V. P. Orevkov, On biconjunctive reduction classes, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1971, Volume 20, 170–174

В.П.Оревков

О БИКОНЪЮНКТИВНЫХ КЛАССАХ СВЕДЕНИЯ *)

Ниже посредством C будем обозначать классическое исчисление предикатов без функциональных знаков и без равенства. Б и к о н ъ ю н к т и в н ы м и формулами будем называть формулы исчисления C, имеющие вид

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \left(\bigvee_{i=1}^{\ell} \left(\mathop{\&}_{j=1}^{\delta_i} F_{i,j} \right) \right),$$

где $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n$ — префикс, $\delta_i \leqslant 2$ и $F_{i,j}$ - элементарные формулы или их отрицания.

Из результатов работы [1] вытекает, что класс биконъюнктивных формул, имеющих префикс $\exists x \forall y_1 y_2 \ldots y_{a+1} \exists z$ и содержащих только двухместные предикатные переменные, является классом сведения по выводимости. Здесь a — число букв в алфавите Tag—системы, построенной в работе [2] (теорема 5). Проблема остановки для этой Tag-системы алгорифмически неразрешима **).

Целью настоящей заметки является усиление упомянутого результата М.Р.Крома в плане сокращения длины префикса, в плане ограничения числа двухместных предикатных переменных за счет использования одноместных предикатных переменных и в плане ограничения числа двухместных предикатных переменных за счет отказа от фиксированной длины префикса.

Для каждого натурального r рассмотрим следующие четыре класса замкнутых биконъюнктивных формул исчисления C:

класс A_r — класс формул, имеющих префикс $\exists x \forall y_0 y_1 \exists z$,

---

*) Основные результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по математической логике 2I мая 1970 г.

**) Вместо Tag-системы, построенной в работе [2], можно также взять Tag-систему с двумя состояниями из работы [3], п.7, следствие 2.

содержащих τ двухместных и любое число одноместных предикатных переменных и не содержащих других предикатных переменных;

класс $Б_\tau$ - класс формул, имеющих префикс $\forall y_0 \exists x \forall y_1 \exists z$ содержащих τ двухместных и любое число одноместных предикатных переменных и не содержащих других предикатных переменных;

класс $В_\tau$ —класс формул, имеющих префикс вида $\forall y_0 y_1 \ldots \ldots y_k \exists x \forall y \exists z$ содержащих $\tau+1$ двухместную предикатную переменную и не содержащих других предикатных переменных;

класс $Г_\tau$ - класс формул, имеющих префикс вида $\exists x \forall y_0 y_1 \ldots \ldots y_k \exists z$, содержащих $\tau+2$ двухместных предикатных переменных и не содержащих других предикатных переменных.

Теорема I. Можно построить такое натуральное число τ, что множество формул, выводимых в исчислении C и принадлежащих классу $\mathcal{L}$, эффективно неотделимо[ж)] от множества формул, принадлежащих $\mathcal{L}$ и опровержимых на конечных моделях, где $\mathcal{L}$ -любой из классов $А_\tau$, $Б_\tau$, $В_\tau$, $Г_\tau$.

Из теоремы I вытекает алгорифмическая неразрешимость как проблемы выводимости в исчислении C, так и проблемы опровержимости на конечных моделях для каждого из классов $А_\tau$, $Б_\tau$, $В_\tau$, $Г_\tau$. Уточним этот результат.

Класс π формул исчисления C будем называть классом консервативного сведения по выводимости[жж)], если можно построить такой алгорифм φ, что для любой формулы A исчисления C выполняются следующие условия:

а) алгорифм φ перерабатывает формулу A в формулу из класса π;

б) формула A тогда и только тогда выводима в исчислении C, когда в этом же исчислении выводима формула $\varphi(A)$;

ж) См., например, [4], стр. 217.

жж) Ср. [5], стр. 301.

в) формула A тогда и только тогда опровержима на конечной модели, когда на конечной модели опровержима формула $\varphi(A)$.

Теорема 2. Можно построить такое натуральное число τ, что каждый из классов $А_\tau$, $Б_\tau$, $В_\tau$, $Г_\tau$ является классом консервативного сведения.

Эта теорема вытекает из приведенной выше теоремы I, теоремы 4 пункта I0.3 и теоремы 2 пункта I0.2 книги [4].

Наметим план доказательства теоремы I. Мы будем использовать некоторые понятия и обозначения из § I5 книги [4].

Будем говорить, что двухленточная машина Минского $\mathfrak{M}$ перерабатывает натуральное число n в нулевую заключительную конфигурацию, если машина $\mathfrak{M}$ из начальной конфигурации $(n, 0; q_1)$ перейдет в заключительную конфигурацию $(0, 0; q_0)$, где q_0, q_1 - соответственно заключительное и начальное состояние машины $\mathfrak{M}$.

Построим, воспользовавшись теоремой 2 из пункта I5.2 книги [4], двухленточную машину Минского $\mathfrak{M}'$, такую что множество натуральных чисел, перерабатываемых машиной $\mathfrak{M}'$ в нулевую заключительную конфигурацию, эффективно неотделимо от множества натуральных чисел, перерабатываемых машиной $\mathfrak{M}'$ в заключительную конфигурацию, отличную от нулевой. Используя машину $\mathfrak{M}'$, построим эквивалентную ей двухленточную машину Минского $\mathfrak{M}_0$, в программе которой содержатся лишь команды следующих видов:

(а) $q_i a b \to q_j T_1 T_0$ (б) $q_i a b \to q_j T_0 T_1$,

(в) $q_i 0 b \to q_j T_{-1} T_0$ (г) $q_i a 0 \to q_j T_0 T_{-1}$,

(д) $q_i 1 b \to q_j T_0 T_0$ (е) $q_i a 1 \to q_j T_0 T_0$.

Пусть $q_0, q_1, \ldots, q_\ell$ - внутренние состояния машины $\mathfrak{M}_0$, $K_1, K_2, \ldots, K_t$ - программа машины $\mathfrak{M}$. Зафиксируем $\ell+1$ попарно различных двухместных предикатных переменных $P^0, P^1, \ldots, P^\ell$.

Пусть натуральное число p таково, что $1 \leqslant p \leqslant t$. Введем обозначения:

$$B_p \rightleftharpoons \begin{cases} (P^i(x,z) \& \neg P^j(y_1,z)) & \text{,если } K_p \text{ имеет вид (а),} \\ (P^i(z,x) \& \neg P^j(z,y_1)) & \text{,если } K_p \text{ имеет вид (б),} \\ (P^i(y_1,z) \& \neg P^j(x,z)) & \text{,если } K_p \text{ имеет вид (в),} \\ (P^i(z,y_1) \& \neg P^j(z,x)) & \text{,если } K_p \text{ имеет вид (г),} \\ (P^i(y_0,z) \& \neg P^j(y_0,z)) & \text{,если } K_p \text{ имеет вид (д),} \\ (P^i(z,y_0) \& \neg P^j(z,y_0)) & \text{,если } K_p \text{ имеет вид (е),} \end{cases}$$

$$A \rightleftharpoons (P^0(y_0,y_0) \vee \bigvee_{k=1}^{t} B_k).$$

Пусть n - произвольное натуральное число. Введем обозначения:

$$F_1^{(n)} \rightleftharpoons (A \vee \neg S^0(y_0) \vee (\bigvee_{0<k\leqslant n} (S^{k-1}(x) \& \neg S^k(y_1))) \vee (S^n(z) \& \neg P^1(z,y_0))),$$

$$F_2^{(n)} \rightleftharpoons (A \vee \neg R(y_0,y_2) \vee (\bigvee_{0<k\leqslant n} (R(x,y_{k+1}) \& \neg R(y_1,y_{k+2}))) \vee (R(z,y_{n+2}) \& \neg P^1(z,y_0))),$$

$$F_3^{(n)} \rightleftharpoons (A \vee \neg R(y_0,y_2) \vee (R(x,z) \& \neg R'(y_1,z)) \vee (\bigvee_{0<k\leqslant n} (R'(z,y_{k+1}) \& \neg R(z,y_{k+2}))) \vee$$

$$\vee (R(z,y_{n+2}) \& \neg P^1(z,y_0))),$$

где $x, z, y_0, y_1, \ldots, y_{n+2}$ - попарно различные предметные переменные, $S^0, S^1, \ldots, S^n$ - попарно различные одноместные предикатные переменные и R, R' - различные двухместные предикатные переменные, отличные от $P^0, P^1, \ldots, P^\ell$.

Теорема I вытекает из следующих лемм.

Лемма I. Каково бы ни было натуральное число n, в исчислении C выводимы следующие формулы:

$$\exists x \forall y_0 y_1 \exists z F_1^{(n)} \equiv \forall y_0 \exists x \forall y_1 \exists z F_1^{(n)},$$

$$\exists x \forall y_0 y_1, y_2, \ldots, y_{n+2} \exists z F_3^{(n)} \equiv \forall y_0 y_2 \ldots y_{n+2} \exists x \forall y_1 \exists z F_3^{(n)}.$$

Лемма 2. Каково бы ни было натуральное число n , если машина $\mathfrak{M}_0$ перерабатывает число n в нулевую заключительную конфигурацию, то в исчислении C выводимы следующие формулы:

$$\forall y_0 \exists x \forall y_1 \exists z F_1^{(n)}, \quad \forall y_0 y_2 \ldots y_{n+2} \exists x \forall y_1 \exists z F_2^{(n)},$$
$$\forall y_0 y_2 \ldots y_{n+2} \exists x \forall y_1 \exists z F_3^{(n)}.$$

Лемма 3. Каковы бы ни были натуральные числа n, s_1 и s_2 , если $s_1 + s_2 \neq 0$ и машина $\mathfrak{M}_0$ перерабатывает начальную конфигурацию $(n, 0; q_1)$ в заключительную конфигурацию $(s_1, s_2; q_0)$, то формулы $\forall y_0 \exists x \forall y_1 \exists z F_1^{(n)}$, $\forall y_0 y_2 \ldots y_{n+2} \exists x \forall y_1 \exists z F_2^{(n)}$ и $\forall y_0 y_2 \ldots y_{n+2} \exists x \forall y_1 \exists z F_3^{(n)}$ опровержимы на конечных моделях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krom M.R. The decision problem for formulas in prenex conjunctive normal form with binary disjunctions."J.Symbolic Logic", 1970,35, 2, 210-216.
2. Wang Hao. Tag systems and lag systems."Math. Annalen", 1963, 152, 65-74.
3. Маслов С.Ю. О"Tag" -проблеме Э.Л.Поста. "Тр.Матем.ин-та АН СССР", 1964, 72, 57-68.
4. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1965.
5. Гуревич Ю.Ш. Проблема разрешения для логики предикатов и операций. "Алгебра и логика. Семинар", 1969, 8, 3,284-308.