Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 4, 1977, 90—91.

УДК 513.88

О РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М. Г. Любарский

1. В заметке рассматриваются линейные расширения топологических групп преобразований (т.г.п.). Полученный результат применяется к системам линейных однородных дифференциальных уравнений.

Определение. Т.г.п. (X, G) является *линейным расширением* *) т.г.п. (Y, G), если (I) $X = E_n \times Y$ (E_n — n-мерное пространство Евклида); (II) топология в X совпадает с топологией произведения; (III) преобразования из G действуют в X по правилу

$$g(r, y) = (A_y(g)\, r,\ gy) \qquad (g \in G,\ r \in E_n,\ y \in Y),$$

где $A_y(g) : E_n \to E_n$ — линейный оператор.

Пример. Пусть $y(t)$ — матрица-функция размерности $n \times n$, непрерывная на числовой оси I. Определим пространство Y как замыкание (в топологии равномерной сходимости на каждом компакте) множества функций $\{y_\tau(t) = y(t+\tau)\}_{\tau \in I}$. Т.г.п. (Y, I), где $ty(\tau) = y(t+\tau)$ для всех $t \in I$ и $y \in Y$, называется *системой Бебутова*.

Пусть $A_y(t)$ $(y \in Y)$ — матрица Коши уравнения

$$\dot{r}_t = y(t)\, r(t). \tag{1}$$

Тогда преобразования $t(r, y) = (A_y(t)\, r,\ ty)$ $(t \in I,\ r \in E_n,\ y \in Y)$ образуют т.г.п. пространства $X = E_n \times Y$, являющуюся линейным расширением системы Бебутова.

2. Известно, что для любого скалярного произведения в E_n линейный оператор $A : E_n \to E_n$ однозначно представим в виде $A = S \cdot U$, где $S^* = S$, $S \geqslant 0$, $U^* = U^{-1}$.

Линейный оператор $A_y(g)$ $(y \in Y,\ g \in G)$ задает, таким образом, положительный самосопряженный оператор $S_y(g)$. Фиксируя $y \in Y$, определим на траектории $\{gy\}_{g \in G}$ оператор $S(\tilde{y})$ так: пусть $\tilde{g} \in G$ и $\tilde{y} = \tilde{g}y$, положим $S(\tilde{y}) = S_y(\tilde{g})$.

Отметим, что в случае периодической траектории оператор $S(\tilde{y})$, вообще говоря, определен неоднозначно.

Теорема 1. *Пусть т.г.п. (X, G) является линейным расширением т.г.п. $Y, G)$ и для некоторого $y \in Y$ выполнено*

$$\sup_{g \in G} \| A_y^{\pm 1}(g) \| < +\infty.$$

Тогда в E_n существует такое скалярное произведение, что оператор $S(\tilde{y})$ определен однозначно на траектории $\{gy\}_{g \in G}$ и непрерывно зависит от $\tilde{y}$. Если, кроме того, (Y, G) — минимальная т.г.п., то оператор $S(\tilde{y})$ однозначно доопределяется на все пространство Y как непрерывная функция.

3. Условимся, что символ Pr означает одно из перечисленных свойств: устойчивость по Пуассону, рекуррентность, N-почти периодичность, почти автоморфность, почти периодичность, периодичность.

Следующее утверждение доказывается применением теоремы 1 к линейному расширению, описанному в примере п. 1.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) *с матрицей коэффициентов $y(t)$, удовлетворяющей* Pr, *имеет только ограниченные, отделенные от нуля решения*:

$$0 < \inf_{t \in I} \| r(t) \|, \qquad \sup_{t \in I} \| r(t) \| < +\infty.$$

Тогда с помощью линейной замены, удовлетворяющей Pr, *уравнение* (1) *приводится к линейному, однородному дифференциальному уравнению, матрица коэффициентов которого обладает* Pr *и антисимметрична. Матрица Коши этого уравнения соответственно унитарна.*

Замечание. При $n = 1$ получаем новое доказательство утверждения: неопределенный интеграл от функции, удовлетворяющей Pr, обладает также Pr, если он ограничен (см. [2], [3]).

---

*) В терминологии работы [1] — однородным, конечномерным, линейным расширением-произведением.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Функциональный анализ и его приложения», 1977

При $n = 2$ решения уравнения (1) выражаются через функции, обладающие Pr, и неопределенный интеграл от функции с этим свойством. Например, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если все решения скалярного уравнения второго порядка* $\ddot{r} = y(t)\, r$ *ограничены и вещественная функция* $y(t)$ *обладает* Pr, *то общее решение имеет вид*

$$r(t) = c_1 \cos\left(\int_0^t x(\tau)\, d\tau + c_2\right) \cdot (x(t))^{-1/2},$$

где $x(t)$ — *функция, обладающая* Pr, *а* c_1 *и* c_2 — *произвольные постоянные.*

Последнее утверждение обобщает одну теорему П. Боля [4].

4. Говорят, что уравнение (1) удовлетворяет *условию разделенности*, если для всех $y \in Y$ (см. пример п. 1) каждое ограниченное решение уравнения (1) отделено от нуля.

Назовем уравнение (1) *лиувиллевским*, если $\operatorname{sp} y(t) \equiv 0$. (Путем замены искомой функции каждое уравнение может быть приведено к лиувиллевскому виду.)

Для доказательства следующего утверждения типа теоремы Флоке — Ляпунова решающим является применение теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть уравнение* (1) *с вещественной почти периодической матрицей* $y(t)$ *размерности* 2×2 *удовлетворяет условию разделенности после приведения его к лиувиллевскому виду. Тогда матрица Коши этого уравнения представима в виде*

$$A(t) = Q(t) \exp\left\{P \int_0^t [\varphi(\tau) - \varphi_0]\, d\tau\right\} \exp\{P\varphi_0 t\},$$

где (I) *матрица* Q *и функция* φ *почти периодические*; (II) *матрица* P *постоянная и подобна матрицам*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

когда размерность пространства ограниченных решений уравнения соответственно равна 2, 1, 0; (III) φ_0 — *среднее от функции* $\varphi(t)$; (IV) *модуль частот функции* φ *содержится в* M_y — *модуле частот матрицы* $y(t)$, *а модуль частот матрицы* Q *содержится в модуле, натянутом на* M_y *и некоторое число* ω *такое, что* $2\omega \in M_y$.

Замечание. В периодическом случае теорема 4 совпадает с теоремой Флоке — Ляпунова при $n = 2$. Расширение модуля частот матрицы Q приводит в этом случае к тому, что матрица Q, вообще говоря, имеет удвоенный по сравнению с матрицей коэффициентов период (см., например, [5], теорема Флоке — Ляпунова, случай вещественных коэффициентов).

Автор благодарен Б. Я. Левину за постоянное внимание к работе и полезные замечания.

Физико-технический институт
АН УССР

Поступило в редакцию
22 декабря 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштейн И. У., Расширения минимальных групп преобразований, Кишинев, «Штиинца», 1975. 2. Левитан Б. М., Почти периодические функции, М., Гостехиздат, 1953. 3. Болес Басит Р., Матем. заметки 9, № 3 (1971), 311—315. 4. Bohl P., Crelles J. **131** (1906), 268—321. 5. Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., «Наука», 1972.