Ф. Сунь, С. Йи, С. Ф. Каморников, Конечные группы с обобщенно субнормальными подгруппами Шмидта,
*Сиб. матем. журн.*, 2021, том 62, номер 2, 450–456

https://www.mathnet.ru/smj7567

*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2021. Том 62, № 2*

*УДК 512.542*

# КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

**Ф. Сунь, С. Йи, С. Ф. Каморников**

**Аннотация.** Для простого числа $p$ и разбиения $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел дается описание структуры ненильпотентных конечных групп, в которых все подгруппы Шмидта $\sigma$-субнормальны.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.215

**Ключевые слова:** конечная группа, $\sigma$-субнормальная подгруппа, группа Шмидта, группа Фробениуса.

## Введение

В связи с изучением $\sigma$-субнормальных подгрупп конечных групп А. Н. Скибой была сформулирована следующая

**Проблема** [1, вопрос 4.7; 2, проблема 7.13]). *Описать конечные группы, в которых каждая подгруппа Шмидта $\sigma$-субнормальна.*

Частные аспекты этой проблемы рассматривались для разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$. В частности, в [3] доказано, что конечная группа $G$ метанильпотентна, если в ней все подгруппы Шмидта субнормальны, а в [4] установлено, что коммутант такой группы нильпотентен. Полное описание конечных групп с субнормальными подгруппами Шмидта предложено в [4].

В данной работе проблема исследуется для разбиения $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$, где $p$ — произвольное простое число. Здесь рассматривается ее ключевой случай $O_p(G) = 1$.

**Теорема 1.** *Пусть $p$ — некоторое простое число и $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$. Пусть $G$ — неединичная конечная группа с условием $O_p(G) = 1$. Если $Z_\sigma(G) = 1$, то все подгруппы Шмидта группы $G$ $\sigma$-субнормальны тогда и только тогда, когда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$G$ — примитивная группа с абелевым цоколем $N$;*

(2) *$G = [N]H$, где $H$ — $p$-разложимая максимальная подгруппа группы $G$;*

(3) *$[N]H_p$ — группа Фробениуса с ядром $N$ и циклическим дополнением $H_p$.*

Отметим, что для разбиения $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$ существуют группы $G$ такие, что все их подгруппы Шмидта $\sigma$-субнормальны и $O_p(G) \neq 1$. К таким группам, в частности, относятся группы Шмидта с нормальной силовской $p$-подгруппой.

Если конечная ненильпотентная группа $G$ $\sigma$-нильпотентна, то, очевидно, все ее подгруппы Шмидта $\sigma$-субнормальны. Для конечных групп, которые не $\sigma$-нильпотентны, справедлива

---

Исследования третьего автора выполнены при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта Ф20Р–291. The second author was supported by the Zhejiang Provintial Natural Science Foundation of China (Grant LY18A010028).

**Теорема 2.** *Пусть $p$ — простое число и $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$. Пусть $G$ — конечная группа, которая не $\sigma$-нильпотентна. Если $O_p(G) = 1$, то все подгруппы Шмидта группы $G$ $\sigma$-субнормальны тогда и только тогда, когда группа $G/Z_\sigma(G)$ имеет строение, описанное в теореме* 1.

Концепция $\sigma$-субнормальной подгруппы, развивающая идею субнормальной подгруппы из [5], предложена А. Н. Скибой в [1]. Эта концепция базируется на следующих определениях.

Пусть $\sigma$ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел на попарно не пересекающиеся подмножества $\sigma_i$ $(i \in I)$, т. е. $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Следуя [1], будем говорить, что группа $G$ *$\sigma$-примарна*, если $G$ является $\sigma_i$-группой для некоторого $i \in I$. Группа $G$ называется *$\sigma$-разрешимой*, если каждый ее главный фактор является $\sigma$-примарной группой.

Подгруппа $H$ группы $G$ называется *$\sigma$-субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа $H_{i-1}$ нормальна в $H_i$, либо группа $H_i / \operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ $\sigma$-примарна. Понятно, что подгруппа $H$ субнормальна в $G$ тогда и только тогда, когда она $\sigma$-субнормальна в $G$ для *минимального* разложения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$.

Ключом к доказательству теорем 1 и 2 является основная теорема из [6], которая, отвечая на вопрос 19.85 из [7], устанавливает цикличность фактор-группы $G/Z_\sigma(G)$ в случае, когда все подгруппы Шмидта конечной группы $G$ $\sigma$-субнормальны.

## 1. Определения и используемые результаты

Рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [8]. Что касается терминологии и результатов теории $\sigma$-субнормальных подгрупп, то отсылаем читателя к работе [1], которая в лемме 2.6 содержит основные (инвариантность в подгруппах и при гомоморфизмах) и решеточные свойства $\sigma$-субнормальных подгрупп, а также описывает их связь с $\sigma$-нильпотентным радикалом группы.

Будем использовать следующие обозначения:

если $p$ — некоторое число, то $G_p$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$, а $G_{p'}$ — холлова $p'$-подгруппа из $G$;

$[A]B$ — полупрямое произведение подгрупп $A$ и $B$ (с нормальной подгруппой $A$);

$\mathfrak{N}_\sigma$ — класс всех $\sigma$-нильпотентных групп (группа $G$ называется *$\sigma$-нильпотентной*, если она является прямым произведением некоторых $\sigma$-примарных групп, т. е. $G$ представима в виде прямого произведения своих холловых $\sigma_i$-подгрупп для некоторых $i \in I$; в случае $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$ группа $G$ $\sigma$-нильпотентна тогда и только тогда, когда она *$p$-разложима*, т. е. $G = G_p \times G_{p'}$);

$G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ — *$\sigma$-нильпотентный корадикал* группы $G$, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы $G$, фактор-группа по которой $\sigma$-нильпотентна;

$F_\sigma(G)$ — *$\sigma$-подгруппа Фиттинга* группы $G$ (наибольшая нормальная $\sigma$-нильпотентная подгруппа группы $G$; если $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$, то, очевидно, $F_\sigma(G) = O_p(G) \times O_{p'}(G)$).

Главный фактор $H/K$ группы $G$ называется *$\sigma$-центральным* (в $G$), если полупрямое произведение $[H/K](G/C_G(H/K))$ является $\sigma$-примарной группой, в противном случае он называется *σ-эксцентральным* (в $G$). Из определения следует, что если $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$, то главный фактор $H/K$ группы $G$ $\sigma$-центральный тогда и только тогда, когда либо $H/K$ — $p$-группа и $G/C_G(H/K)$ — $p$-группа, либо $H/K$ — $p'$-группа и $G/C_G(H/K)$ — $p'$-группа. Если, кроме того, группа $G$ $\sigma$-разрешима, то главный фактор $H/K$ группы $G$ $\sigma$-централен для $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$ тогда и только тогда, когда либо $H/K$ — $p$-группа и $C_G(H/K)$ содержит холлову $p'$-подгруппу группы $G$, либо $H/K$ — $p'$-группа и $C_G(H/K)$ содержит силовскую $p$-подгруппу группы $G$.

Нормальная подгруппа $E$ группы $G$ называется *σ-гиперцентральной* (в $G$), если либо $E = 1$, либо каждый главный фактор группы $G$, расположенный ниже $E$, является $\sigma$-центральным (в $G$). Через $Z_\sigma(G)$ обозначается произведение всех нормальных $\sigma$-гиперцентральных подгрупп группы $G$. Простая проверка показывает, что подгруппа $Z_\sigma(G)$ также $\sigma$-гиперцентральна в $G$. Подгруппа $Z_\sigma(G)$ называется *σ-гиперцентром* группы $G$. Ключевые свойства $\sigma$-гиперцентра группы $G$ описаны в предложении 2.5 из [9].

Конечные ненильпотентные группы, все собственные подгруппы которых нильпотентны, впервые исследовались в [10] и впоследствии получили название *групп Шмидта* (их также называют *$\mathfrak{N}$-критическими группами*, где $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп). Большой интерес исследователей (см., например, обзор [11]) к группам Шмидта обусловлен существованием их в любой конечной ненильпотентной группе и использованием в решении целого ряда классификационных задач теории групп и их классов.

В [10] установлено, что если $G$ — группа Шмидта, то

— $G$ бипримарна, т. е. $\pi(G) = \{p, q\}$;

— силовская $p$-подгруппа $G_p$ нормальна в $G$;

— $G_q = \langle x\rangle$ — циклическая группа;

— $\langle x^q\rangle = O_q(G) \subseteq Z(G)$;

— $|G_p/\Phi(G_p)| = p^m$, где $m$ — показатель числа $p$ по модулю $q$.

Следуя [3], группу Шмидта с нормальной силовской $p$-подгруппой и ненормальной циклической силовской $q$-подгруппой будем называть *$S_{\langle p,q\rangle}$-группой*. Для $S_{\langle p,q\rangle}$-группы $S$ будем использовать запись $S = [S_p]S_q$, где $S_p$ — нормальная силовская $p$-подгруппа, а $S_q$ — циклическая ненормальная силовская $q$-подгруппа.

В [12–14] установлены другие интересные свойства группы Шмидта. Таким образом, структура групп Шмидта хорошо известна. Поэтому далее будем опираться на свойства $\mathfrak{N}$-критических групп без дополнительных ссылок на литературные источники.

## 2. Доказательство теоремы 1

Необходимость. Пусть $G$ — неединичная группа, $O_p(G) = 1$, $Z_\sigma(G) = 1$ и все подгруппы Шмидта группы $G$ $\sigma$-субнормальны. Покажем, что $G$ — примитивная группа с абелевым цоколем $N$; $G = [N]H$, где $H$ — $p$-разложимая максимальная подгруппа группы $G$; $[N]H_p$ — группа Фробениуса с ядром $N$ и циклическим дополнением $H_p$.

Доказательство проведем в виде последовательности утверждений, сохраняя в каждом из них обозначения предыдущих утверждений. Отметим, что из $G \neq 1$ и $Z_\sigma(G) = 1$ ввиду предложения 2.5 из [9] группа $G$ не нильпотентна. Поэтому в $G$ имеется по крайней мере одна подгруппа Шмидта.

**Утверждение 1.** $\Phi(G) = 1$.

Предположим, что $\Phi = \Phi(G) \neq 1$. Пусть $N$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $\Phi$. Тогда $N$ — элементарная абелева $r$-группа для некоторого простого числа $r$. Поскольку $O_p(G) = 1$, то $r \neq p$. Так как $Z_\sigma(G) = 1$, то $C_G(N)$ не содержит силовской $p$-подгруппы $G_p$ группы $G$. Следовательно, найдется $p$-элемент $x \in G$, который не централизует $N$. Тогда $N\langle x\rangle$ — ненильпотентная группа. Пусть $V$ — подгруппа Шмидта, содержащаяся в $N\langle x\rangle$. Тогда $V$ — $S_{\langle r,p\rangle}$-группа и $V_r \subseteq N$. Ввиду леммы 2.6 из [1] подгруппа $VN/N$ $\sigma$-субнормальна в $G/N$. Так как $VN/N$ — $p$-подгруппа, по лемме 2.6 из [1] $VN/N \subseteq F_\sigma(G/N) = O_p(G/N) \times O_{p'}(G/N)$. Следовательно, $VN/N \subseteq O_p(G/N)$. По лемме 4.4 из [15] подгруппа $V$ нильпотентна; противоречие. Итак, $\Phi(G) = 1$.

**Утверждение 2.** $\mathrm{Soc}(G)$ — *абелева группа.*

Предположим, что группа $G$ содержит неабелеву минимальную нормальную подгруппу $N$. Тогда ввиду леммы 6 из [6] $N$ является $p'$-подгруппой. Рассмотрим подгруппу $NG_p$, где $G_p$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$. Так как $Z_\sigma(G) = 1$, то $C_G(N)$ не содержит $G_p$. Следовательно, найдется элемент $z \in G_p$, который не централизует $N$. Тогда $N\langle z\rangle$ — ненильпотентная группа. Пусть $S$ — подгруппа Шмидта, содержащаяся в $N\langle z\rangle$. Тогда $S$ — $S_{\langle r,p\rangle}$-группа и $S_r \subseteq N$. Ввиду леммы 2.6 из [1] подгруппа $S$ $\sigma$-субнормальна в $NS$, а значит, по лемме 3.1.5 из [16] подгруппа $S^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормальна в $NS$. Так как $S^{\mathfrak{N}_\sigma} \subseteq N$, то $O_r(N) \neq 1$, что невозможно ввиду неабелевости подгруппы $N$. Следовательно, все минимальные нормальные подгруппы группы $G$ абелевы.

**Утверждение 3.** *В группе $G$ существует самонормализуемая подгруппа $H$ такая, что $G = [F(G)]H$. При этом $F(G) = \mathrm{Soc}(G)$.*

Пусть $F = F(G)$. Поскольку ввиду утверждения 1 $\Phi(G) = 1$, по лемме 7.9 из [15] $F$ является прямым произведением абелевых минимальных нормальных подгрупп группы $G$. Кроме того, в $G$ найдется подгруппа $H$ такая, что $G = [F]H$ и $F \cap H = 1$. Пусть $K = N_G(H)$. Допустим, что $K \neq H$. Тогда $K = H(F\cap K) = H \times (F\cap K)$ и $(F\cap K) \neq 1$. Отсюда в силу $G = \langle F, H\rangle \subseteq C_G(F\cap K)$ имеем, что $Z(G) \neq 1$, откуда следует $Z_\sigma(G) \neq 1$; противоречие с условием теоремы. Следовательно, $H = N_G(H)$. Отметим, что ввиду утверждения 2 все минимальные нормальные подгруппы группы $G$ абелевы. Поэтому $F(G) = \mathrm{Soc}(G)$.

**Утверждение 4.** *$F_\sigma(G) = O_{p'}(G)$ — холлова $p'$-подгруппа группы $G$ и $H_p$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$.*

Так как $O_p(G) = 1$, то $F_\sigma(G) = O_{p'}(G)$. Поэтому ввиду [6] $G/O_{p'}(G)$ — циклическая группа. Отсюда следует, в частности, что группа $G/O_{p'}(G)$ $p$-разложима. Но тогда $O_{p'}(G)$ — холлова $p'$-подгруппа группы $G$. Тот факт, что $H_p$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$, следует из условия $O_p(G) = 1$.

**Утверждение 5.** *Дополнение $H$ к подгруппе $F(G)$ в группе $G$ является $p$-разложимой группой.*

Ввиду утверждения 4 $F_\sigma(G) = O_{p'}(G)$ и $F_\sigma(G)$ — холлова $p'$-подгруппа группы $G$. Следовательно, $H \cap F_\sigma(G)$ — нормальная холлова $p'$-подгруппа группы $H$. Предположим, что силовская $p$-подгруппа $H_p$ группы $H$ не нормальна в $H$. Тогда найдется элемент $u \in H_p$, который не централизует $H \cap F_\sigma(G)$. Следовательно, $(H \cap F_\sigma(G))\langle u\rangle$ — ненильпотентная группа. Пусть $S$ — $S_{\langle r,p\rangle}$-подгруппа, содержащаяся в $(H \cap F_\sigma(G))\langle u\rangle$. По условию подгруппа $S$ $\sigma$-субнормальна в $G$, а значит, по лемме 3.1.5 из [16] подгруппа $S^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормальна в $G$. Так как $S^{\mathfrak{N}_\sigma}$ — $r$-подгруппа, $S^{\mathfrak{N}_\sigma} \subseteq O_r(G)$. Поэтому

$1 \neq S^{\mathfrak{N}_\sigma} \subseteq H \cap O_r(G) \subseteq H \cap F(G)$, что невозможно ввиду утверждения 3. Следовательно, подгруппа $H$ $p$-разложима.

**Утверждение 6.** *Силовская $p$-подгруппа группы $G$ циклическая.*

Если $G_p$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$, то ввиду утверждения 5 $G_p \simeq G/F_\sigma(G)$. По теореме из [6] $G_p$ — циклическая группа.

**Утверждение 7.** *Если $H_p$ — силовская $p$-подгруппа из $H$, то $C_G(H_p) = H$. В частности, для любой минимальной нормальной подгруппы $N$ группы $G$ подгруппа $NH_p$ содержит по крайней мере одну подгруппу Шмидта с ненормальной силовской $p$-подгруппой.*

По утверждению 5 подгруппа $H$ является $p$-разложимой группой. Поэтому $H \subseteq C_G(H_p)$. Предположим, что $H \subset C_G(H_p)$. Тогда

$$C_G(H_p) = H(F \cap C_G(H_p)) = H \times (F \cap C_G(H_p))$$

и $F \cap C_G(H_p) \neq 1$. Отсюда в силу $G = \langle F, H\rangle \subseteq G_G(F \cap C_G(H_p))$ имеем $Z(G) \neq 1$. Пришли к противоречию с тем, что $Z_\sigma(G) = 1$. Следовательно, $C_G(H_p) = H$.

**Утверждение 8.** *Если $S$ — $S_{\langle q,p\rangle}$-подгруппа группы $G$, то $|S_p| = p$.*

Предположим, что $|S_p| = p^k$ и $k > 1$. Пусть $T$ — подгруппа из $S$, имеющая порядок $p^{k-1}$. Тогда из свойств групп Шмидта следует, что подгруппа $S_qT$ нильпотентна и нормальна в $S$. Так как $S$ $\sigma$-субнормальна в $G$, то $T$ также $\sigma$-субнормальна в $G$. По лемме 2.6 из [1] $T \subseteq O_p(G)$, что невозможно ввиду утверждения 4. Следовательно, $k = 1$ и $|S_p| = p$.

**Утверждение 9.** *Если $S$ — $S_{\langle q,p\rangle}$-подгруппа группы $G$, то $S = O^{p'}(F(G)S)$. В частности, $S$ нормальна в $G$ и $S_q$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$.*

Ввиду леммы 2.6 из [1] подгруппа $S$ $\sigma$-субнормальна в $F(G)S$. Поэтому по определению существует цепь подгрупп $S = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_n = F(G)S$ такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа $S_{i-1}$ нормальна в $S_i$, либо $S_i/\operatorname{Core}_{S_i}(S_{i-1})$ является $p$-группой, либо $S_i/\operatorname{Core}_{S_i}(S_{i-1})$ — $p'$-группа. Предположим, что $S_i/\operatorname{Core}_{S_i}(S_{i-1})$ является $p$-группой. Тогда из $|(F(G)S)|_p = p$ следует, что $\operatorname{Core}_{S_i}(S_{i-1})$ является холловой $p'$-подгруппой в $S_i$. Однако это невозможно, так как индекс $S_{i-1}$ в $S_i$ является $p'$-числом. Таким образом, для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа $S_{i-1}$ нормальна в $S_i$, либо $S_i/\operatorname{Core}_{S_i}(S_{i-1})$ — $p'$-группа.

Если подгруппа $S_{i-1}$ нормальна в $S_i$, то по утверждению 8 из $|(F(G)S)|_p = |S_p| = p$ следует, что $S_i/S_{i-1}$ — $p'$-группа. Следовательно, $O^{p'}(S_i) \subseteq S_{i-1}$.

Итак, имеем субнормальную цепь

$$O^{p'}(S_0) \subseteq O^{p'}(S_1) \subseteq \dots \subseteq O^{p'}(S_{n-1}) \subseteq O^{p'}(S_n) \subseteq F(G)S$$

такую, что $O^{p'}(S_i)/O^{p'}(S_{i-1})$ — $p'$-группа для каждого $i = 1, 2, \dots, n$. По лемме 3.1.7 из [16] $O^{p'}(S) = O^{p'}(F(G)S)$. Отсюда и из того, что подгруппа $F(G)S$ характеристична в $F(G)H_p$, а подгруппа $F(G)H_p$ характеристична в $G$, следует нормальность подгруппы $O^{p'}(S)$ в группе $G$.

Предположим, что $O^{p'}(S) \subset S$. Так как $S$ — группа Шмидта, подгруппа $O^{p'}(S)$ нильпотентна. Отсюда следует, что $1 \neq S_p \subseteq O_p(G)$. Пришли к противоречию с тем, что $O_p(G) = 1$. Следовательно, $S = O^{p'}(S)$, а значит, и $S$ — нормальная подгруппа группы $G$. Поскольку $\Phi(G) = 1$, из свойств групп Шмидта следует, что $S_q$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$.

**Утверждение 10.** *Группа $G$ примитивна.*

Предположим, что кроме $S_q = N$ в $G$ существует еще одна минимальная нормальная подгруппа $L$, отличная от $S_q$. Тогда $L$ — $r$-группа для некоторого простого $r$, отличного от $p$. Ввиду утверждения 7 подгруппа $LH_p$ содержит по крайней мере одну $S_{\langle r,p\rangle}$-подгруппу $D$ с ненормальной силовской $p$-подгруппой $D_p$. Из утверждений 8 и 9 следует, что $|D_p| = p$, $L = D_r$ и $D \trianglelefteq G$. Так как $L$ не содержится в $S$, ввиду леммы 3 из [4] произведение $SD$ содержит некоторую несубнормальную $S_{\langle q,p\rangle}$-подгруппу, что противоречит утверждению 9. Таким образом, $N$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G$, т. е. $G$ — примитивная группа с цоколем $N$.

**Утверждение 11.** *$NH_p$ — группа Фробениуса с ядром $N$ и циклическим дополнением $H_p$.*

Пусть $g \in NH_p \setminus H_p$ и $A = H_p \cap H_p^g$. Допустим, что $A \neq 1$. Тогда из цикличности подгруппы $H_p$ следует, что $\langle H_p, H_p^g \rangle \subseteq C_G(A)$. Отсюда и из максимальности $H_p$ в $NH_p$ имеем $C_G(A) = NH_p$, что противоречит примитивности группы $G$. Следовательно, $NH_p$ — группа Фробениуса.

Достаточность. Пусть $G$ — неединичная группа, $O_p(G) = 1$ и $Z_\sigma(G) = 1$. Пусть, кроме того, $G$ — примитивная группа с абелевым цоколем $N$; $G = [N]H$, где $H$ — $p$-разложимая максимальная подгруппа группы $G$; $[N]H_p$ — группа Фробениуса с ядром $N$ и циклическим дополнением $H_p$.

Покажем, что все подгруппы Шмидта группы $G$ $\sigma$-субнормальны.

Пусть $S$ — некоторая подгруппа Шмидта группы $G$. Если $(|S|, p) = 1$, то $S$ содержится в холловой $p'$-подгруппе группы $G$, которая, очевидно, нормальна в $G$. По определению подгруппа $S$ $\sigma$-субнормальна в $G$.

Следовательно, $|S|$ делится на $p$. Так как $O_p(G) = 1$, то $N$ — $q$-группа для простого $q$, отличного от $p$. Кроме того, поскольку подгруппа $H$ $p$-разложима, а подгруппа $S$ бипримарна, $SN/N$ — нильпотентная группа. Поэтому нильпотентный корадикал $S^{\mathfrak{N}}$ подгруппы $S$ содержится в $N$. Ввиду теоремы 26.1 из [15] справедливо равенство $S^{\mathfrak{N}} = S_q$. Следовательно, $S_q \subseteq N$. Так как $NH_p/N$ — нормальная силовская $p$-подгруппа группы $G/N$, то $S \subseteq NH_p$. Из строения подгруппы Шмидта $S$ и группы Фробениуса $NH_p$ следует, что $S_q = N$. Тогда $S/N \trianglelefteq G/N$, а значит, подгруппа $S$ нормальна в $G$.

Теорема доказана.

## 3. Доказательство теоремы 2

Необходимость. Пусть $O_p(G) = 1$, и пусть в группе $G$, которая не $\sigma$-нильпотентна, все подгруппы Шмидта $\sigma$-субнормальны. Положим $Z = Z_\sigma(G)$. По лемме 5 из [6] все подгруппы Шмидта группы $\overline{G} = G/Z$ $\sigma$-субнормальны. Кроме того, ввиду предложения 2.5 из [9] $Z_\sigma(\overline{G}) = 1$ и $O_p(\overline{G}) = 1$. Отметим, что группа $\overline{G}$ не является единичной. По теореме 1 выполняются следующие утверждения:

1) $\overline{G}$ — примитивная группа с абелевым цоколем $\overline{N}$;
2) $\overline{G} = [\overline{N}]\overline{H}$, где $\overline{H}$ — $p$-разложимая максимальная подгруппа группы $\overline{G}$;
3) $[\overline{N}]\overline{H}_p$ — группа Фробениуса с ядром $\overline{N}$ и циклическим дополнением $\overline{H}_p$.

Достаточность. Пусть группа $G$ не является $\sigma$-нильпотентной, а группа $G/Z$, где $Z = Z_\sigma(G)$, имеет строение, описанное в теореме 1. Пусть $S$ — некоторая подгруппа Шмидта группы $G$. Если $S \subseteq Z_\sigma(G)$, то, очевидно, $S$ $\sigma$-субнормальна в $G$. Если $S$ не содержится в $Z_\sigma(G)$, то ввиду предложения 2.5 из [9] $S$ $\sigma$-субнормальна в $SZ_\sigma(G)$. Кроме того, из строения группы $G/Z$ следует, что подгруппа $SZ/Z$ $\sigma$-субнормальна в $G/Z$. Отсюда ввиду леммы 2.6 из [1] подгруппа $S$ $\sigma$-субнормальна в группе $G$.

Теорема доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Skiba A. N.* On $\sigma$-subnormal and $\sigma$-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.

**2.** *Skiba A. N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups // Commun. Math. Stat. 2016. V. 4, N 3. P. 281–309.

**3.** *Монахов В. С., Княгина И. Н.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.

**4.** *Ведерников В. А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 669–687.

**5.** *Wielandt H.* Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen // Math. Z. 1939. Bd 45. S. 209–244

**6.** *Yi X., Kamornikov S. F.* Finite groups with $\sigma$-subnormal Schmidt subgroups // J. Algebra. 2020. V. 560. P. 181–191.

**7.** *Нерешенные вопросы теории групп*: Коуровская тетрадь Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2018.

**8.** *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

**9.** *Hu B., Huang J., Skiba A. N.* Characterizations of finite $\sigma$-nilpotent and $\sigma$-quasinilpotent groups // Bull. Malays. Math. Soc. 2019. V. 42, N 5. P. 2091–2104.

**10.** *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3. С. 366–372.

**11.** *Шеметков Л. А.* О. Ю. Шмидт и конечные группы // Укр. мат. журн. 1971. Т. 23, № 5. С. 585–590.

**12.** *Гольфанд Ю. А.* О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 8. С. 1313–1315.

**13.** *Redei L.* Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen // Publ. Math., Debrecen. 1956. N 4. P. 303–324.

**14.** *Мазуров В. Д., Сыскин С. А.* О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 2. С. 217–222.

**15.** *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

**16.** *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Мн.: Белорусская наука, 2003.



*Поступила в редакцию 10 сентября 2020 г.*
*После доработки 29 октября 2020 г.*
*Принята к публикации 18 ноября 2020 г.*



Sun Fenfen (Сунь Фенфен)
Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China
(Чжэцзянский политехнический университет, Ханчжоу, Китай)
sun4624@163.com

Yi Xiaolan (Йи Сяолан)
Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China
(Чжэцзянский политехнический университет, Ханчжоу, Китай)
yixiaolan2005@126.com

Каморников Сергей Федорович
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru