B. E. Chuprun, Problems with bounded or minimized variation of the vector function of the system coordinates, *Avtomat. i Telemekh.*, 1998, Issue 7, 54–66

3. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
4. *Mohler R.R.* Bilinear control processes with applications to engineering, ecology and medicine. New York, London: Academic Press, 1973.
5. *Топунов М.В.* Задача о регуляции в сердечно-сосудистой системе как билинейная задача оптимального управления // Науч. тр. Московского педагогического государственного университета. М.: Прометей, 1997. С. 216–219.

Поступила в редакцию 21.07.97

УДК 62-50

Б. Е. ЧУПРУН, канд. техн. наук
(Институт проблем управления РАН, Москва)

ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ ИЛИ МИНИМИЗАЦИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ КООРДИНАТ СИСТЕМЫ

Дается необходимое условие экстремума для оптимальной задачи с ограничением или минимизацией полного изменения заданной векторной функции координат нелинейной системы. Иллюстрируется применение этого условия на примерах.

1. Введение

В работах [1, 2] рассматривалась оптимальная задача с ограничением (минимизацией) полного изменения управления. В настоящей статье рассматривается оптимальная задача при задании аналогичного ограничения на заданную векторную функцию координат системы.

Смысл ограничения на полное изменение функции координат системы может быть тем же, что и для случая такого ограничения для управления (см. [1, с. 24] и [2, с. 20]). Отличие заключается лишь в том, что одни и те же физические величины могут в зависимости от постановки задачи считаться либо координатами, т.е. величинами, подчиняющимися дифференциальным уравнениям, либо управлениями, т.е. величинами, которые могут изменяться во времени по произвольному закону.

При определении полного изменения функции координат системы подобно тому, как это делалось для случая векторного управления [2], имеет смысл рассматривать различные нормы конечномерного пространства значений векторной функции. Это позволяет учитывать ограничения, например, на направление прилагаемого импульса скорости летательного аппарата, на возможные направления перевозок грузов при их транспортировке и т.д.

2. Постановка оптимальной задачи с ограничением на изменение векторной функции координат системы

Задача 1. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – вектор фазовых координат, $u = (u_1, \ldots \ldots, u_r)^T$ – вектор управляющих воздействий.

Требуется найти управляющее воздействие $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (при нефиксированном t_1), которое доставляет минимум функционалу

$$\int_{t_1}^{t_0} F(x(t), u(t))dt$$

при следующих условиях:

1) выполняются дифференциальные уравнения $\dot{x} = f(x, u)$;

2) на концах траектории наложены связи на фазовые координаты $S_0(x(t_0)) = 0$, $S_1(x(t_1)) = 0$, где S_0 и S_1 – вектор-функции размерности m_0 и m_1, соответственно;

3) значения управления принадлежат ограниченному замкнутому множеству D: $u \in D$;

4) ограничено полное изменение векторной функции координат системы:

$$V_{t_0}^{t_1} g(x(t)) \leqslant S,$$

где g – дважды непрерывно дифференцируемая функция n независимых переменных со значениями в q-мерном нормированном пространстве G с нормой $\|\cdot\|$, при помощи которой определено полное изменение q-мерных функций [1].

3. Необходимое условие оптимальности в задаче с ограничением на изменение векторной функции координат системы

Теорема. Если $u^0(t)$, $x^0(t)$ – оптимальные управление и траектория в задаче с ограничениями на значения управления и полное изменение векторной функции координат системы, то найдутся неотрицательное число α, n-мерная вектор-функция $\psi(t)$ и ограниченная q-мерная вектор-функция $\beta^0(t)$ такие, что:

1) функции $x^0(t)$, $u^0(t)$, $\psi(t)$, $\beta^0(t)$ и число α почти всюду удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\dot{\psi} = -\widetilde{H}'_x \left(x^0, u^0, \psi(t), \beta^0(t)\right),$$

где $\widetilde{H}$ – следующая функция переменных x, u, ψ, α, β [2]:

$$\widetilde{H}(x, u, \psi, \alpha, \beta) = (f(x, u), \psi) - (f(x, u), (g(x), \beta)'_x) - \alpha F(x, u);$$

---

[1] Полное изменение вектор-функции $h(t)$, заданной на отрезке $[t_0, t_1]$ со значениями в q-мерном нормированном пространстве G с нормой $\|\cdot\|$, определяется как

$$V_{t_0}^{t_1} h(t) = \sup \sum_{k=1}^{m} \|h(\tau_k) - h(\tau_{k-1})\|,$$

где точная верхняя грань берется по возможным конечным разбиениям отрезка $[t_0, t_1]$ точками τ_k: $(t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{m-1} < \tau_m = t_1)$.

[2] Здесь и далее использовано обозначение $(z, y) = \sum_{i=1}^{\ell} z_i \cdot y_i$, где z и y – векторы размерности ℓ.

функция $\psi(t)$ *удовлетворяет граничным условиям*

$$\psi(t_0) = S'^T_{0x}(x^0(t_0))c_0, \quad \psi(t_1) = S'^T_{1x}(x^0(t_1))c_1,$$

где c_0, c_1 *– векторы размерности* m_0 *и* m_1;

2) *почти при всех* $t \in [t_0, t_1]$ *точка* $u^0(t)$, $\beta^0(t)$ *является седловой точкой функции* $\widetilde{H}(x^0(t), u, \psi(t), \alpha, \beta)$ *на множестве* $\{u, \beta : \ u \in D; \ \|\beta\|^* \leqslant b_0\}$:

$$\min_{\beta:\ \|\beta\|^* \leqslant b_0} \widetilde{H}\left(x^0(t), u^0(t), \psi(t), \alpha, \beta\right) = \widetilde{H}\left(x^0(t), u^0(t), \psi(t), \alpha, \beta^0(t)\right) = \tag{1}$$
$$= \max_{u \in D} \widetilde{H}\left(x^0(t), u, \psi(t), \alpha, \beta^0(t)\right),$$

где b_0 *– существенный максимум по* t *функции* $\|\beta^0(t)\|^*$, *а* $\|\cdot\|^*$ *– норма пространства, сопряженного пространству* G :

$$b_0 = \operatorname{vrai}\max_{t \in [t_1, t_2]} \left\|\beta^0(t)\right\|^*;$$

3) *значение функции* $\widetilde{H}$ *в седловых точках почти при любом* t *постоянно и равно нулю*:

$$\widetilde{H}\left(x^0(t), u^0(t), \psi(t), \alpha, \beta^0(t)\right) = 0; \tag{2}$$

4) *выполнено условие нормировки*:

$$\alpha + b_0 + \Big(\psi(t_0), \psi(t_0)\Big) > 0. \tag{3}$$

Для задач, в которых полное изменение векторной функции координат системы выступает в качестве минимизируемого функционала, необходимые условия оптимальности имеют тот же вид, что и в приведенной теореме, поскольку минимизируемый функционал и ограничение входят в уравнение Эйлера одинаково [3].

4. Примеры

Приводимые в примерах соотношения выполняются почти всюду по t.

Пример 1. Для объекта, описываемого уравнениями $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1$, $\dot{x}_3 = x_2$, рассмотрим задачу попадания в начало координат из начальной точки $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)$ за кратчайшее время T при ограничении на управление $|u| \leqslant 1$ и на полное изменение координаты x_2 системы $V_0^T x_2(t) \leqslant S$.

Для этой задачи

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T, \ f(x, u) = (u, x_1, x_2)^T, \ g(x) = x_2, \ (g(x), \beta)'_x = (0, \beta, 0)^T,$$
$$\widetilde{H}(x, u, \psi, \alpha, \beta) = u\psi_1 + x_1(\psi_2 - \beta) + x_2\psi_3 + \alpha,$$
$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2 + \beta, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_3, \quad \dot{\psi}_3 = 0,$$
$$\psi_2(t) = \psi_2^{(0)} - \psi_3^{(0)} t, \quad \psi_3(t) = \psi_3^{(0)}.$$

Если $\psi_1(t) \neq 0$, то максимальность функции $\widetilde{H}$ по u дает $u^0(t) = \operatorname{sign}\psi_1(t)$. Если $x_1(t) \neq 0$, то минимальность функции $\widetilde{H}$ по β дает $\beta^0(t) = b_0 \operatorname{sign} x_1(t)$. Условие оптимальности допускает в оптимальном режиме отрезок времени $[t_1, t_2]$, на котором $x_1(t) = 0$, $u(t) = 0$, $\psi_1(t) = 0$, $\beta^0(t) = \psi_2(t)$ (при $\psi_2(t) < b_0$). Два других участка

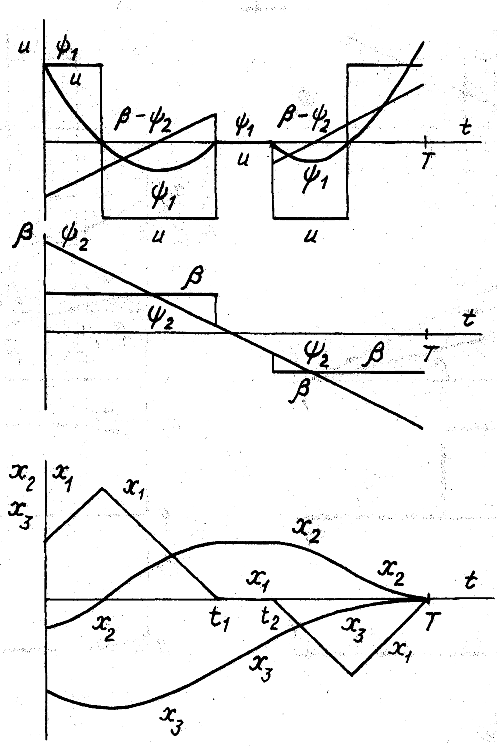

Рис. 1

(один – при $\beta^0 = b_0$, другой – при $\beta^0 = -b_0$) примыкают к отрезку $(t_1, t_2]$ справа и слева и могут иметь по одной смене знака управления. За счет выбора параметров $\psi_1^{(0)}$, $\psi_2^{(0)}$, $\psi_3^{(0)}$, b_0, t_1 и t_2 можно удовлетворить требования на значения координат на правом конце траектории и на значения x_1 и ψ_1 в точке $t_1(x_1(t_1) = 0,\ \psi_1(t_1) = 0)$ и на равенство полного изменения величины x_2 заданному предельному значению S.

На рис. 1 приведены функции $u^0(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\beta^0(t) - \psi_2(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

Пример 2. Для объекта, описываемого системой дифференциальных уравнений $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $\dot{x}_3 = x_1$, $\dot{x}_4 = x_2$, рассмотрим задачу о максимизации отклонения величины $c_1x_3 + c_2x_4$ в момент времени $t = T$ при ограничении на значение управления $u = (u_1, u_2)^T$ $(u \in D)$ и на полное изменение векторной функции $V_0^T g(x(t)) \leqslant S$, где $g(x) = (g_1, g_2)^T = (x_1, x_2)^T$.

Функция $\widetilde{H}$, дифференциальные уравнения для сопряженных переменных и их решения с учетом условий трансверсальности имеют вид:

$$\widetilde{H} = u_1(\psi_1 - \beta_1) + u_2(\psi_2 - \beta_2) + x_1\psi_3 + c_1x_1 + c_2x_2,$$
$$\dot{\psi}_1 = -\psi_3 - c_1, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_4 - c_2, \quad \dot{\psi}_3 = 0, \quad \dot{\psi}_4 = 0,$$
$$\psi_1(t) = c_1(T - t), \quad \psi_2(t) = c_2(T - t), \quad \psi_3(t) = 0, \quad \psi_4(t) = 0.$$

Введем двухмерный вектор $\psi^1 = (\psi_1, \psi_2)^T$.

Будут рассмотрены четыре варианта задачи примера 2, отличающихся различными видами множества D $(D = D_1$ и $D = D_2)$ и нормы $||g||$ $(||g|| = ||g||_1$ и $||g|| = ||g||_2)$.

Непосредственная проверка убеждает в справедливости следующих четырех утверждений.

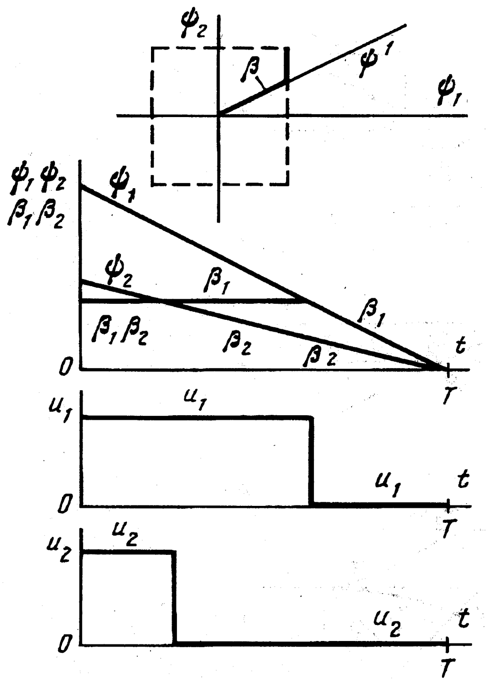

Рис. 2

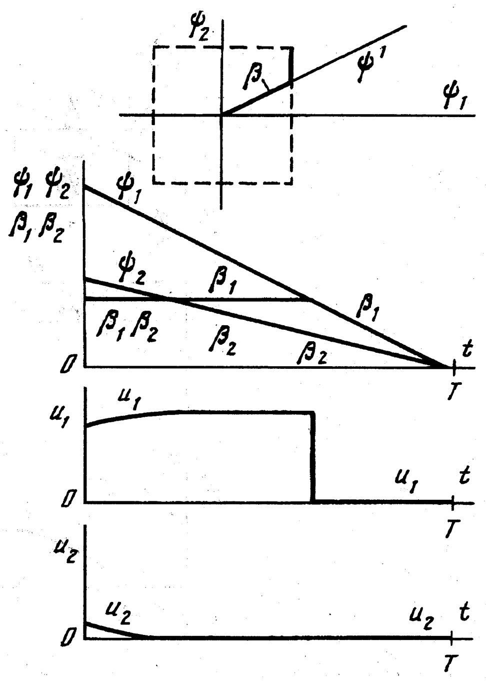

Рис. 3

Утверждение 1. Если $D = D_1 = \{u_1, u_2 :\ u_1^2 + u_2^2 - R^2 \leqslant 0\}$, то максимальность функции $\widetilde{H}$ по u при фиксированном β^0 означает, что вектор u направлен по вектору $\psi^1(t) - \beta^0$ и имеет модуль, равный R.

Утверждение 2. Если $D = D_2 = \{u_1, u_2 :\ |u_1| \leqslant R,\ |u_2| \leqslant R\}$, то максимальность функции $\widetilde{H}$ по u при фиксированном β^0 означает, что компоненты управления u при ненулевых разностях $\psi_i - \beta_i^0$ принимают предельно допустимые значения соответствующих знаков или же промежуточные значения при нулевых значениях этих разностей.

Утверждение 3. Если $\|g\| = \|g\|_1 = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$, то минимальность функции $\widetilde{H}$ по β при $\|\beta\|^* \leqslant b_0$ и фиксированном векторе управления u^0 означает, что вектор β направлен по вектору u^0 и имеет длину, равную b_0, так как сопряженная норма $\|\cdot\|^*$ совпадает с нормой $\|\cdot\|$, и сфера в этой норме представляет собой окружность (см. рис. 2 и 3).

Утверждение 4. Если $\|g\| = \|g\|_2 = |g_1| + |g_2|$, то минимальность функции $\widetilde{H}$ по β при $\|\beta\|^* \leqslant b_0$ и фиксированном векторе управления u^0 означает, что если компонента u_i имеет ненулевое значение, то компонента β_i имеет модуль, равный b_0, и совпадает с u_i^0 по знаку, так как сопряженная норма имеет вид $\|\beta\|^* = \max(\beta_1, \beta_2)$, и сфера радиуса b_0 представляет собой квадрат (см. рис. 4 и 5).

Для уменьшения громоздкости выкладок будем считать, что $0{,}5 > c_1 > c_2 > 0$. Учет других соотношений c_1 и c_2, а также их знаков не представляет трудности.

Рис. 2–5 отражают оптимальные решения каждого из четырех вариантов задачи примера 2. В плоскости (ψ_1, ψ_2) показана траектория двухмерного вектора $\psi^1 = (\psi_1, \psi_2)^T$. Пунктиром показана сфера радиуса b_0 в пространстве, сопряженном пространству с нормой $\|g\|$. Жирной линией изображена траектория вектора β^0. Приведены в функции времени величины ψ_1, ψ_2, β_1^0, β_2^0, u_1^0 и u_2^0 для оптимального режима.

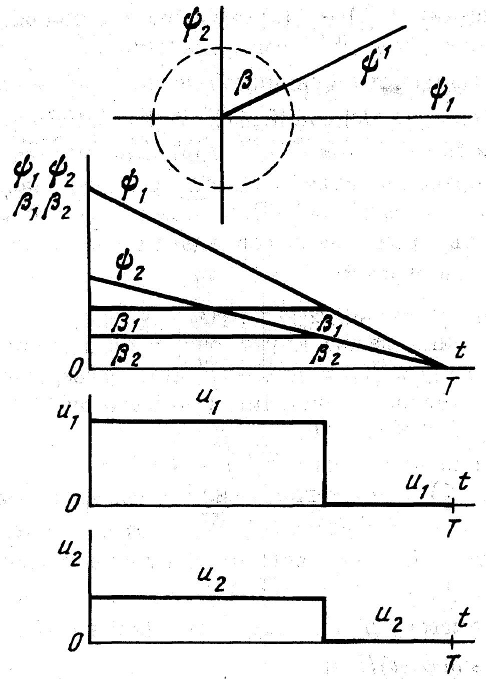

Рис. 4

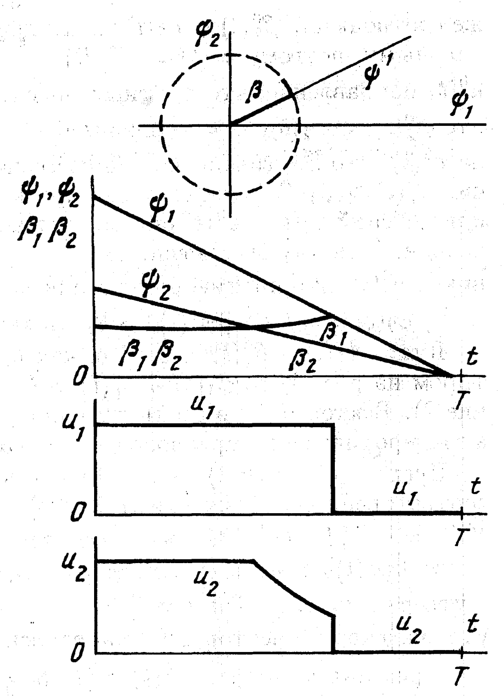

Рис. 5

Задачи примера 2 могут трактоваться как задачи о плоском движении материальной точки в условиях невесомости с ограничениями на ускорение и на суммарный импульс компонент тяги. Задание нормы функции g в виде $\|g\| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$ соответствует наличию по каждой из осей своего двигателя, причем они работают от общего резервуара (см. [2, с. 20]). Ограничение на значение тяги в варианте 1 можно трактовать как ограничение на перегрузку, зависящее от направления тяги. В остальных вариантах это – ограничение на значение тяги соответствующих двигателей.

Вариант 1: $\|g\| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$, $D = \{u_1, u_2 : u_1^2 + u_2^2 - R^2 \leqslant 0\}$.

Пусть в точке t $\|\psi^1(t)\| > b_0$. Векторы $u^0(t)$ и $\beta^0(t)$ направлены по вектору $\psi^1(t)$, имея модули R и b_0, соответственно, что вытекает из условия седловой точки функции $\widetilde{H}$ с учетом утверждений 1 и 3.

Пусть в точке t выполняется неравенство $\|\psi^1(t)\| < b_0$. Тогда $\psi^1(t) - \beta^0(t) = 0$ и $u^0(t) = 0$. Действительно, при $u^0(t) \neq 0$ вектор $\beta^0(t)$ направлен по вектору $u^0(t)$ в силу $\beta^0(t) = fu^0(t)$, $f > 0$ и $\|\beta^0(t)\| = b_0$. Вектор же $u^0(t)$ в силу утверждения 1 направлен по вектору $\psi^1(t) - \beta^0(t) : u^0(t) = k(\psi^1(t) - \beta^0(t))$, $k > 0$. Поэтому $\beta^0(t) = e\psi_1(t)$, где $e = kf/(1+kf) < 1$. Тогда $\|\beta^0(t)\| = e\|\psi^1(t)\|$, но $\|\psi^1(t)\| < b$. Поэтому $b_0 < b_0$ – противоречие.

Графически режим представлен на рис. 2.

Вариант 2: $\|g\| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$, $D = \{u_1, u_2 :\ |u_i| \leqslant R\}$.

Рассмотрим три случая соотношений между величинами $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ и b_0.

а) $\psi_2(t) > b_0/\sqrt{2}$.

Пусть $\beta^0(t) = b_0(1,1)^T/\sqrt{2}$. Тогда векторы $\beta^0(t)$ и $u^0(t) = (R, R)^T/\sqrt{2}$ удовлетворяют условиям седловой точки в силу утверждений 2 и 3.

Пусть $\beta_2^0(t) > b_0\sqrt{2}$. Тогда получаем $u^0(t) = (R, -R)^T$, причем $\beta^0(t)$ не направлен по $u^0(t)$, что противоречит минимальности функции $\widetilde{H}$ по β; при выполнении же соотношения $\beta_2^0(t) < \psi_2(t)$ знаки приращений $\psi_i(t) - \beta_i(t)$ оказываются положительными, поэтому $u_0(t) = (R, R)^T$, в то время как $\beta^0(t)$ имеет не совпадающее с $u^0(t)$ направление, что противоречит минимальности функции $\widetilde{H}$ по β. Возможно, что $\beta_2^0(t) < \psi_2(t)$, а это означает, что $u^0(t) = (R, R)^T$ при $\beta(t)$, не направленной по $u^0(t)$, что противоречит минимальности $\widetilde{H}$ по β; при выполнении же соотношения $\beta_1^0(t) > \psi_1(t)$ (это возможно при некоторых значениях отношения c_1/c_2) знаки приращений $\psi_i(t) - \beta_i^0(t)$ определяют вид вектора $u^0(t) = (-R, R)^T$, вектор же $\beta^0(t)$ находится между биссектрисами 1-го и 4-го квадрантов и не совпадает по направлению с $u^0(t)$, что противоречит минимальности $\widetilde{H}$ по β.

б) $\psi_2(t) < b_0/\sqrt{2}$, $\|\psi^1(t)\| > b_0$. Покажем, что тогда $\psi_2(t) - \beta_2^0(t) = 0$.

Пусть $\psi_2(t) - \beta_2^0(t) < 0$. Так как $\beta_0(t)$ принадлежит кругу, очерченному пунктиром на рис. 3, то $\psi_1(t) - \beta_1^0(t) > 0$. Поэтому $u^0(t) = R(1, -1)^T$ (см. утверждение 2). Вектор $\beta^0(t)$ в соответствии с утверждением 3 направлен по вектору $u^0(t)$, а это противоречит предположению, что $\psi_2(t) - \beta_2^0(t) < 0$.

Пусть $\psi_2(t) - \beta_2^0(t) > 0$. Поскольку отмечалось, что $\psi_1(t) - \beta_1^0(t) > 0$, то в соответствии с утверждением 2 $u^0(t) = R(1, 1)^T$. Но тогда в силу утверждения 3 $\beta^0(t) = b_0(1, 1)^T/\sqrt{2}$. Мы же рассматриваем случай $\psi_2(t) < b_0 \cdot \sqrt{2}$. Противоречие.

Из $\|\psi^1(t)\| > b_0$ получаем $\psi_1(t) - \beta_1^0(t) > 0$. Поэтому $u_1^0(t) = R$ в соответствии с утверждением 2. Так как $\|\beta^0(t)\| = b_0$, то $\beta_1^0(t) = \sqrt{b_0^2 - \psi_2^2(t)}$. В соответствии с утверждением 3 вектор $u^0(t)$ направлен по вектору $\beta^0(t)$, откуда находится $u_2^0(t)$.

В результате имеем: $u^0(t) = (R, R\,\mathrm{tg}\,[\arcsin(\psi_2(t)/b_0)])^T$.

в) $\|\psi^1(t)\| < b_0$. Тогда $u^0(t) = 0$, $\beta^0(t) = \psi^1(t)$. Действительно, если $u^0(t) \neq 0$, то по утверждению 2 вектор $u^0(t)$ принадлежит тому же квадранту, что и вектор $\psi^1(t) - \beta^0(t)$. Тогда по утверждению 3 вектор $\beta^0(t)$ направлен по вектору $u^0(t)$ и имеет модуль, равный b_0. Разность $\psi^1(t) - \beta^0(t)$ получается прибавлением к вектору $(-\beta^0(t))$ вектора $\psi^1(t)$. Вектор $(-\beta^0(t))$ принадлежит квадранту, противоположному квадранту, содержащему $u^0(t)$. Поскольку $\|\psi^1(t)\| < b_0$, то разность $\psi^1(t) - \beta^0(t)$ не может попасть в квадрант, содержащий $u^0(t)$. Противоречие.

Вариант 3: $\|g\| = |g_1| + |g_2|$, $D = \{u_1, u_2 : \ u_1^2 + u_2^2 - R^2 \leqslant 0\}$.

Рассмотрим три случая соотношения между величинами $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ и b_0.

а) $\psi_2(t) > b_0$. Вектор $\beta^0(t) = b_0(1, 1)^T$ и вектор $u^0(t)$ длины R, совпадающий по направлению с вектором $\psi^1(t) - \beta^0(t)$, удовлетворяют условию минимакса функции $\widetilde{H}$ в силу свойств рассмотренного вектора $\beta^0(t)$, вытекающих из утверждения 4, и свойств вектора $u^0(t)$, вытекающих из утверждения 1.

Так как в рассматриваемом случае вектор $\psi^1(t) - \beta^0(t)$ имеет положительные компоненты (см. рис. 4), то вектор $u^0(t)$ имеет также положительные компоненты. Возможные значения вектора $\beta^0(t)$ отличаются от вектора $\beta^0(t) = b_0(1, 1)^T$ на приращения, каждое из которых неположительно, так как минимизация функции $\widetilde{H}$ по β проводится на множестве $\|\beta\|^* \leqslant b_0$, которое представляет собой квадрат (см. рис. 4). Поэтому отклонение вектора β^0 от вектора $b_0(1, 1)^T$ в пределах этого квадрата может только увеличить значение функции $\widetilde{H}$, что означает отсутствие минимальности этой функции по β.

б) $\psi_2(t) < b_0$, $\psi_1(t) > b_0$. Тогда $\psi_2(t) - \beta_2^0(t) = 0$. Пусть $\psi_2(t) - \beta_2^0(t) < 0$. По утверждению 1 вектор $u^0(t)$ направлен по вектору $\psi^1(t) - \beta^0(t)$. Поэтому $u_2^0(t) <$ < 0. Но в этом случае из минимальности функции $\widetilde{H}$ по β следует $\beta_2 = -b_0$. По предположению $\beta_2^0(t) > \psi_2(t) > 0$. Противоречие. Аналогично рассматривается случай $\psi_2(t) - \beta_2^0(t) > 0$.

в) $\psi_1(t) < b_0$, $\psi_2(t) < b_0$. Тогда $\psi^1(t) - \beta^0(t) = 0$. Если $\psi^1(t) - \beta^0(t) \neq 0$, то в соответствии с утверждением 1 вектор $u^0(t)$ направлен по вектору $\psi^1(t) - \beta^0(t)$. Для какого-то из i $(i = 1, 2)$ $\psi_i(t) - \beta_i^0(t) \neq 0$. Пусть $\psi_i(t) - \beta_i(t) > 0$. Тогда $u_i^0 > 0$

и в соответствии с утверждением 4 $\beta_i^0(t) = b_0$, а по предположению $\beta_i(t) < \psi_i(t)$, но $\psi_i(t) < b_0$. Противоречие. Аналогично рассматривается случай $\psi_i(t) - \beta_i^0(t) < 0$.

Вариант 4: $\|g\| = |g_1| + |g_2|$, $D = \{u_1, u_2 : \ |u_i| \leqslant R\}$.

Пусть $\beta_i(t) > b_0$. Тогда $\psi_i^0(t) - \beta_i(t) > 0$ при любом β из квадрата $\|\beta\| \leqslant b_0$. Поэтому $u_i^0(t) = R$. Из минимальности функции $\widetilde{H}$ по β из этого квадрата имеем $\beta_i^0(t) = b_0$.

Пусть $\beta_i(t) > b_0$. Тогда $\psi_i(t) - \beta_i(t) = 0$ и $u_0(t) = 0$.

Предполагая, что $u_i^0(t) > 0$, по минимальности функции $\widetilde{H}$ по β получаем $\beta^0(t) = b_0$, что означает, что $\beta_i^0(t) > \psi_i(t)$, и поэтому $u^0(t) < 0$. Противоречие. Аналогично рассматривается случай $u^0(t) < 0$.

Этот режим представлен на рис. 5.

ПРИЛОЖЕНИЕ

К доказательству теоремы. Приведем основные положения доказательства сформулированной теоремы для случая, когда рассматривается класс малых по норме существенного максимума вариаций управления и малых сдвигов управления по времени, а ограничение на значение управления (4) задается в виде неравенства $\mu(u) \leqslant 0$, где $\mu(u)$ – непрерывно дифференцируемая функция и ${\mu_u}'(u) \neq 0$, если $\mu(u) = 0$. Рассмотрение же ограничения типа (4) сводится (см. [3, с. 430–434]) к малым вариациям применением v-техники, допускающей вариации типа игольчатых. Однако та сторона доказательства, которая относится к рассматриваемому в исследуемой задаче ограничению, остается без изменения.

1. *Переформулировка задачи.* Классу вариаций управления, содержащему малые вариации управления и малые сдвиги управления по времени, соответствует класс малых вариаций, если в исходной задаче сделать следующую замену независимого аргумента:

$$v^0(\tau) = (t_1 - t_0), \quad t(\tau) = t_0 + \int_0^\tau v^0(\eta)d\eta = t_0 + (t_1 - t_0)\int_0^\tau d\eta. \tag{П.1}$$

Можно перейти к задаче с фиксированным значением фазовых координат на левом конце траектории путем следующей замены $x(t) = \widehat{y}(t) + z$, где $\widehat{y}(t_0) = 0$ и z – константа размерности n.

Если $x^0(t)$, $u^0(t)$ – решение исходной задачи, то функции $y^0(\tau) = x^0(t(\tau)) - x^0(0)$, $u^0(\tau) = w^0(t(\tau))$ и константа $z^0 = x^0(t_0)$ будут решениями следующей задачи:

Задача 2. Найти минимум функционала

$$J(y(\tau), w(\tau), z) = \int_0^1 v(\tau)F(y(\tau) + z, w(\tau))d\tau$$

при ограничениях:

$$dy/d\tau = v(\tau)f(y(\tau) + z, w(\tau)),$$
$$S_0(z) = 0, \ S_1(y(1) + z) = 0,$$
$$y(0) = 0, \quad v(\tau) \geqslant 0, \quad V_0^1 g(y(\tau) + z) \leqslant S, \quad \mu(w) \leqslant 0,$$

$v(\tau)$ – ограниченная скалярная функция.

2. *Варьирование задачи 2.* Введем пространство вариаций $\overline{W} = (\overline{y}(\tau), \overline{w}(\tau), \overline{v}(\tau), \overline{z})$, где $\overline{y}(\tau) \in V_{a[0,1]}^n$, $V_{a[0,1]}^n$ – пространство n-мерных абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$ вектор-функций с ограниченным полным изменением, $\overline{w}(\tau) \in \widetilde{M}_{[0,1]}^r$,

$\widetilde{M}^r_{[0,1]}$ – пространство ограниченных измеримых r-мерных вектор-функций, и $\overline{v}(\tau)$ – ограниченная скалярная функция, $z \in R^n$.

3. *Варьирование ограничений на полное изменение векторной функции координат системы.* Найдем множество вариаций, допустимых по ограничению $V_0^1 g(y(\tau) + +z) \leqslant S$. Если $V_0^1 g(y^0(\tau) + z^0) < S$, то множество вариаций, допустимых по этому ограничению, совпадает со всем пространством. Допустим, что $V_0^1 g(y^0(\tau)+z^0) = S$.

Рассмотрим $g(y^0(\tau) + z^0 + \varepsilon y(\tau) + \varepsilon z)$. Ввиду того, что по предположению функция g имеет непрерывные частные производные, функция $g(y^0(\tau) + z^0 + \varepsilon\overline{y}(\tau) + \varepsilon\overline{z})$ является абсолютно непрерывной функцией ограниченного изменения. Имеем:

$$g\left(y^0(\tau) + z^0 + \varepsilon\overline{y}(\tau) + \varepsilon\overline{z}\right) = g(y^0(\tau) + z^0) + \varepsilon g'_x\left(\overline{y}(\tau) + \overline{z}\right) + o\left(\varepsilon, \overline{y}(\tau), \overline{z}\right).$$

Здесь функция $o\left(\varepsilon, \overline{y}(\tau), \overline{z}\right)$ имеет полное изменение, стремящееся к нулю при $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$, ввиду непрерывной дифференцируемости функции $g(y)$.

В связи с этим имеем:

$$V_0^1 g\left(y^0 + z^0 + \overline{y} + \overline{z}\right) = V_0^1\left[g(y^0(\tau) + z^0) + \varepsilon g'_x\left(\overline{y}(\tau) + \overline{z}\right) + o\left(\varepsilon, \overline{y}, \overline{z}\right)\right] =$$
$$= V_0^1\left[g(y^0(\tau) + z^0) + \varepsilon g'_x\left(\overline{y}(\tau) + \overline{z}\right)\right] + o_1\left(\varepsilon, \overline{y}, \overline{z}\right),$$

где $o_1\left(\varepsilon, \overline{y}, \overline{z}\right)/\varepsilon$ стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$ и ограниченных $\overline{y}(\varepsilon)$ ввиду непрерывности вторых производных функций g. Обозначим $g(y^0(\tau) + z^0)$ через $h^0(\tau)$, а $g'_x\left(\overline{y} + \overline{z}\right)$ через $h(\tau)$. Получаем, что значение рассматриваемого полного изменения функции координат системы с точностью до малых высшего порядка совпадает со значением линейно-выпуклого функционала $r(h) = V_0^1 h(\tau)$. Множество допустимых вариаций для ограничения, задаваемого этим функционалом, является выпуклым открытым конусом Ω_r, задаваемым соотношением $r'\left(h^0, \overline{h}\right) < 0$, где $r'\left(h^0, \overline{h}\right)$ – производная функционала $r(h)$ в точке h^0 по направлению $\overline{h}$.

4. *Конус Ω_r^*, сопряженный конусу Ω_r,* состоит из функционалов вида $p(h) = = -\gamma e(h)$, где $\gamma \geqslant 0$, а функционал e принадлежит единичной сфере пространства, сопряженного пространству $V^q_{a[0,1]}$, является опорным к функционалу $r(h)$ и удовлетворяет условию

(П.2) $\qquad e(h^0) = r(h^0).$

Это утверждение вытекает из правил 4.1, 5.1, 6.3 из [3, с. 403, 412, 417] по аналогии с тем, как это делалось в [2, с. 27], где рассматривалось пространство V вектор-функций ограниченного изменения, мы же сейчас рассматриваем пространство $V^q_{a[0,1]}$.

Пространство скалярных абсолютно непрерывных функций ограниченного изменения изоморфно-изометрично пространству L_1 суммируемых функций; каждой абсолютно непрерывной функции ограниченного изменения ставится в соответствие ее почти производная из L_1 (см. [4, с. 18]). Поэтому общий вид линейного функционала в пространстве абсолютно непрерывных скалярных функций ограниченного изменения выражается через таковой для пространства L_1 и, согласно теореме Штейнгауза (см. [5, с. 55]), имеет вид

$$e_1(h) = \int\limits_0^1 \beta_1(\tau)(dh(\tau)/d\tau)d\tau,$$

где $\beta_1(\tau)$ измеримая почти всюду ограниченная функция, а норма функционала определяется так:

$$||e_1|| = \operatorname*{vrai\,max}_{\tau\in[0,1]} ||\beta_1(\tau)||.$$

В случае пространства вектор-функций $V^q_{a[0,1]}$ линейный функционал ввиду своей аддитивности имеет вид:

$$e(h(\tau)) = \int_0^1 \beta^q(\tau), (dh(\tau)/d\tau)d\tau, \tag{П.3}$$

где $\beta^q(\tau)$ – вектор-функция с почти всюду ограниченными измеримыми компонентами $\beta_i(\tau)$. Норма этого функционала:

$$||e|| = \underset{\tau\in[0,1]}{\text{vrai}\max} ||\beta^q(\tau)||^*.$$

Здесь $||\cdot||^*$ – норма q-мерного пространства, сопряженного пространству с нормой, при помощи которой определяется полное изменение в $V^q_{a[0,1]}$. Соотношение (П.3) устанавливается аналогично соответствующему соотношению для скалярного случая с учетом векторного характера рассматриваемых функций и соответствующих соотношений между нормами конечномерного пространства и ему сопряженного.

Полагая $\beta(t) = \gamma\beta^q(t)$, заключаем, что функционал из Ω_1^* имеет вид:

$$-\int_0^1 \beta^0(\tau), \left\{d/d\tau \left[g'_x(y^0(\tau)+z^0)\left(\overline{y}(\tau)+\overline{z}\right)\right]\right\} d\tau, \tag{П.4}$$

где вектор-функция $\beta(\tau)$ в соответствии со свойством (П.2) характеризуется тем, что почти для всех τ

$$\begin{aligned}
&\left(g_x'^{\,T}(y^0(\tau)+z^0)\beta^0(\tau),\ f(y^0(\tau)+z^0, w^0(\tau))\right) = \\
&= \max_{\beta:||\beta||^*\leqslant b} \left(g_x'^{\,*}(y^0(\tau)+z^0)\beta, f(y^0(\tau)+z^0, w^0(\tau))\right), \\
&b = ||\beta(\tau)||^* = \underset{\tau\in[0,1]}{\text{vrai}\max} ||\beta(\tau)||^*.
\end{aligned}$$

Это условие будем записывать короче:

$$\left((g,\beta^0)'_x, f\right) = \max_{\beta:||\beta||^*\leqslant b} \left((g,\beta)'_x, f\right). \tag{П.5}$$

5. *Варьирование минимизируемого функционала и остальных ограничений.* Множество Ω убывания функционала представляет собой выпуклый открытый конус (см. [3]):

$$\int_0^1 \left\{v^0 \left[F'_x, (\overline{y}(\tau)+\overline{z}) + F'_u, \overline{w}(\tau)\right] + \overline{v}F\right\} d\tau < 0.$$

Сопряженный к нему конус Ω^* состоит из функционалов вида:

$$-\alpha \int_0^1 \left\{v^0[F'_x, (\overline{y}(\tau)+\overline{z}) + F'_u, \overline{w}(\tau)] + \overline{v}F\right\} d\tau,$$

где $\alpha \geqslant 0$.

Согласно [3, с. 423], если $\mu[w^0(\tau)] < 0$, то множество вариаций, допустимых по ограничению $\mu(w) \leqslant 0$ совпадает со всем пространством. Если

$$\operatorname*{vrai\,max}_{\tau\in[0,1]} \mu(w^0(\tau)) = 0,$$

то множество допустимых вариаций определяется с помощью неравенства:

$$\text{(П.6)} \qquad m(\overline{y},\overline{w}) = \lim_{\delta\to 0,\delta>0} \operatorname*{vrai\,max}_{\tau\in M_\delta} \mu'_u[w^0(\tau)]\overline{w}(\tau) < 0,$$
$$M_\delta = \left\{\tau : \mu(w^0(\tau)) > -\delta, \quad \delta > 0\right\}.$$

Так как $m(\overline{y},\overline{w})$ – линейно-выпуклый функционал и множество допустимых вариаций не пусто по предположению, что $\mu'_u(w^0(\tau)) \neq 0$, если $\mu(w^0) = 0$, то неравенство (П.6) определяет открытый выпуклый конус Ω_1.

Линейный функционал из конуса Ω_1^* имеет вид $(-\lambda(\overline{w}))$, где функционал $\lambda(\overline{w})$ полностью характеризуется (см. [3, с. 426]) свойствами: $\lambda(\overline{w}) \geqslant 0$ почти всюду, $\lambda(\overline{w}) = 0$, если $\mu'_u(\overline{w}) = 0$ почти всюду на каком-либо M_δ.

Варьирование ограничений типа равенств приводит к подпространству L:

$$\overline{y}(\tau) = y'\left[\overline{w}(\tau),\overline{v}(\tau),\overline{z}\right], \quad S'_{0x}\overline{z} = 0, \quad S'_{1x}\left(\overline{y}(\tau)+\overline{z}\right) = 0,$$

где $y'\left[\overline{w}(\tau),\overline{v}(\tau),\overline{z}\right]$ – решение проварьированной системы

$$\text{(П.7)} \qquad dy'/d\tau = \overline{v}(\tau)f + v^0\left[f'_x(y'+\overline{z}) + f'_u\overline{w}\right], \quad y'\left[\overline{w}(\tau),\overline{v}(\tau),\overline{z}\right]\Big|_{\tau=0} = 0.$$

В предположении о невырожденности траектории $y^0(\tau)$, $w^0(\tau)$, z^0 имеем следующий общий вид линейного функционала из L^*:

$$\ell\left(\overline{y} - y'\left[\overline{w}(\tau),\overline{v}(\tau),\overline{z}\right]\right) + (d_0,\overline{z}) + \left(d_1,(\overline{y}(1)+\overline{z})\right),$$

где ℓ – произвольный линейный функционал в пространстве абсолютно непрерывных функций ограниченного изменения,

$$\text{(П.8)} \qquad d_0 = S'^T_{0x}c_0, \quad d_1 = S'^T_{1x}c_1,$$

c_0, c_1 – некоторые векторы размерности m_0 и m_1.

6. *Уравнение Эйлера.* Поскольку пространство вариаций $\overline{W}$ является полным нормированным пространством, можно применить теорему 3.1 из [3, с. 402], согласно которой для стационарности траектории $y_0(\tau)$, $w_0(\tau)$, z_0, т.е. для того, чтобы пересечение конусов Ω, Ω_1, Ω_r и L было пусто, необходимо и достаточно, чтобы нашлись линейные функционалы по одному из конусов Ω^*, Ω_1^*, Ω_r^* и L^*, не все равные тождественно нулю и в сумме дающие нулевой функционал. Это означает, что при любых $\overline{y}(\tau)$, $\overline{w}(\tau)$, $\overline{v}(\tau)$ и $\overline{z}$ тождественно должно выполняться следующее уравнение Эйлера:

$$\text{(П.9)} \qquad -\alpha\int_0^1 \left\{v^0\left[F'_x,(\overline{y}(\tau)+\overline{z}) + F'_u,\overline{w}(\tau)\right] + \overline{v}F\right\}d\tau -$$
$$-\int_0^1 \beta^0(\tau),\left[d/d\tau\left(g'^T_x\left(\overline{y}(\tau)+\overline{z}\right)\right)\right]d\tau +$$
$$+\lambda(\overline{w}) + \ell\left(\overline{y} - y'\left[\overline{w}(\tau),\overline{v}(\tau),\overline{z}\right]\right) + d_0,\overline{z} + d_1,\left(\overline{y}(1)+\overline{z}\right) = 0,$$

где α, $\lambda(\overline{w})$ и $\beta^0(\tau)$ не равны нулю одновременно.

7. *Анализ уравнения Эйлера.* Если положить $\overline{y}(\tau) = y'\left[\overline{w}(\tau), \overline{v}(\tau), \overline{z}\right]$, то, учитывая (П.7) и соотношение $\beta^T d/d\tau(g'_x) = v^0 f^T(g,\beta)''^T_{xx}$, уравнение (П.9) можно переписать в виде:

$$
\begin{aligned}
\text{(П.10)}\qquad & -\alpha\int_0^1\left\{v^0\left[F'_x,(y'+\overline{z})+F'_u,\overline{w}(\tau)\right]+\overline{v}F\right\}d\tau-\\
& -v^0\int_0^1 f^T(g,\beta)''^T_{xx}(y'+\overline{z})d\tau-\int_0^1\overline{v}(g,\beta^0)'^T_x f d\tau-\\
& -v^0\int_0^1 (g,\beta)'^T_x f'_x(y'+\overline{z})d\tau-\\
& -v^0\int_0^1 (g,\beta)'^T_x f'_u\overline{w}d\tau-\lambda(\overline{w})+d_0,\overline{z}+d_1,\left(y'(1)+\overline{z}\right)=0.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим вектор-функцию $\psi(\tau)$, удовлетворяющую следующим уравнению и граничному условию:

$$
\text{(П.11)}\qquad -d\psi/d\tau = v^0\left[f'^T_x\psi-\alpha F'_x-f'^T_x(g,\beta^0)'_x-(g,\beta^0)''_{xx}f\right],\quad \psi(1)=d_1.
$$

Используя это уравнение и условие $y'|_{\tau=0}=0$, путем применения формулы интегрирования по частям для функций $y'(\tau)$ и $\psi(\tau)$ можно получить:

$$
\begin{aligned}
\text{(П.12)}\qquad & -v^0\int_0^1\left[\alpha F'^T_x+f^T(g,\beta^0)''_{xx}+(g,\beta^0)'^T_x f'_x\right]y'd\tau=\\
& =\int_0^1\overline{v}\psi,fd\tau+v^0\int_0^1\psi^T f'_u,\overline{w}d\tau+v^0\int_0^1\psi^T f'_x,\overline{z}d\tau-d_1,y'(1).
\end{aligned}
$$

Подставляя это выражение в уравнение (П.10) и приравнивая отдельно члены с $\overline{v}(\tau)$, $\overline{z}$ и $\overline{w}(\tau)$, с учетом обозначения $\widetilde{H}=f^T\psi-f^T(g,\beta)'_x-\alpha F$ получим систему уравнений:

$$
\text{(П.13)}\qquad \int_0^1\widetilde{H}\overline{v}(\tau)d\tau=0,
$$

$$
\text{(П.14)}\qquad \overline{z},\left[v^0\int_0^1\widetilde{H}'_x d\tau+d_0+d_1\right]=0,
$$

$$
\text{(П.15)}\qquad v^0\int_0^1\widetilde{H}'_u\overline{w}(\tau)d\tau=\lambda(\overline{w}).
$$

Если учесть, что $\overline{v}(\tau)$ – произвольная ограниченная функция, то из уравнения (П.13) следует, что функция $\widetilde{H}$ постоянна на траектории почти всюду:

$$
\widetilde{H}(y^0(\tau)+z^0,w^0(\tau),\psi(\tau),\alpha,\beta^0(\tau))=0.
$$

Используя произвольность $\overline{z}$ в уравнении (П.14), с учетом уравнений (П.8) и (П.11) получаем, что $\psi(\tau)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$\text{(П.16)} \qquad \psi(0) = S_{0x}'^{T}(z^0)c_0, \quad \psi(1) = S_{1x}'^{T}(y^0(1) + z^0)c_1,$$

где c_0 и c_1 – некоторые векторы размерности m_0 и m_1.

Из уравнения (П.15) и из свойств функционала $\lambda(\overline{w})$ следует, что $\widetilde{H}'_u = 0$ почти всюду на любом множестве, на котором $\mu(w^0) = 0$, а поэтому $\mu(w^0) = 0$ почти всюду там, где $\widetilde{H}'_u \neq 0$, и $(\widetilde{H}'_u)\overline{w} \leqslant 0$ на $\overline{w}(\tau)$, для которого $\mu'_u\overline{w} < 0$ на каком-либо M_σ (см. [3, с. 428]). Это означает, что функция $\widetilde{H}$ как функция управления почти всюду достигает на оптимальном управлении локального максимума по управлению.

Учитывая, что $\beta^0(\tau)$ в соответствии с (П.5) обеспечивает почти всюду максимальность по β выражения $((g,\beta)'_x, f)$, которое входит в функцию $\widetilde{H}$ со знаком минус, устанавливаем наличие у функции $\widetilde{H}$ седловой точки (максимальность по w и минимальность по β). Значение же функции $\widetilde{H}$ в этой седловой точке равно нулю согласно (П.13).

Переходя от переменных τ, y, z, w к переменным t, x, u получаем, что утверждения теоремы верны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чупрун Б. Е.* Задачи с ограничением на изменение управления // АиТ. 1975. № 3. С. 24–37.
2. *Чупрун Б. Е.* Задачи с ограничением на изменение векторного управления // АиТ. 1976. № 12. С. 20–31.
3. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 3. С. 395–453.
4. *Гросберг Ю. І.* Про лінійні функціонали на просторі функцій обмеженої варіації // Наукові записки пед. інституту. Київ. 1939. Т. 2. С. 17–23.
5. *Банах С.* Курс функціонального аналізу. (Лінійні операції). Київ: Радяньска школа, 1948.

Поступила в редакцию 20.08.97