В. А. Романьков, Бесконечная порожденность групп автоморфизмов свободных про-p-групп, *Сиб. матем. журн.*, 1993, том 34, номер 4, 153–159

Сибирский математический журнал
Июль—август, 1993. Том 34, № 4

УДК 512.543.16:512.546.37

БЕСКОНЕЧНАЯ ПОРОЖДЕННОСТЬ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНЫХ ПРО-p-ГРУПП

В. А. Романьков

Введение

Основные понятия и факты, относящиеся к аналитическим и проконечным группам и приводимые в дальнейшем без специальных ссылок, содержатся в [1] (см. также [2–4]. Термины «подгруппа» и «порождающие элементы» имеют топологический смысл. Говорим, что группа *бесконечно-порождена*, если для нее не существует конечного множества порождающих элементов.

Пусть G — проконечная группа. Обозначим через $\operatorname{Aut} G$ группу всех ее топологических автоморфизмов. Группа $\operatorname{Aut} G$ обладает естественно определяемой топологией, базу окрестностей 1 которой образуют конгруэнц-подгруппы вида

$$\Gamma(N) = \{\gamma \in \operatorname{Aut} G \mid (G, \gamma) \leqslant N\},$$

где N пробегает множество всех открытых нормальных подгрупп группы G. Заметим, что автоморфизм γ принадлежит $\Gamma(N)$ тогда и только тогда, когда $\gamma(N) = N$ и γ индуцирует тождественное отображение на фактор-группе G/N.

Относительно этой топологии группа G является хаусдорфовой топологической группой. В общем случае группа $\operatorname{Aut} G$ не проконечна. Тем не менее если G конечно-порождена, то $\operatorname{Aut} G$ проконечна.

Если G — конечно-порожденная про-p-группа, то любой ее абстрактный автоморфизм γ непрерывен. Определим ряд Фраттини группы G, полагая

$$P_1(G) = G,$$

$$P_2(G) = \Phi(G) = \overline{G^p(G,G)}, \dots, P_{i+1}(G) = \Phi(P_i(G)) = \overline{P_i(G)^p(P_i(G),G)}, \dots,$$

где черта означает замыкание. Группа $\operatorname{Aut}(G, \Phi(G))$ всех автоморфизмов группы G, индуцирующих тождественное отображение на фактор-группе $G/\Phi(G)$, является про-p-группой; она открыта и нормальна в $\operatorname{Aut} G$ и имеет в ней конечный индекс.

Топологическая группа G называется *p-адической аналитической группой*, если G наделена структурой p-адического аналитического многообразия, относительно которой операции умножения и взятия обратного в группе G аналитичны.

Про-p-группа G_0 называется *равномерно насыщенной*, если выполнены следующие условия:
1) G_0 конечно-порождена,
2) фактор-группа $G_0/\overline{G_0^p}$ при нечетном p или $G_0/\overline{G_0^4}$ при $p = 2$ абелева,
3) для любого $i \in \mathbb{N}$ $|P_i(G_0) : P_{i+1}(G_0)| = |G_0 : P_2(G_0)|$.

Произвольный элемент g равномерно насыщенной про-p-группы G_0 однозначно записывается в виде $g = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, где показатели α_i принадлежат кольцу $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел, а $\{x_1, \dots, x_n\}$ — некоторое каноническое множество порождающих элементов группы G_0.

Соответствие $g \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ определяет гомеоморфизм группы G_0 на пространство $\mathbb{Z}_p^n$. Число n является размерностью группы G_0.

Теорема Лазара. *Топологическая группа G может быть наделена структурой p-адической аналитической группы тогда и только тогда, когда G содержит открытую подгруппу конечного индекса G_0, являющуюся равномерно насыщенной про-p-группой.*

Пусть G — проконечная группа, $R = \mathbb{Z}_p[G]$ — ее групповое кольцо. Пополненное групповое кольцо $\widehat{R} = \mathbb{Z}_p[[G]]$ определяется как проективный предел $\widehat{R} = \varprojlim \mathbb{Z}_p[G/N]$, где N пробегает множество всех открытых нормальных подгрупп группы G. При этом $\mathbb{Z}_p[G/N]$ рассматриваются как компактные кольца, гомеоморфные прямому произведению $|G/N|$ экземпляров кольца $\mathbb{Z}_p$. Аналогичное определение получается, если заменить $\mathbb{Z}_p$ полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Пусть G_0 — равномерно насыщенная про-p-группа с каноническим множеством $\{x_1, \dots, x_n\}$ порождающих элементов. Тогда на кольце $R = \mathbb{Z}_p[G_0]$ можно определить норму (см. [1]), совместимую с топологией кольца $\mathbb{Z}_p$ и топологией группы G_0. Пополнение кольца R относительно этой нормы можно отождествить с пополненным групповым кольцом $\widehat{R}$. Обозначим $b_i = x_i - 1$ $(i = 1, \dots, n)$. Считаем, что $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел вместе с нулем. Тогда множество элементов $B = \{b^{\overline{\alpha}} = b_1^{\alpha_1} \dots b_n^{\alpha_n} \mid \overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\}$ образует базу кольца $\widehat{R}$. Это означает, что любой элемент $a \in \widehat{R}$ однозначно записывается в виде $a = \sum \lambda_{\overline{\alpha}} b^{\overline{\alpha}}$, где $\lambda_{\overline{\alpha}} \in \mathbb{Z}_p$.

Пусть $S = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[G_0]$ — групповая алгебра равномерно насыщенной про-p-группы G_0 с коэффициентами из поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Пополненная групповая алгебра $\widehat{S} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[[G_0]]$ может быть представлена как $\widehat{R}/p\widehat{R}$. Любой элемент $c \in \widehat{S}$ однозначно записывается в виде

$$c = \sum \lambda_{\overline{\alpha}} b^{\overline{\alpha}}, \qquad (1)$$

где $\lambda_{\overline{\alpha}} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, а элементы $b^{\overline{\alpha}}$, образующие базу B, имеют тот же смысл.

Сформулируем утверждения настоящей работы, в которых p — произвольное простое число.

Предложение. *Пусть G_0 — равномерно насыщенная про-p-группа. Тогда пополненная групповая алгебра $\widehat{S} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[[G_0]]$ нётерова справа, т. е. удовлетворяет условию максимальности для замкнутых правых идеалов.*

Следствие 1. *Пополненная групповая алгебра $\widehat{S} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[[G]]$ произвольной проконечной p-адической аналитической группы G нётерова справа.*

Теорема. *Группа автоморфизмов свободной метабелевой про-p-группы $M_n(p)$ ранга $n \geqslant 2$ бесконечно-порождена.*

Следствие 2. *Группа автоморфизмов свободной про-p-группы $F_n(p)$ ранга $n \geqslant 2$ бесконечна-порождена.*

Таким образом, ответ на известный вопрос, явно поставленный А. Любоцким на конференции по проконечным группам в Обервольфахе (1990): «Будет ли группа $\operatorname{Aut} F_n(p)$ $(n \geqslant 2)$ конечно-порожденной?» — отрицателен.

Вопрос о порождаемости групп автоморфизмов свободных групп метабелевых многообразий про-p-групп изучался автором в [5, 6]. Была установлена бесконечная порожденность групп $\operatorname{IAut} G$ в случаях, когда G — одна из следующих групп: $M_n(p)/\overline{(M_n(p)')^p}$, $M_n(p)$, $F_n(p)$ ($n \geqslant 2$). Здесь $\mathrm{IAut}\, G$ — группа всех автоморфизмов группы G, тождественных по модулю коммутанта G'. В то же время доказана конечная порожденность любой из групп $\mathrm{Aut}\, M_n(p)/\overline{(M_n(p)')^p}$ для $n = 2$ или $n \geqslant 4$. Вопрос о конечной порожденности групп $\mathrm{Aut}\, M_3(p)/\overline{(M_3(p)')^p}$ остался открытым. Настоящая работа продолжает и дополняет [6].

Сформулируем еще одно утверждение, вытекающее из теоремы.

Следствие 3. *Группа* $\mathrm{Aut}\, F_n$ *автоморфизмов свободной проконечной группы* F_n *ранга* $n \geqslant 2$ *бесконечно-порождена.*

Теорема позволяет получить также ряд утверждений, касающихся групп автоморфизмов дискретных групп. Известно, что группа автоморфизмов любой конечно-порожденной нильпотентной группы сама конечно-порождена. Порождающие элементы групп $\mathrm{Aut}\, N_{n,l}$ автоморфизмов свободных нильпотентных групп $N_{n,l}$ и групп $\mathrm{Aut}\, M_{n,l}$ автоморфизмов свободных метабелевых нильпотентных групп $M_{n,l}$ ранга n ступени l описывались в многочисленных работах (см., например, [7–9] и др.). В основном в них приводились «экономные» множества порождающих элементов (см. работу [10], где, в частности, поставлена проблема: как много IA-автоморфизмов группы $N_{n,l}$ требуется для порождения вместе с нильсеновыми автоморфизмами группы $\mathrm{Aut}\, N_{n,l}$?). Хорошо известен вопрос: можно ли число порождающих элементов групп $\mathrm{Aut}\, N_{n,l}$ при данном n ограничить по l? Результаты настоящей работы позволяют вывести

Следствие 4. *Число порождающих элементов групп* $\mathrm{Aut}\, N_{n,l}$, *ра́вно как и групп* $\mathrm{Aut}\, M_{n,l}$, *при любом* $n \geqslant 2$ *неограниченно возрастает по* l.

§ 1. Нётеровость пополненной групповой алгебры p-адической аналитической группы

Пусть G_0 — равномерно насыщенная про-p-группа с каноническим множеством $\{x_1, \ldots, x_n\}$ порождающих элементов. Определим вес $\rho(b^{\overline{\alpha}})$ произвольного элемента базы B пополненной групповой алгебры $\widehat{S} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[[G_0]]$, полагая $\rho(b^{\overline{\alpha}}) = |\overline{\alpha}| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Упорядочим элементы базы B по возрастанию веса, а для одинаковых весов — лексикографически. Определим старший член $\bar{c}$ элемента $c \in \widehat{S}$ как наименьший элемент $b^{\overline{\alpha}}$, входящий в запись (1) с ненулевым коэффициентом.

Лемма. *Пусть* $c_1, c_2 \in \widehat{S}$, $\bar{c}_1 = b^{\overline{\alpha}_1}$, $\bar{c}_2 = b^{\overline{\alpha}_2}$. *Тогда* $\overline{c_1 c_2} = b^{\overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых элементов x, y произвольной группы имеет место равенство в групповом кольце (алгебре)

$$(x-1)(y-1) - (y-1)(x-1) = yx((x,y)-1), \tag{2}$$

проверяемое непосредственно. По свойству 2 равномерной насыщенности группы G_0 для любых ее элементов x, y коммутатор (x,y) принадлежит подгруппе $\overline{G_0^q}$, где $q = p$, если p нечетное, и $q = 4$, если $p = 2$. Известно, что $\overline{G_0^q}$ совпадает с множеством $\{g^q \mid g \in G_0\}$. Значит, верно равенство вида

$$(x,y) - 1 = g^q - 1 = (g-1)^q, \tag{3}$$

где $g = g(x,y)$ — некоторый элемент группы G_0. Отсюда и из (2) получаем сравнение

$$(x-1)(y-1) \equiv (y-1)(x-1) \tag{4}$$

по модулю q-й степени максимального идеала в $\widehat{S}$. Утверждение леммы является прямым следствием (4), так как q во всех случаях не меньше чем 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Пусть I — замкнутый правый идеал алгебры $\widehat{S}$. Как обычно, I однозначно определяется старшими членами $b^{\overline{\alpha}}$ своих элементов. Определим отображение $\varphi : I \to \mathbb{N}^n$, сопоставляя произвольному элементу $c \in I$ элемент $\overline{\alpha} \in \mathbb{N}^n$, определяемый равенством $\bar{c} = b^{\overline{\alpha}}$. Согласно лемме образом I будет идеал аддитивной коммутативной полугруппы $\mathbb{N}^n$. При этом φ инъективно на множестве правых идеалов алгебры $\widehat{S}$. Хорошо известно и легко доказывается, что полугруппа $\mathbb{N}^n$ удовлетворяет условию максимальности для идеалов. Следовательно, алгебра $\widehat{S}$ нётерова справа. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Пусть G_0 — открытая равномерно насыщенная про-p-группа конечного индекса группы G, существующая по теореме Лазара. Пусть $\{t_0 = 1, \dots, t_m\}$ — множество всех представителей различных левых смежных классов группы G по подгруппе G_0. Пусть $\widehat{S} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[[G]]$ и $\widehat{S}_0 = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[[G_0]]$ — пополненные групповые алгебры групп G и G_0 соответственно. Тогда $\widehat{S} = \sum\limits_{i=0}^{m} t_i\widehat{S}_0$ — конечно-порожденный модуль над $\widehat{S}_0$. Ввиду нётеровости справа $\widehat{S}_0$, установленной в предложении, модуль $\widehat{S}$ также нётеров справа.

§ 2. Бесконечная порожденность группы $\operatorname{Aut} M_n(p)$ при $n \geqslant 2$

Обозначим через $A_n(p) = M_n(p)/\overline{M_n(p)'} = F_n(p)/\overline{F_n(p)'}$ свободную абелеву про-p-группу ранга n. Группа $\operatorname{Aut} A_n(p)$ изоморфна группе $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ с естественной топологией, наследуемой с кольца $\mathbb{Z}_p$. Она является конечно-определенной p-адической аналитической проконечной группой.

Приведем общий факт, справедливый как для проконечных, так и для абстрактных групп. Если группа G является расширением нормальной подгруппы N с помощью конечно-определенной группы $H = G/N$ и группа G конечно-порождена, то подгруппа N является нормальным замыканием конечного множества своих элементов в группе G.

Нормальную абелеву подгруппу N периода p проконечной группы G можно рассматривать как модуль над пополненной групповой алгеброй $\widehat{S} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[[G/N]]$. Если группа G конечно-порождена, а группа G/N конечно-определена, то модуль N конечно-порожден над $\widehat{S}$. Если G/N при этом p-адическая аналитическая группа, то по следствию 1 модуль N нётеров справа. Значит, любой подмодуль в нем конечно-порожден. Мы воспользуемся этим замечанием при доказательстве теоремы.

Приведем некоторые понятия и факты, содержащиеся в [6].

Обозначим через $a_1, \dots, a_n$ свободные порождающие элементы группы $A_n(p)$, соответствующие элементам $x_1, \dots, x_n$ базы группы $M_n(p)$. Пополненное групповое кольцо $\Lambda_n(p) = \mathbb{Z}_p[[A_n(p)]]$ изоморфно кольцу степенных рядов $\mathbb{Z}_p[[s_1, \dots, s_n]]$, где элементы s_i соответствуют элементам $b_i = a_i - 1$ $(i = 1, \dots, n)$. Коммутант $M_n(p)'$ является модулем над кольцом $\Lambda_n(p)$. В [11] установлен проконечный аналог вложения

Магнуса группы $M_n(p)$ в группу матриц следующего вида:

$$\mu : g \mapsto \begin{pmatrix} a & \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_n t_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $a \in A_n(p)$ — естественный гомоморфный образ элемента $g \in M_n(p)$; $t_1, \ldots, t_n$ — база свободного модуля над кольцом $\Lambda_n(p)$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Lambda_n(p)$. Вложение μ однозначно определяется образами $\mu(x_i) = \begin{pmatrix} a_i & t_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(i = 1, \ldots, n)$ порождающих элементов группы $M_n(p)$.

В [6] автор ввел в рассмотрение проконечные аналоги дифференцирований Фокса на группе $M_n(p)$ со значениями в кольце $\Lambda_n(p)$, полагая

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ сопоставляются элементу $g \in M_n(p)$ согласно (5). Это позволяет, в свою очередь, определить проконечный аналог вложения Бахмута β группы IAut $M_n(p)$ в группу матриц $GL_n(\Lambda_n(p))$, если положить

$$\beta : \varphi \mapsto \frac{\partial x_i^{\varphi}}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

где $\varphi \in \mathrm{IAut}\ M_n(p)$. Полагаем $\det \varphi = \det \beta(\varphi)$. Пусть $\Delta_n(p)$ — максимальный идеал кольца $\Lambda_n(p)$. Обозначим через $P_n(p)$ мультипликативную группу $1 + \Delta_n(p)$. В работе [6] доказано равенство

$$\det(\mathrm{IAut}\ M_n(p)) = P_n(p).$$

В [6] показано, как элементы группы $\mathrm{Aut}\, A_n(p) \simeq GL_n(\mathbb{Z}_p)$ действуют на матрицы $\beta(\varphi)$ $(\varphi \in \mathrm{IAut}\ M_n(p))$. Группа $K_n(p) = \ker(\det) \trianglelefteq \mathrm{IAut}\ M_n(p)$ оказывается инвариантной относительно этого действия. Поэтому при доказательстве теоремы, к которому мы сейчас перейдем, можно ограничиться рассмотрением расширения абелевой про-p-группы $P_n(p)$ с помощью p-адической аналитической группы $GL_n(\mathbb{Z}_p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Возьмем модуль $Q_n(p) = P_n(p)/\overline{P_n(p)^p}$ над пополненной групповой алгеброй $\widehat{S} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[[GL_n(\mathbb{Z}_p)]]$. Достаточно доказать, что при $n \geqslant 2$ модуль $Q_n(p)$ не конечно-порожден. Предположим, что $Q_n(p)$ конечно-порожден, тогда по следствию 1 он будет нётеров справа и любой его подмодуль также будет конечно-порожден. Мы получим противоречие, указав не конечно-порожденный подмодуль $V_n(p)$ модуля $Q_n(p)$.

Вначале установим равенство

$$P_n(p)^p \cap 1 + p\Delta_n(p) = 1 + p^2\Delta_n(p). \tag{7}$$

Так как $(1 + p\Delta_n(p))^p = 1 + p^2\Delta_n(p)$, правая часть (7) содержится в левой. Наоборот, пусть $1 + g \in P_n(p)^p$. Тогда $1 + g = (1 + f)^p$ для некоторого элемента $1 + f \in P_n(p)$. Если все коэффициенты в f делятся на p, то $1 + g \in 1 + p^2\Delta_n(p)$. Пусть $b^{\overline{\alpha}}$ — наименьший элемент базы B, входящий в запись f с коэффициентом, не делящимся на p. Тогда в запись g входит элемент базы $b^{\overline{\alpha}p}$ с коэффициентом, также не делящимся на p, поэтому $1 + g \notin 1 + p\Delta_n(p)$.

Согласно (7) образ $V_n(p)$ подмодуля $1 + p\Delta_n(p)$ в модуле $Q_n(p)$ можно отождествить с модулем $1 + \overline{p\Delta_n(p)}$, где черта означает, что коэффициенты берутся по $\bmod p^2$. Модуль $V_n(p)$, очевидно, изоморфен кольцу с нулевым умножением $O_n(p) = \overline{p\Delta_n(p)}$.

Группа $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ порождена диагональными матрицами $d_i(k)$ ($k \in \mathbb{Z}_p^*$), отвечающими автоморфизмам группы $M_n(p)$, заданным отображениями $\iota_i(k) : x_i \mapsto x_i^k$, $x_l \mapsto x_l$ при $l \neq i$, и трансвекциями t_{ij} ($i \neq j$), соответствующими нильсеновым автоморфизмам $\rho_{ij} : x_i \mapsto x_i x_j$, $x_l \mapsto x_l$ при $l \neq i$. В [6] показано, как автоморфизмы $\iota_i(k)$, ρ_{ij} действуют на ряды из $P_n(p)$. Так, матрице $d_i(k)$ отвечает подстановка в рядах

$$\sigma_i(k) : s_i \mapsto (1+s_i)^k - 1, \quad s_l \mapsto s_l \quad \text{при} \quad l \neq i, \tag{8}$$

а трансвекции t_{ij} — подстановка

$$\tau_{ij} : s_i \mapsto s_i + s_j + s_i s_j, \quad s_l \mapsto s_l \quad \text{при} \quad l \neq i. \tag{9}$$

Отсюда получается, что автоморфизмы $\iota_i(k)$, ρ_{ij} действуют на элементы $a_j = s_j + 1$ так же, как индуцируемые ими автоморфизмы группы $A_n(p)$, т. е.

$$\iota_i(k) : a_i \mapsto a_i^k, \ a_l \mapsto a_l \quad \text{при} \quad l \neq i, \tag{10}$$

$$\rho_{ij} : a_i \mapsto a_i a_j, \ a_l \mapsto a_l \quad \text{при} \quad l \neq i. \tag{11}$$

Нельзя сказать, что формулы (10), (11) очевидны, поскольку действия автоморфизмов $\iota_i(k)$, ρ_{ij} на матрицы $\beta(\varphi)$ ($\varphi \in \mathrm{IAut}\, M_n(p)$) не индуцируются действиями (10), (11) на элементы матриц. Подмодули рассматриваемых модулей — это в точности их подгруппы, выдерживающие подстановки (8), (9) или, что равносильно, (10), (11). В этом смысле можно также говорить о модулях $P_1(p)$, $Q_1(p)$ и $V_1(p)$.

Докажем, что любой модуль $V_n(p)$, $n = 1, 2, \ldots$, бесконечно-порожден. Ввиду изоморфизма $V_n(p) \simeq O_n(p)$ модуль $V_n(p)$ является замыканием фундаментального идеала Δ_n групповой алгебры над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ свободной абелевой про-p-группы $A_n(p) = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Полагаем $a^{\overline{\alpha}} = a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}$ $\left(\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_p^n\right)$. Система элементов $C = \{a^{\overline{\alpha}} - 1 \mid \overline{\alpha} \in A \subseteq \mathbb{Z}_p^n\}$ будет всюду плотной в $V_n(p)$, если для любого числа $r \in \mathbb{N}$ и любого элемента $a^{\overline{\beta}} - 1$ найдется такой элемент $a^{\overline{\alpha}} - 1 \in C$, что $(a^{\overline{\beta}} - 1) - (a^{\overline{\alpha}} - 1) = a^{\overline{\alpha}}(a^{\overline{\beta} - \overline{\alpha}} - 1) \in \Delta_n(p)^{p^r}$. Для этого достаточно, чтобы среди показателей $\overline{\alpha}$ в C были представители всех классов вычетов $p^r\mathbb{Z}_p^n + \overline{\gamma}$, так как для $\overline{\alpha} \equiv \overline{\beta} \bmod p^r\mathbb{Z}_p^n$ имеем $a^{\overline{\beta} - \overline{\alpha}} - 1 = (a^{p^r\mu} - 1) = (a^\mu - 1)^{p^r} \in \Delta_n(p)^{p^r}$. Например, можно взять в качестве C все элементы вида $a^{\overline{\alpha}} - 1$, где $\overline{\alpha} \in \mathbb{N}^n$.

Пусть модуль $V_n(p)$, рассматриваемый как $O_n(p)$, конечно-порожден. Тогда он нётеров справа и из любого порождающего множества, в данном случае из C, можно выбрать конечное порождающее подмножество. Можно считать, что оно имеет вид $C_1 = \{a^{\overline{\alpha}} - 1 \mid \alpha \leqslant (p^r - 1, \ldots, p^r - 1)\}$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Возьмем замыкание C_1 относительно действия элементами из $GL_n(\mathbb{Z}_p)$, т. е. относительно действия операторов по формулам (10), (11). Заметим, что таким образом получаются элементы $a^{\overline{\alpha}} - 1$ с условием $\alpha \notin p^r\mathbb{Z}_p^n$. Рассмотрим конечное фактор-кольцо кольца $O_n(p)$ по идеалу $I_{r+1}(p) = \left\langle a^{p^{r+1}} - 1 \mid a \in A_n(p) \right\rangle$. Образом $O_n(p)$ при такой факторизации будет идеал $J_n(p)$, являющийся произведением числа p на фундаментальный идеал группового кольца с коэффициентами из $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ группы $A_n/A_n^{p^{r+1}}$ — прямого произведения циклических групп порядка p^{r+1}. Любой элемент $\nu \in J_n(p)$ однозначно записывается как линейная комбинация элементов $\bar{a}^{\overline{\alpha}} - 1$, где $\overline{\alpha} \leqslant (p^{r+1} - 1, \ldots, p^{r+1} - 1)$. В то же время среди образов элементов из замыкания C_1 нет элементов вида $\bar{a}^{\overline{\alpha}} - 1$, где $\overline{\alpha} \in p^r\mathbb{N}$. Поэтому образ замыкания C_1 не порождает весь идеал $J_n(p)$, следовательно, замыкание C_1 не порождает модуль $V_n(p) = O_n(p)$, что противоречит сделанному предположению. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Очевидно, что любой автоморфизм группы $M_n(p)$ индуцирован автоморфизмом группы $F_n(p)$. Значит, группа $F_n(p)$ при $n \geqslant 2$ бесконечно-порождена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Группа $\mathrm{Aut}\,F_n(p)$ является гомоморфным образом группы $\mathrm{Aut}\,F_n$, так как $\ker(F_n \to F_n(p))$ — автоморфно допустимая подгруппа в F_n (см. [12]), поэтому группа $\mathrm{Aut}\,F_n$ при $n \geqslant 2$ бесконечно-порождена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4. Достаточно рассмотреть случай групп $\mathrm{Aut}\,M_{n,l}$. Пусть $M_{n,l}(p)$ — свободная метабелева нильпотентная ступени l про-p-группа ранга n или, что то же самое, свободная метабелева $\mathbb{Z}_p$-группа ступени l ранга n. Любой IA-автоморфизм группы $M_{n,l}(p)$ есть предел расширений IA-автоморфизмов групп $M_{n,l}$. Если бы любая группа $\mathrm{Aut}\,M_{n,l}$ порождалась r элементами, где $r = r(n)$ ($n \geqslant 2$), то все группы $\mathrm{Aut}\,M_{n,l}(p)$, а значит, и их предельная группа $\mathrm{Aut}\,M_n(p)$ порождалась бы автоморфизмами вида $\iota_i(k)$, определенными выше, и дополнительными r автоморфизмами. Но тогда группа $\mathrm{Aut}\,M_n(p)$ была бы конечно-порожденной в топологическом смысле, что противоречит теореме.

Автор благодарен В. Н. Ремесленникову за высказанную идею доказательства предложения и интерес к работе. Он также признателен Н. С. Романовскому за внимательное прочтение работы [6] в рукописи, что во многом способствовало появлению данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dixon J. D., Sautoy M. P. F. du, Mann A., Segal D.* Analytic pro-p-groups // London Math. Soc. Lect. Ser. 157. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
2. *Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А., Скорняков Л. А., Шестаков И. П.* Общая алгебра. Т. 1. М.: Наука, 1990.
3. *Серр Ж.-П.* Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.
4. *Lazard M.* Groupes analytiques p-adiques // Inst. Hautes Études Scientifiques, Publl. Math. 1965. T. 26. P. 389–603.
5. *Roman'kov V. A.* Automorphism groups of free metabelian pro-p-groups // Междунар. конф. по алгебре, посвященная памяти А. И. Ширшова (Барнаул, 20–25 авг. 1991): Тез. докл. по теории групп. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1991. С. 160.
6. *Романьков В. А.* Порождающие элементы групп автоморфизмов свободных метабелевых про-p-групп // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 5. С. 145–158.
7. *Горяга А. В.* О порождающих элементах группы автоморфизмов свободной нильпотентной группы // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 4. С. 458–463.
8. *Andreadakis S.* Generators for $\mathrm{Aut}\,G$, G free nilpotent // Arch. Math. 1984. V. 42. P. 296–300.
9. *Bryant R. M., Gupta C. K.* Automorphism groups of free metabelian nilpotent groups // Arch. Math. 1989. V. 52. P. 313–320.
10. *Gupta C. K.* Automorphisms of certain relatively free solvable groups // Proc. of conf. "Groups — Korea 1988." Pusan, 1988. P. 82–85.
11. *Ремесленников В. Н.* Теоремы вложения для проконечных групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43, № 2. С. 399–417.
12. *Мельников О. В.* Характеристические подгруппы и автоморфизмы свободных проконечных групп // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 3. С. 339–349.

г. Омск *Статья поступила 22 мая 1992 г.*