А. А. Конюшков, О поведении норм конечных разностей,
Матем. заметки, 1980, том 27, выпуск 3, 447–456

https://www.mathnet.ru/mzm6529

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 3 (1980)

О ПОВЕДЕНИИ НОРМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

А. А. Конюшков

Будем рассматривать действительные функции с периодом 2π. Через $L_p \equiv L_p\,(0, 2\pi)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ обозначаем пространство таких измеримых функций $f\,(x)$, для которых

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f\,(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} < \infty;$$

через $C_{2\pi}$ обозначим пространство всех непрерывных функций f периода 2π с нормой $\|f\|_{C_{2\pi}} = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \pi} |f\,(x)|$.

Пусть $\varphi\,(t)$ — положительная функция на $(0,\ 2\pi]$ и пусть фиксированы числа k, p и μ, где k — натуральное число, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $\mu > 0$. По определению:

1) $H_{\varphi,k,p}^{(\mu)}$ — класс всех функций $f \in L_p$ при $1 \leqslant p < \infty$ и класс всех функций $f \in C_{2\pi}$ при $p = \infty$, для которых [1])

$$\frac{\|\Delta_t^{(k)} f\,(x)\|_{L_p}}{\varphi\,(t)} \leqslant \mu \qquad (0 < t \leqslant 2\pi). \tag{1}$$

Здесь $\Delta_t^{(k)} f\,(x)$ — симметрическая разность k-го порядка функции f в точке x, т. е.

$$\Delta_t^{(k)} f\,(x) = \sum\nolimits_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f\,[x + (k - 2j)\,t].$$

Примем в классе $H_{\varphi,k,p}^{(\mu)}$ метрику пространства L_p, если $1 \leqslant p < \infty$, и метрику пространства $C_{2\pi}$, если $p = \infty$.

---

[1]) При $f \in C_{2\pi}$ $\|\Delta_t^{(k)} f\,(x)\|_{L_\infty} = \|\Delta_t^{(k)} f\,(x)\|_{C_{2\pi}}$.

Тогда $H^{(\mu)}_{\varphi,k,p}$ окажется полным метрическим пространством.

2) $H_{\varphi,k,p}$ — класс всех функций $f \in L_p$ при $1 \leqslant p < \infty$ и класс всех функций $f \in C_{2\pi}$ при $p = \infty$, для которых

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p}}{\varphi(t)} < \infty. \tag{2}$$

Если предположить функцию $\varphi(t)$ такой, что при каждом ε, $0 < \varepsilon < 2\pi$, имеем $\inf\limits_{\varepsilon \leqslant t \leqslant 2\pi} \varphi(t) > 0$, то при обычных действиях над функциями класс $H_{\varphi,k,p}$ становится банаховым пространством при следующем способе введения нормы:

$$\| f \|_{H_{\varphi,k,p}} = \| f \|_{L_p} + \sup_{0<t\leqslant 2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p}}{\varphi(t)}.$$

В пространстве $H_{\varphi,k,p}$ все функции f, для которых $\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_p} = o[\varphi(t)]$ $(t \to 0+)$, образуют подпространство (т. е. замкнутое линейное множество) $\underline{H}_{\varphi,k,p}$ (см. [1, стр. 869, доказательство теоремы 5]).

3) $H^{\infty}_{\varphi,k,p} = L_p \setminus H_{\varphi,k,p}$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $H^{\infty}_{\varphi,k,\infty} = C_{2\pi} \setminus H_{\varphi,k,\infty}$.

Возьмем некоторую последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что $0 < t_i \leqslant 2\pi$ и $t_i \to 0$ при $i \to \infty$. Аналогично предыдущему, определим классы $H^{(\mu)}_{\varphi(t_i),k,p}$, $H_{\varphi(t_i),k,p}$ и $H^{\infty}_{\varphi(t_i),k,p}$, беря вместо (1) и (2) соответственно

$$\frac{\| \Delta_{t_i}^{(k)} f(x) \|_{L_p}}{\varphi(t_i)} \leqslant \mu \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{1'}$$

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\| \Delta_{t_i}^{(k)} f(x) \|_{L_p}}{\varphi(t_i)} < \infty. \tag{2'}$$

$$H^{\infty}_{\varphi(t_i),k,p} = L_p \setminus H_{\varphi(t_i),k,p} \quad (1 \leqslant p < \infty),$$

$$H^{\infty}_{\varphi(t_i),k,\infty} = C_{2\pi} \setminus H_{\varphi(t_i),k,\infty}.$$

Пусть $\mathscr{P}$ — некоторое метрическое пространство функций с метрикой $(f, f_1)_{\mathscr{P}}$, где f и f_1 — любые функции из $\mathscr{P}$. Его квадратом $\mathscr{P}^2$ назовем пространство всех пар функций $[f, g]$, где f и g принадлежат $\mathscr{P}$, с метрикой

$$([f, g], \ [f_1, g_1])_{\mathscr{P}^2} = \max\left((f, f_1)_{\mathscr{P}}, \ (g, g_1)_{\mathscr{P}}\right).$$

Действия над парами вводятся как обычно. Если $\mathscr{P}$ — банахово пространство, то $\mathscr{P}^2$ — также банахово пространство с $\| [f, g] \|_{\mathscr{P}^2} = \max (\| f \|_{\mathscr{P}}, \ \| g \|_{\mathscr{P}})$. Квадраты пространств L_p $(1 \leqslant p < \infty)$, $C_{2\pi}$, $H^{(\mu)}_{\varphi, k, p}$, $H_{\varphi, k, p}$ и $\underline{H}_{\varphi, k, p}$ будем обозначать соответственно, L_p^2, $C_{2\pi}^2$, $(H^{(\mu)}_{\varphi, k, p})^2$, $H^2_{\varphi, k, p}$ и $\underline{H}^2_{\varphi, k, p}$.

Обозначим через $G_{\varphi, k, p}$ множество всех пар $[f, g] \in L_p^2$ при $1 \leqslant p < \infty$ и множество всех пар $[f, g] \in$ $\in C_{2\pi}^2$ при $p = \infty$, обладающих свойством: для пары $[f, g]$ существует последовательность $\{t_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ такая, что $t_i > 0$, $t_i \to 0$ $(i \to \infty)$,

$$\frac{\| \Delta^{(k)}_{t_i} f(x) \|_{L_p}}{\varphi(t_i)} \to \infty, \quad \frac{\| \Delta^{(k)}_{t_i} g(x) \|_{L_p}}{\varphi(t_i)} \to \infty.$$

Отметим, что нижеследующие теоремы тем же методом доказываются для случая, когда вместо симметрических разностей функций $\Delta^{(k)}_t f(x)$, $\Delta^{(k)}_t g(x)$ берутся несимметрические разности

$$\Delta^k_t f(x) = \sum\nolimits_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x + jt), \quad \Delta^k_t g(x),$$

а также, когда вместо квадратов пространств берутся более высокие степени пространств.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\varphi(t)$ — *положительная функция на* $(0, 2\pi]$, $\lim\limits_{t \to 0+} \varphi(t) = 0$ *и* k, p — *фиксированные числа*: k — *натуральное*, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда множество* $G_{\varphi, k, p}$ *будет резидуальным*[1]) *в* L_p^2 *при* $1 \leqslant p < \infty$ *и в* $C_{2\pi}^2$ *при* $p = \infty$.

Доказательство. Покажем, что $G_{\varphi, k, p}$ — множество типа G_δ в L_p^2 при $1 \leqslant p < \infty$ и в $C_{2\pi}^2$ при $p =$ $= \infty$. Пусть n — натуральное число. Обозначим через $G_n(\varphi)$ множество всех пар функций $[f, g]$ в L_p^2 при $1 \leqslant$ $\leqslant p < \infty$ и в $C_{2\pi}^2$ при $p = \infty$, обладающих свойством:

[1]) Множество $\mathscr{M}$ пространства $\mathscr{P}$ называется резидуальным в пространстве $\mathscr{P}$, если дополнение $\mathscr{P} \setminus \mathscr{M}$ будет множеством первой категории в $\mathscr{P}$.

паре $[f, g]$ соответствует число $t_n' \equiv t_n'([f, g])$, $0 < t_n' \leqslant 1/n$, такое, что одновременно выполняются неравенства

$$\frac{\|\Delta_{t_n'}^{(k)} f(x)\|_{L_p}}{\varphi(t_n')} > n, \quad \frac{\|\Delta_{t_n'}^{(k)} g(x)\|_{L_p}}{\varphi(t_n')} > n.$$

Имеем $G_{\varphi, k, p} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n(\varphi)$. Покажем, что $G_n(\varphi)$ — открытое множество. Рассмотрим его дополнение $F_n(\varphi)$ до L_p^2 при $1 \leqslant p < \infty$ и до $C_{2\pi}^2$ при $p = \infty$. Следовательно, $F_n(\varphi)$ — это множество всех пар $[f, g]$ в L_p^2 при $1 \leqslant p < \infty$ и в $C_{2\pi}^2$ при $p = \infty$, обладающих свойством: при любом фиксированном t, $0 < t \leqslant 1/n$, либо $\dfrac{\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)} \leqslant n$, либо $\dfrac{\|\Delta_t^{(k)} g(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)} \leqslant n$. Множество $F_n(\varphi)$ замкнуто в L_p^2 при $1 \leqslant p < \infty$ и в $C_{2\pi}^2$ при $p = \infty$. Действительно, пусть $\{[f_i, g_i]\} \subset F_n(\varphi)$ и $\{[f_i, g_i]\} \to [f, g]$ в метрике L_p^2 при $1 \leqslant p < \infty$ и в метрике $C_{2\pi}^2$ при $p = \infty$. Тогда при каждом фиксированном t в метрике L_p или $C_{2\pi}$ имеем $\Delta_t^{(k)} f_i(x) \to \Delta_t^{(k)} f(x)$, $\Delta_t^{(k)} g_i(x) \to \Delta_t^{(k)} g(x)$, $i \to \infty$. Возьмем произвольно некоторое t, $0 < t \leqslant 1/n$. Тогда для него при бесконечно многих значениях i выполняется по крайней мере одно из неравенств

$$\frac{\|\Delta_t^{(k)} f_i(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)} \leqslant n, \quad \frac{\|\Delta_t^{(k)} g_i(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)} \leqslant n.$$

Переходим к пределу при $i \to \infty$. Получаем, что будет выполняться по крайней мере одно из неравенств

$$\frac{\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)} \leqslant n, \quad \frac{\|\Delta_t^{(k)} g(x)\|_{L_p}}{\varphi(t)} \leqslant n.$$

Значит, $[f, g] \in F_n(\varphi)$. Тем самым показано, что $F_n(\varphi)$ замкнуто, $G_n(\varphi)$ открыто и $G_{\varphi, k, p}$ типа G_δ.

Докажем, что $G_{\varphi, k, p}$ всюду плотно в L_p^2 при $1 \leqslant p < \infty$ и в $C_{2\pi}^2$ при $p = \infty$. Возьмем в L_p^2 при $1 \leqslant p < \infty$ и в $C_{2\pi}^2$ при $p = \infty$ любой шар $O_\rho([\bar{f}, \bar{g}])$ с центром $[\bar{f}, \bar{g}]$

и радиусом ρ. Нужно показать, что в этом шаре есть пара $[f_0, g_0] \in G_{\varphi, k, p}$.

По теореме 1 из [1] в L_p при $1 \leqslant p < \infty$ и в $C_{2\pi}$ при $p = \infty$ множество $H^\infty_{\varphi, k, p}$ будет разидуальным и, следовательно, всюду плотным. Поэтому существует функция $f_0 \in H^\infty_{\varphi, k, p}$ такая, что $\| f_0 - \bar{f} \|_{L_p} < \rho$. Пусть далее последовательность $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ такова, что $t_i > 0$, $t_i \to 0$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\| \Delta^{(k)}_{t_i} f_0(x) \|_{L_p}}{\varphi(t_i)} = \infty$. В L_p при $1 \leqslant p < \infty$ и в $C_{2\pi}$ при $p = \infty$ будет резидуальным множество $H^\infty_{\varphi(t_i), k, p}$. Действительно, $f_0 \in H^\infty_{\varphi(t_i), k, p}$ и $H_{\varphi(t_i), k, p} = \bigcup_{n=1}^\infty H^{(n)}_{\varphi(t_i), k, p}$. Тогда $H_{\varphi(t_i), k, p}$ есть собственное линейное борелевское (типа F_σ) подмножество. По теореме Банаха (см. [2, стр. 31])[1] $H_{\varphi(t_i), k, p}$ 1-й категории, а $H^\infty_{\varphi(t_i), k, p}$ — резидуальное. Следовательно, можно выбрать функцию $g_0 \in H^\infty_{\varphi(t_i), k, p}$ так, чтобы $\| g_0 - \bar{g} \|_{L_p} < \rho$. Имеем $[f_0, g_0] \in G_{\varphi, k, p}$. Следовательно, $G_{\varphi, k, p}$ является всюду плотным множеством типа G_δ. Из этого следует резидуальность $G_{\varphi, k, p}$ (см., например, [3, гл. IV, теорема 29; гл. VII, § 7]). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функции* $\varphi(t)$ *и* $\varphi_1(t)$ *положительны на* $(0,2\pi]$ *и при каждом* ε, $0 < \varepsilon < 2\pi$, ***имеем*** $\inf\limits_{\varepsilon \leqslant t \leqslant 2\pi} \varphi(t) > 0$; *пусть* k, p — *фиксированные числа,* k — *натуральное,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$; *предположим, что* $\varphi^{**}_k(t) \equiv t^k \inf\limits_{0<\tau\leqslant t} [\tau^{-k} \inf\limits_{\tau \leqslant \eta \leqslant 2\pi} \varphi(\eta)] > 0$ *на* $(0, 2\pi]$, [2])

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{t^k}{\varphi(t)} < \infty, \quad \underline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi^{**}_k(t)} = 0.$$

Тогда множество $H^2_{\varphi, k, p} \cap G_{\varphi_1, k, p}$ [3]) *будет резидуальным в пространстве* $H^2_{\varphi, k, p}$.

---

[1]) Согласно ее собственное линейное борелевское подмножество пространства типа (F) будет множеством 1-й категории.

[2]) $\varphi^{**}_k(t)$ — «исправленная» функция в смысле работы С. Б. Стечкина [4].

[3]) Множество $G_{\varphi_1,k,p}$ определяется аналогично множеству $G_{\varphi,k,p}$.

Доказательство. Рассмотрим множества $G_n(\varphi_1)$, определяемые аналогично множествам $G_n(\varphi)$ при доказательстве теоремы 1. Имеем

$$H^2_{\varphi, k, p} \cap G_{\varphi_1, k, p} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [H^2_{\varphi, k, p} \cap G_n(\varphi_1)].$$

Множества $H^2_{\varphi, k, p} \cap G_n(\varphi_1)$ открытые в пространстве $H^2_{\varphi, k, p}$. Поэтому $H^2_{\varphi, k, p} \cap G_{\varphi_1, k, p}$ типа G_δ в $H^2_{\varphi, k, p}$. Докажем, что оно всюду плотно в $H^2_{\varphi, k, p}$. Возьмем в $H^2_{\varphi\, k, p}$ любой шар $O_\rho([\bar{f}, \bar{g}])$. Нужно показать, что в этом шаре есть пара $[f_0, g_0] \in G_{\varphi_1, k, p}$. Пусть $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ — любая последовательность такая, что $0 < t_i \leqslant 2\pi$, $t_i \to 0$ при $i \to \infty$ и $\lim\limits_{\to\infty} \dfrac{\varphi_1(t_i)}{\varphi_k^{**}(t_i)} = 0$. Покажем, что множество $H_{\varphi, k, p} \cap \cap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i), k, p}$ резидуальное в пространстве $H_{\varphi, k, p}$ ($H^{\infty}_{\varphi_1(t_i), k, p}$ определяется аналогично множеству $H^{\infty}_{\varphi(t_i), k, p}$). Вначале покажем, что $H_{\varphi, k, p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i), k, p}$ непусто.

Пусть $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\, (t_i^k/\varphi_1(t_i)) = \infty$. Тогда множеству $H_{\varphi, k, p} \cap \cap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i), k, p}$ принадлежат, например, все тригонометрические полиномы, отличные от постоянных (это следует из пунктов 2а) и 2б) доказательства теоремы 1 в [1]). Только в пункте 2б) надо вместо $\varphi(t)$ брать $\varphi_1(t)$.

Пусть $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \dfrac{t_i^k}{\varphi_1(t_i)} < \infty$. Из условия $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{\varphi_1(t_i)}{\varphi_k^{**}(t_i)} = 0$ следует, что $\varphi_1(t_i) \to 0$ ($\varphi_k^{**}(t)$ не убывает при возрастании t). Поэтому при $\underline{\lim\limits_{t\to 0+}} \varphi(t) > 0$ непустота множества $H_{\varphi, k, p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i), k, p}$ следует из пунктов 1а) и 1б) доказательства теоремы 1 в [1]. В этом случае $H_{\varphi, k, p} = L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $H_{\varphi, k, \infty} = C_{2\pi}$. В пункте 1б) надо вместо $\varphi(t)$ брать $\varphi_1(t)$ и вместо t_m можно писать, например, t''_m. Пусть $\underline{\lim\limits_{t\to 0+}} \varphi(t) = 0$. В этом случае достаточно сослаться на пункт β) доказательства теоремы 2 в [1], где построена функция, принадлежащая $H_{\varphi, k, p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i), k, p}$. При этом к рассуждениям в пункте β) добавим следующее. Из того, что $\underline{\lim\limits_{t\to 0+}} \varphi(t) = 0$ и $0 \leqslant \varphi_k^{**}(t) \leqslant \varphi(t)$ следует, что $\overline{\lim\limits_{t\to 0+}}\,\varphi_k^{**}(t)=0$. Так так $\varphi_k^{**}(t)$ не убывает, то $\lim\limits_{t\to 0+}\varphi_k^{**}(t)=0$. Рассуждая так же, как в [1, стр. 854], выводим, что $\underline{\lim\limits_{i\to\infty}}\,(t_i^k/\varphi_k^{**}(t_i))=0$. Так как $t^k/\varphi_k^{**}(t)$ не убывает, то $\lim\limits_{t\to 0+}(t^k/\varphi_k^{**}(t))=0$. Далее в рассуждении вместо t_n можно писать, например, t_n''.

Докажем резидуальность множества $H_{\varphi,k,p}\bigcap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i),k,p}$. Множества

$$H_{\varphi,k,p}\bigcap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i),k,p}\neq 0$$

и

$$H_{\varphi,k,p}\bigcap H_{\varphi_1(t_i),k,p}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(H_{\varphi,k,p}\bigcap H^{(n)}_{\varphi_1(t_i),k,p}),$$

где $H_{\varphi_1(t_i),k,p}$ и $H^{(n)}_{\varphi_1(t_i),k,p}$ определяются аналогично множествам $H_{\varphi(t_i),k,p}$ и $H^{(n)}_{\varphi(t_i),k,p}$. Тогда $H_{\varphi,k,p}\bigcap H_{\varphi_1(t_i),k,p}$ есть собственное линейное борелевское (типа F_σ) подмножество пространства $H_{\varphi,k,p}$. По теореме Банаха (см. доказательство теоремы 1) $H_{\varphi,k,p}\bigcap H_{\varphi_1(t_i),k,p}$ — 1-й категории в пространстве $H_{\varphi,k,p}$, а $H_{\varphi,k,p}\bigcap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i),k,p}$ — резидуальное в пространстве $H_{\varphi,k,p}$. Следовательно, $H_{\varphi,k,p}\bigcap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i),k,p}$ будет всюду плотным в $H_{\varphi,k,p}$. Отсюда следует, что можно выбрать функцию $f_0\in H_{\varphi,k,p}\bigcap$ $\bigcap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i),k,p}$ так, чтобы $\|f_0-\bar{f}\|_{H_{\varphi,k,p}}<\rho$.

Пусть подпоследовательность $\{t_i'\}$ последовательности $\{t_i\}$ такова, что $\lim\limits_{i\to\infty}\dfrac{\|\Delta^{(k)}_{t_i',0}(x)\|_{L_p}}{\varphi_1(t_i')}=\infty$. Для $\{t_i'\}$ имеем $\lim\limits_{i\to\infty}\dfrac{\varphi_1(t_i')}{\varphi_k^{**}(t_i')}=0$ и применимы предыдущие рассуждения о резидуальности с заменой t_i на t_i'.

Следовательно, получим, что множество $H_{\varphi,k,p}\bigcap$ $\bigcap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i'),k,p}$ резидуальное в пространстве $H_{\varphi,k,p}$, и значит, всюду плотное в этом пространстве. Поэтому существует функция $g_0\in H_{\varphi,k,p}\bigcap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i'),k,p}$ такая, что $\|g_0-\bar{g}\|_{H_{\varphi,k,p}}<\rho$.

Пусть подпоследовательность $\{t_i''\}$ последовательности $\{t_i'\}$ такова, что

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\| \Delta^{(k)}_{t_i''} g_0(x) \|_{L_p}}{\varphi_1(t_i'')} = \infty.$$

Тогда выполняются одновременно соотношения

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\| \Delta^{(k)}_{t_i''} f_0(x) \|_{L_p}}{\varphi_1(t_i'')} = \infty, \quad \lim_{i\to\infty} \frac{\| \Delta^{(k)}_{t_i''} g_0(x) \|_{L_p}}{\varphi_1(t_i'')} = \infty.$$

Следовательно, $[f_0, g_0] \in G_{\varphi_1, k, p}$. Кроме того, $[f_0, g_0] \in O_\rho([\bar{f}, \bar{g}])$. Из всюду плотности множества $H^2_{\varphi, k, p} \bigcap G_{\varphi_1, k, p}$ типа G_δ в пространстве $H^2_{\varphi, k, p}$ следует его резидуальность в этом пространстве.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функции $\varphi(t)$ и $\varphi_1(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и пусть μ — данное положительное число. Тогда множество $(H^{(\mu)}_{\varphi, k, p})^2 \bigcap G_{\varphi_1, k, p}$ будет резидуальным в пространстве $(H^{(\mu)}_{\varphi, k, p})^2$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что множество $(H^{(\mu)}_{\varphi, k, p})^2 \bigcap G_{\varphi_1, k, p}$ (которое будет типа G_δ; доказательство аналогично доказательству для $H^2_{\varphi, k, p} \bigcap G_{\varphi_1, k, p}$ при доказательстве теоремы 2) всюду плотно в $(H^{(\mu)}_{\varphi, k, p})^2$. Возьмем в $(H^{(\mu)}_{\varphi, k, p})^2$ любой шар $O_\rho([\bar{f}, \bar{g}])$. Нужно показать, что в этом шаре есть пара $[f_0, g_0] \in G_{\varphi_1, k, p}$.

Пусть $\{t_i\}$ — любая последовательность, указанная при доказательстве теоремы 2. Докажем резидуальность множества $H^{(\mu)}_{\varphi, k, p} \bigcap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i), k, p}$. Непустота этого множества следует из указанной при доказательстве теоремы 2 непустоты множества $H_{\varphi, k, p} \bigcap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i), k, p}$, ибо если $f \in H_{\varphi, k, p} \bigcap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i), k, p}$, то при некоторой постоянной c функция $cf \in H^{(\mu)}_{\varphi, k, p} \bigcap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i), k, p}$. Имеем

$$H^{(\mu)}_{\varphi, k, p} \bigcap H_{\varphi_1(t_i), k, p} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(H^{(\mu)}_{\varphi, k, p} \bigcap H^{(n)}_{\varphi_1(t_i), k, p}\right).$$

В случае пространства $H^{(\mu)}_{\varphi, k, p}$ мы не можем ссылаться на теорему Банаха (см. [2], стр. 31) для пространства типа (F). Поэтому будем доказывать, что замкнутые множества $\Phi_n = H^{(\mu)}_{\varphi, k, p} \bigcap H^{(n)}_{\varphi_1(t_i), k, p}$ нигде не плотны в $H^{(\mu)}_{\varphi, k, p}$.

Эти рассуждения (от обратного) аналогичны рассуждениям на стр. 861 в [1]. Следовательно, множество $H^{(\mu)}_{\varphi, k, p} \cap H_{\varphi_1(t_i), k, p}$ 1-й категории, а множество $H^{(\mu)}_{\varphi, k, p} \cap$ $\cap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i), k, p}$ резидуальное.

Множество $(H^{(\mu)}_{\varphi, k, p})^2 \cap G_{\varphi_1, k, p}$ всюду плотно в $(H^{(\mu)}_{\varphi, k, p})^2$, что доказывается аналогично всюду плотности множества $H^2_{\varphi, k, p} \cap G_{\varphi_1, k, p}$ в пространстве $H^2_{\varphi, k, p}$. Именно, используем резидуальность множеств $H^{(\mu)}_{\varphi, k, p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i), k, p}$ и $H^{(\mu)}_{\varphi, k, p} \cap H^{\infty}_{\varphi_1(t_i'), k, p}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть функции* $\varphi(t)$ *и* $\varphi_1(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 2 *и, кроме того, пусть* $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{t^k}{\varphi(t)} = 0$. *Тогда множество* $\underline{H}^2_{\varphi, k, p} \cap G_{\varphi_1, k, p}$ *будет резидуальным в пространстве* $\underline{H}^2_{\varphi, k, p}$.

Отметим, что условие $\lim\limits_{t\to 0^+} (t^k/\varphi(t)) = 0$ необходимо (и достаточно) для того, чтобы в $\underline{H}_{\varphi, k, p}$ входили не только функции, эквивалентные постоянным. Действительно, пусть $\overline{\lim\limits_{t\to 0^+}} (t^k/\varphi(t)) > 0$. Возьмем

$$f_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n_1} (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

где, например, $a_{m_0} \neq 0$ $(m_0 > 0)$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1 в [1, стр. 849], имеем при некоторой постоянной $B > 0$ при всех $t \in (0, 2\pi]$

$$\frac{\| \Delta_t^{(k)} f_1(x) \|_L}{\varphi(t)} \geqslant B \, | a_{m_0} | \frac{| \sin^k m_0 t |}{\varphi(t)}.$$

Из неравенства видим, что для любого тригонометрического полинома, отличного от постоянной, при $t \to 0+$ верхний предел правой части больше 0. Следовательно, при $t \to 0+$ предел левой части не может равняться 0. Поэтому все тригонометрические полиномы, отличные от постоянных, не входят в $\underline{H}_{\varphi, k, p}$. На основании неравенства (2.3) пункта 2б) доказательства теоремы 1 в [1] $\| \Delta_t^{(k)} \sigma_n(x, f) \|_{L_p} \leqslant \| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_{L_0}$, где $\sigma_n(x, f)$ — суммы Фейера функции f, заключаем, что $\underline{H}_{\varphi, k, p}$ не принадлежит никакая функция, не эквивалентная постоянной.

Доказательство. Множество $\underline{H}^2_{\varphi,k,p} \cap G_{\varphi_1,k,p}$ будет типа G_δ (доказательство аналогично доказательству для $H^2_{\varphi,k,p} \cap G_{\varphi_1,k,p}$ при доказательстве теоремы 2). Для доказательства теоремы достаточно доказать его всюду плотность в $\underline{H}^2_{\varphi,k,p}$.

Пусть $\{t_i\}$ — любая последовательность, удовлетворяющая условиям доказательства теоремы 2, т. е. $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{\varphi_1(t_i)}{\varphi_k^{**}(t_i)} = 0$. Непустота множества $\underline{H}_{\varphi,k,p} \cap H^\infty_{\varphi_1(t_i),k,p}$ следует из того, что при условии $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{t^k}{\varphi(t)} = 0$ функции, указанные при доказательстве непустоты множества $H_{\varphi,k,p} \cap H^\infty_{\varphi_1(t_i),k,p}$ $\left(\text{рассматривали случаи } \overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \dfrac{t_i^k}{\varphi_1(t_i)} = \infty \text{ и } \overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \dfrac{t_i^k}{\varphi_1(t_i)} < \infty\right)$, будут принадлежать множеству $_{\varphi,k,p} \cap H^\infty_{\varphi_1(t_i),k,p}$.

Затем, аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 2 для $H_{\varphi,k,p} \cap H^\infty_{\varphi_1(t_i),k,p}$, доказывается резидуальность множества $\underline{H}_{\varphi,k,p} \cap H^\infty_{\varphi_1(t_i),k,p}$ и на ее основе всюду плотность множества $H^2_{\varphi,k,p} \cap G_{\varphi_1,k,p}$ в пространстве $\underline{H}^2_{\varphi,k,p}$.

При этом используем резидуальность множеств $H_{\varphi,k,p} \cap H^\infty_{\varphi_1(t_i),k,p}$ и $H_{\varphi,k,p} \cap H^{\infty\,\prime}_{\varphi_1(t_i),k,p}$.

Московский инженерно-физический институт

Поступило 15.IV.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Конюшков А. А., О некоторых классах функций. I, Изв. АН СССР, Сер. матем., 22, № 6 (1958), 841—870.

[2] Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, «Рад. школа», 1948.

[3] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., Гостехиздат, 1948.

[4] Стечкин С. Б., Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение), Изв. АН СССР, Сер. матем., 19, № 4 (1955), 221—246.