, когда сфера вырождения находится внутри области $\mathcal{D}$, уравнение (3) имеет только нулевое решение

$$H = \sum_{l=0}^{\infty} F_l(\tau)\omega_l(X) \equiv 0.$$

Условиями (4) $n-1$ компонента решения задачи определяется единственным образом как решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре $\mathcal{D}$

$$\Delta u_j = \frac{\lambda}{x_1^2+\ldots+x_n^2}\frac{\partial H}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,\ldots,n-1.$$

Для регулярной в шаре $\mathcal{D}$ гармонической функции u_n получаем задачу о наклонной производной

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right|_\Gamma = \left.\left(-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right|_\Gamma = B(X),$$

решение которой имеет вид ([1])

$$u_n(X) = p(x_1,\ldots,x_{n-1})\phi(X), \tag{11}$$

где $\phi(X)$ — регулярная в шаре $\mathcal{D}$ гармоническая функция, которая однозначно определяется функцией $B(X)$, а $p(x_1,\ldots,x_{n-1})$ — произвольная регулярная в $\mathcal{D}$ гармоническая функция, однозначно определяемая заданием условия (5). Функция $u_n(X)$ дифференцируема в тех точках границы, в которых нормаль к Γ не ортогональна оси Ox_n.

Теорема 1. *Задача* (4), (5) *для системы* (1) *разрешима и ее решение единственно в классе функций, ограниченных на бесконечности.*

II. Рассмотрим теперь случай $\underline{R^2 < \lambda}$. При интегрировании равенства (7) по шару, квадрат радиуса которого меньше λ, первые два слагаемых в нуль не обращаются. Следовательно, функция H не равна тождественно нулю. К краевым условиям (4), (5) необходимо добавить условие для определения ненулевой функции H:

$$H|_\Gamma = \sum_{l=0}^{\infty} F_l(R)\omega_l(X) = f_{n+1}(X), \quad f_{n+1} \in C^{1,\alpha}(\Gamma). \tag{12}$$

Постановка задачи: найти регулярное в шаре $\mathcal{D}$: $\{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < R^2,$ $R^2 < \lambda\}$ ограниченное решение системы (1), удовлетворяющее на Γ: $\{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = R^2\}$ краевым условиям (4), (5), (12).

Ограниченное в окрестности нуля решение задачи Дирихле (12) для уравнения (3) имеет вид

$$H = \sum_{l=0}^{\infty} C_{2_l} \tau^{\rho_2} \omega_l \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau^k,$$

где коэффициенты C_{2_l} определяются из разложения f_{n+1} в ряд по сферическим функциям.

По известной функции H $n-1$ компонента решения поставленной задачи находится как решение неоднородных задач Дирихле (4) для уравнений Пуассона и состоит из двух слагаемых: $u_j = u_{j_1} + u_{j_2}$, $j = 1, \ldots, n-1$, где u_{j_1} удовлетворяет задаче

$$(x_1^2 + \ldots + x_n^2)\Delta u_j = 0, \quad u_j|_\Gamma = f_j, \tag{13}$$

а u_{j_2} является решением задачи

$$(x_1^2 + \ldots + x_n^2)\Delta u_j = \lambda \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad u_j|_\Gamma = 0. \tag{14}$$

Решение задачи (13) находится единственным образом в виде интеграла Пуассона, а задачи (14) — в виде потенциала объемных масс

$$u_{j_2} = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\mathcal{D}} G(X,Y) \frac{\lambda H_{y_j}}{y_1^2 + \ldots + y_n^2} dY, \tag{15}$$

где $G(X,Y)$ — функция Грина задачи Дирихле для гармонических в шаре $\mathcal{D}$ функций, исчезающая на границе и имеющая особенность порядка $2-n$. Сумма особенностей n-мерного интеграла (15) больше, чем $-n$, значит, этот интеграл сходится.

Компонента u_n, как решение неоднородной задачи о наклонной производной для уравнения Пуассона, также состоит из двух слагаемых $u_n = u_{n_1} + u_{n_2}$, где u_{n_1} удовлетворяет задаче

$$\Delta u_n = 0, \quad \left.\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right|_{\Gamma} = f_{n+1}(X) + B(X),$$

а u_{n_2} является решением задачи

$$(x_1^2 + \ldots + x_n^2)\Delta u_n = \lambda \frac{\partial H}{\partial x_n}, \quad \left.\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right|_{\Gamma} = 0.$$

Теорема 2. *При $R^2 < \lambda$ задача (4), (5), (12) для системы (1) разрешима и ее решение единственно в классе ограниченных функций.*

Литература

[1] Янушаускас А. И. Многомерные эллиптические системы с переменными коэффициентами. — Вильнюс: Мокслас, 1990.

[2] Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. — М.: ИЛ, 1963.

[3] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1941.

Статья поступила в редакцию в феврале 1996 г.