Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2014. Том 22. № 2. С. 3–8

УДК 511.42

О ЧИСЛЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЗАДАННОЙ СТЕПЕНИ И ОГРАНИЧЕННОЙ ВЫСОТЫ С МАЛОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В КОРНЕ МНОГОЧЛЕНА

В. И. Берник, Д. В. Васильев, А. С. Кудин

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: bernik@im.bas-net.by, vasilyev@im.bas-net.by, kunixd@gmail.com
Поступила 03.10.2014

Найдена зависимость между величиной производной в корне неприводимого целочисленного многочлена и количеством таких многочленов в классе многочленов заданной степени и ограниченной высоты. Основной результат улучшает известные к настоящему времени оценки. Они получены с использованием методов метрической теории трансцендентных чисел.

Пусть
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le j \le n$$
целочисленный многочлен степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = \max\limits_{0\le i\le n} |a_i|$. В теории диофантовых приближений и теории трансцендентных чисел исследуются множества действительных, комплексных и p-адических чисел, удовлетворяющие неравенствам
$$|P(x)| < H^{-w_1}, \quad |P(z)| < H^{-w_2}, \quad |P(\omega)|_p < H^{-w_3} \tag{1}$$
при $w_i > 0$, $1 \le i \le 3$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{Q}_p$, для бесконечного числа полиномов $P(t)$ из некоторого множества $\{P(t)\}$, например,
$$\mathbf{P}_n(Q) = \{P(t) \in \mathbb{Z}[t] : \ \deg P \le n, \ H(P) \le Q\}, \tag{2}$$
где $n \ge 2$, $Q \ge 1$ — натуральные числа. Множества x, z, ω, удовлетворяющие неравенствам (1), устроены, как правило, сложно. Поэтому в них вписывают или их включают в более простые — интервалы, круги, цилиндры. Естественное стремление при этом, чтобы размеры вписанных и включающих множеств были близкими друг к другу.

Условимся в обозначениях. Будем считать, что x из конечного интервала $I = [a, b]$. Через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будем обозначать корни $P(x)$, которые упорядочены так, что
$$|x - \alpha_1| \le |x - \alpha_2| \le \ldots \le |x - \alpha_n|,$$
μA — это мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$. Далее считаем $Q > Q_0(n)$ достаточно большим и $c_1 = c(n)$, $c_2, \ldots$ положительными величинами, которые могут зависеть от n, но не зависят от H и Q. При $v \ge 0$ и фиксированном корне α_1 введем множество
$$\mathbf{P}_n(Q, v) = \{P(t) \in \mathbf{P}_n(Q) : \ |P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}\}. \tag{3}$$

Обозначим через $\#M$ число элементов конечного множества M. Если полином $P(t)$ имеет кратные корни и $\alpha_1 = \alpha_2$, то полагаем $v = \infty$. Определим

$$S(\alpha_i) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - \alpha_i| = \min_{1 \le j \le n} |z - \alpha_j|\}.$$

Если $x \in \mathbb{R} \bigcap S(\alpha_1)$, то справедлива следующая лемма.

Лемма 1 [1,2]. *Из первого неравенства (1) следуют неравенства*

$$|x - \alpha_1| \le n|P(x)||P'(x)|^{-1}, \quad |x - \alpha_1| \le 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}, \tag{4}$$

$$|x - \alpha_1| < \min_{2 \le i \le n} (2^{n-i}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}|\alpha_1 - \alpha_2| \dots |\alpha_1 - \alpha_i|)^{1/i}. \tag{5}$$

Неравенства (4) и (5) показывают, что множество решений первого неравенства (1) содержится внутри интервалов вида (4) и (5). Интересно, что одно из таких неравенств оказывается точным в том смысле, что при некотором i можно поменять знак неравенства, умножив при этом правую часть на подходящую величину c_1.

Как правило, пользуются вторым неравенством в (4). Если $v \ne \infty$, то нетрудно показать, что величина производной $|P'(\alpha_1)|$ для $P(t) \in \mathbf{P}_n(Q)$ заключена в промежутке

$$c_2 Q^{-n+1} < |P'(\alpha_1)| < c_3 Q. \tag{6}$$

Если значение $|P'(\alpha_1)|$ близко к своей нижней границе, то оценка (4) оказывается грубой и не позволяет получать содержательные результаты. Естественный выход из такой ситуации предложил Р. Бейкер [3]. Он доказал, что в классе $\mathbf{P}_n(Q, v)$ число многочленов уменьшается с ростом v.

Лемма 2. *При* $0 \le v \le 1$ *имеем*

$$\#\mathbf{P}_n(Q, v) < c_4 Q^{n+1-v}, \tag{7}$$

а при $v > 1$ *справедлива оценка*

$$\#\mathbf{P}_n(Q, v) < c_5 Q^n.$$

Лемма 2 позволила Бейкеру получить при больших $w_1 > n$ точное значение размерности Хаусдорфа множества $x \in \mathbb{R}$, для которых первое неравенство (1) имеет бесконечное множество решений в полиномах $P(x)$. Задача об оценке $\#\mathbf{P}_n(Q, v)$ при $v > 1$ важна в теории диофантовых приближений и ее приложений [4, 5].

Теорема. *При* $w_1 > 2$ *и* $0 \le v \le 3/2$ *справедливо неравенство (7).*

Доказательство. Мы предложим единый метод, который позволяет получить доказательство теоремы в различных диапазонах изменения v. Возможно, он позволит получить (7) и при $v > 3/2$.

Будем считать, что $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Если $\alpha_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то можно доказать более сильный результат. Доказательство разобьем на три этапа.

Утверждение 1. *При* $0 \le v \le 1/2$ *имеем (7).*

В работах [1, 6] приведены два метода, сводящие произвольные полиномы к полиномам со старшим коэффициентом $|a_n| > c_6 H$. При таком условии нетрудно доказать, что все корни $P(x)$ ограничены, т.е. $|\alpha_j| < c_7$, $1 \le j \le n$. Ясно, что можно считать $Q/2 \le H(P) \le Q$. Поделим интервал I на равные части J_i, $\mu J_i = d_1 Q^{-1+v}$. Будем говорить, что полином $P(x)$ принадлежит интервалу J_i, если существует такая точка $x_1 \in J_i$, в которой выполняется неравенство $|P(x_1)| < Q^{-w_1}$. Если полином $P(x)$ принадлежит нескольким интервалам, то считаем, что $P(x)$ принадлежит самому левому из них. Если $x \in S(\alpha_1)$, то по лемме 1

$$|x - \alpha_1| < 2^{n-1} Q^{-w_1} |P'(\alpha_1)|^{-1} < c_8 Q^{-3+0,5} = c_8 Q^{-2,5}.$$

Так как для любых $x \in J_i$ выполняется неравенство $|x - x_1| < d_1 Q^{-1+v}$, то

$$|x - \alpha_1| \le |x - x_1| + |x - \alpha_1| < c_9 d_1 Q^{-1+v}. \tag{8}$$

Разложим полином $P(x)$ в ряд Тейлора на отрезке J_i в окрестности корня α_1

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^j.$$

Из оценок $|P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}$, $\left|\frac{1}{j!} P^{(j)}(\alpha_1)\right| < c_{10} Q$, $2 \le j \le n$, и (8) получаем

$$|P(x)| < d_1 c_{11}. \tag{9}$$

Предположим, что выполняется неравенство, противоположное (7), т.е.

$$\#\mathbf{P}_n(Q, v) \ge c_4 Q^{n+1-v}. \tag{10}$$

Тогда существует интервал J_i, которому принадлежит более $(b-a)^{-1} d_1 c_4 Q^n$ полиномов $P(x)$. Выберем d_1, чтобы выполнялось неравенство $(b-a)^{-1} d_1 c_4 > 2^{n+2}$. Тогда на интервале J_i окажется не менее $2^{n+2} Q^n$ полиномов $P(x)$, для которых верно (9). Поскольку количество значений коэффициентов $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ не превосходит $(2Q+1)^n < 2^{n+1} Q^n$, то среди многочленов $P(x)$ по принципу Дирихле найдутся два многочлена $P_2(x) \ne P_1(x)$, у которых эти n коэффициентов совпадают. Тогда для некоторого целого $b \ne 0$ при $d_1 < \frac{1}{2} c_{11}^{-1}$

$$1 \le |b| = |P_2(x) - P_1(x)| < 2 d_1 c_{11} < 1,$$

что противоречиво. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *При* $1/2 < v < 1$ *имеем (7).*

Идея доказательства утверждения 2 близка к предыдущему случаю, но технически сложнее. Поделим I на интервалы J_i длины $c_{12} Q^{-2+v}$. Тогда из (10) следует, что существуют интервалы, которым принадлежит $c_{13} Q^{n+1-v-2+v} = c_{15} Q^{n-1}$ полиномов $P(x)$.

Ясно, что при некотором $\eta \ge 0$ из (10) следует, что существует не менее $c_{14} Q^{2-v-\eta}$ интервалов J_i, каждому из которых принадлежит не менее $c_{15} Q^{n-1}$ полиномов $P(x)$. Разложим $P(x)$ и $P'(x)$ на интервале J_i и оценим их сверху

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^j,$$

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{(j-1)!} P^{(j)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^{j-1}.$$

Имеем

$$|P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}, \quad |x - \alpha_1| < 2^{n-1} Q^{-2+v}, \quad |P^{(j)}(\alpha_1)| < c_{16} Q,$$

откуда

$$|P(x)| < c_{17} Q^{-1}, \quad |P'(x)| < c_{18} Q^{1-v}. \tag{11}$$

Применим принцип ящиков Дирихле. При подходящем c_4 коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2$ не менее чем у $c_{19} Q^{\eta}$ многочленов $P(x)$ будут совпадать. Получим $c_{20} Q^{\eta}$ многочленов первой степени $R_i(x)$

$$|a_i x + b_i| = |R_i(x)| = |P_i(x) - P_1(x)|, \quad i = 2, \ldots, t, \quad t > c Q^{\eta}. \tag{12}$$

Из оценок (11) следует, что

$$|a_i x + b_i| < c_{21} Q^{-1}, \quad |a_i| < c_{22} Q^{1-v}, \quad 1 \le i \le t. \tag{13}$$

Более того, из оценки (12) для t можно улучшить в (13) оценки для $|a_i|$ и $|b_i|$ до оценок

$$\max(|a_i|, |b_i|) < c_{23} Q^{1-v-\eta}, \quad i = 1, \dots, c_{24}. \tag{14}$$

При этом можно считать, что $(a_i, b_i) = 1$. Оценки (13) могут выполняться только на интервале T_0 с центром в точке $-\dfrac{b_i}{a_i}$ длины $c_{25} Q^{-1} |a_i|^{-1} < c_{26} Q^{-2+v+\eta}$. Если два многочлена $a_1 x + b_1$ и $a_2 x + b_2$, $(a_1, b_1) = 1$, $(a_2, b_2) = 1$, $a_1 \ne a_2$ удовлетворяют (13) и (14), то необходимо выполняется неравенство

$$\left| \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} \right| \ge \frac{1}{|a_1||a_2|} > c_{27} Q^{-2+2v+2\eta},$$

что при $c_{26} < c_{27}$ противоречиво. Поэтому остается предположить, что $a_i x + b_i = a_1 x + b_1$. Это приводит к тому, что на интервале T_1 длины $c_{28} Q^{-2+2v+2\eta}$ могут находиться не более

$$c_{29} \frac{Q^{-2+2v+2\eta}}{Q^{-2+v}} = c_{29} Q^{\eta}$$

интервалов J_i. Так как число интервалов J_i на интервале I не менее $c_{30} Q^{2-v-\eta}$, то должно выполняться неравенство

$$c_{28}^{-1} Q^{2-2v-2\eta} \cdot c_{29} Q^{\eta} > c_{30} Q^{2-v-\eta},$$

которое приводит к неравенству $2 - 2v - 2\eta \ge 2 - v - \eta$ и неравенству $v \le 0$, вопреки неравенству $1/2 \le v \le 1$. Полученное противоречие доказывает утверждение 2.

Утверждение 3. *При* $1 \le v \le 3/2$ *имеем (7).*

Возьмем интервалы J_i длины Q^{-3+v}. Из (10) можно получить, что существует такое $\eta \ge 0$, что найдутся $c_{31} Q^{3-v-\eta}$ интервалов J_i, каждому из которых принадлежит не менее $c_{32} Q^{n-2+\eta}$ полиномов $P(x)$. Разложим в ряд Тейлора $P(x)$ и $P'(x)$ на J_i и оценим их сверху. Из

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^j,$$

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{(j-1)!} P^{(j)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^{j-1}$$

и оценок $|x - \alpha_1|$, $|P^{(j)}(\alpha_1)|$ сверху имеем

$$|P(x)| < c_{33} Q^{-2}, \quad |P'(x)| < c_{34} Q^{1-v}. \tag{15}$$

Дважды воспользуемся принципом ящиков Дирихле. Из того что интервалу J_i принадлежит не менее $c_{32} Q^{n-1+\eta}$ многочленов $P(x)$ следует, что у не менее $c_{35} Q^{\eta}$ многочленов $P(x)$ коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \dots, a_3$ совпадают. Образуем многочлены не более второй степени $R_j(x) = P_j(x) - P_1(x)$, $j = 2, \dots, c_{36} Q^{\eta}$. Неравенства (15) приводят к неравенствам

$$|b_{2j} x^2 + b_{1j} x + b_{0j}| = |R_j(x)| < c_{37} Q^{-2}, \quad |2b_{2j} x + b_{1j}| < c_{38} Q^{1-v}. \tag{16}$$

В (16) коэффициенты $2b_{2j}$ принимают значения в промежутке $[-2Q, 2Q]$. Поделим этот промежуток на равные части длины $c_{37} Q^{1-\eta}$. Если при этом окажется

$$c_{35} Q^{\eta} - 1 > 4Q \cdot c_{39}^{-1} Q^{\eta-1} = c_{40} Q^{1-\eta},$$

то найдется промежуток длины $c_{41}Q^{\eta}$, в котором содержится не менее двух значений коэффициентов многочленов $2b_{2j}x + b_{1j}$. Их разность даст полином $2c_{2j}x + c_{1j}$ с условиями

$$|S_j(x)| = |c_{2j}x^2 + c_{1j}x + c_{0j}| < c_{42}Q^{-2}, \quad |2c_{2j}x + c_{1j}| < c_{43}Q^{1-v}, \quad |c_{2j}| < c_{44}Q^{1-\eta}. \tag{17}$$

Второе неравенство (17) приводит к неравенству $|c_{1j}| < c_{45}Q^{1-\eta}$, а первое — к неравенству $|c_{0j}| < c_{46}Q^{1-\eta}$. Окончательно можно записать

$$|S_j(x)| < c_{47}Q^{-2}, \quad |S_j'(x)| < c_{47}Q^{1-v}, \quad H(S_j) < c_{47}Q^{1-\eta}. \tag{18}$$

Обозначим через β_1 и β_2 корни полинома $S_j(x)$. По лемме 1 первое неравенство (18) может выполняться на множестве с мерой не большей $c_{48}Q^{-2}|S'(\beta_1)|^{-1}$ и на всем интервале J_i длины Q^{-3+v}. Поэтому необходимо должно выполняться неравенство $Q^{-2}|S_j'(\beta_1)|^{-1} > > c_{49}Q^{-3+v}$ и $|S_j'(\beta_1)|^{-1} > c_{49}^{-1}Q^{1-v}$. Однако $|S_j'(\beta_1)|^2$ — это дискриминант $D(S_j)$ полинома $S_j(x)$. Неравенство $|D(S_j)| < c_{49}^{-2}Q^{2-2v}$ при $v > 1$ и достаточно большом Q может быть верным только при $D(S_j) = 0$. Это означает, что многочлен $S_j(x)$ есть квадрат линейного полинома с целыми коэффициентами, т.е.

$$S_j(x) = (d_2x + d_0)^2.$$

В этом случае из (18) имеем

$$|d_2x + d_0| < c_{50}Q^{-1}, \quad |d_2| < c_{51}Q^{\frac{1-\eta}{2}}. \tag{19}$$

Неравенства (19) могут выполняться только на интервале с мерой, не превышающей $c_{52}Q^{-1-\frac{1-\eta}{2}}$. Такой интервал может содержать не более

$$\frac{c_{52}Q^{-1-\frac{1-\eta}{2}}}{Q^{-3+v}} = c_{52}Q^{2-v-\frac{1-\eta}{2}}$$

интервалов J_i. Если $(d_0, d_2) = d \neq 1$, то можно, разделив на d, перейти к новому многочлену $\dfrac{d_2}{d}x + \dfrac{d_0}{d}$. При этом неравенства (19) сохранятся. Далее считаем $(d_0, d_2) = 1$. Пусть на интервале длины $Q^{-\lambda}$ в результате аналогичных рассмотрений появился другой многочлен $g_1x + g_0$, удовлетворяющий (19). Тогда выполняются следующие неравенства:

$$c_{51}^{-2}Q^{-1+\eta} \ll |d_2g_1|^{-1} \leq \left|\frac{d_0}{d_2} - \frac{g_0}{g_1}\right| < Q^{-\lambda}. \tag{20}$$

При $\lambda > 1 - \eta$ и достаточно большом Q неравенство (20) противоречиво. Поэтому $\lambda \leq 1 - \eta$. Мы знаем, что I принадлежит не менее $c_{31}Q^{3-v-\eta}$ интервалов J_i. Подсчитаем количество интервалов J_i другим способом. Количество интервалов длины $Q^{-\lambda}$ равно $Q^{\lambda}\mu I$. На каждом интервале длины $Q^{-1+\eta}$ может быть не более $c_{47}Q^{2-v-\frac{1-\eta}{2}}$ интервалов J_i. Таким образом, суммарное количество интервалов J_i на I не более

$$c_{47}Q^{3-v-1-\frac{1-\eta}{2}+1-\eta} = c_{47}Q^{2,5-v-\frac{\eta}{2}}.$$

Неравенство $c_{47}Q^{2,5-v-\frac{\eta}{2}} > c_{31}Q^{3-v-\eta}$ при $\eta < 1$ оказывается противоречивым. При $\eta \geq 1$ на интервале J_i можно перейти к многочленам нулевой степени и как при доказательстве утверждения 1 получить противоречие.

Литература

1. *Спринджук В.Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск: Наука и техника, 1967.
2. *Берник В.И.* Совместные приближения нуля значениями целочисленных многочленов // Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат. 1980. Т. 44. № 1. С. 24–45.
3. *Baker R.C.* Sprindzuk's theorem and Hausdorff dimension // Mathematika. 1976. V. 23. № 2. P. 184–197.
4. *Берник В.И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений // Acta Arithmetica. 1983. Т. 42. № 3. С. 219–253.
5. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка, 1984.
6. *Wirsing E.* Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades // J. Reine Angew. Math. 1960. № 206. P. 67–77.

V. I. Bernik, D. V. Vasiliev, A. S. Kudin

On the number of integral polynomials of given degree and bounded height with small value of derivative at root of polynomial

Summary

In the article are obtained upper estimations for the number of integral polynomials of arbitrarily degree and bounded height with small values of derivatives at the root of polynomials.