МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 11, № 6 (1972), 619—623

УДК 511

АСИМПТОТИКА ЧИСЛА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИОФАНТОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

В. И. Берник

Приводится решение задачи о нахождении асимптотики числа решений системы неравенств

$$\|\alpha_i q\| < q^{-\sigma_i} \qquad (i=1,\ldots,n), \qquad \sigma_i > 0,$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i < c\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \qquad q=1,\ldots,N,$$

в предположении, что для вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, начиная с некоторого $Q = \max(q_1, \ldots, q_n)$, выполняется условие

$$\|\alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n\| \geqslant \frac{1}{Q^{n+\lambda}}$$

с любым вещественным $\lambda \geqslant 0$. Библ. 9 назв.

Пусть $f(x)$ — положительная убывающая функция, $f(x) \leqslant 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, $\Psi(N) = \int_1^N f(x)\,dx$. Обозначим через $\lambda(N)$ число решений неравенства

$$\|\alpha q\| < f(q), \quad q = 1,\ldots, N,$$

где α — вещественное число, а $\|\alpha q\|$ есть расстояние αq до ближайшего целого. Шмидт [1] и Эрдёш [2] показали, что $\lambda(N) = \Psi(N) + o(\Psi(N))$ для почти всех α.

Представляет интерес получение подобного рода асимптотики для конкретных α, скажем, $\sqrt{2}$, e, π и т. д. Решению таких задач, а также их обобщений на случай систем неравенства посвящены [3], [4], [2], [5].

Ленг в [3] ввел понятие типа числа, которое было обобщено Адамсом в [6] на случай системы чисел.

Пусть $\alpha_1,\ldots,\ \alpha_n$ — вещественные числа. Скажем, что $\alpha_1,\ldots,\ \alpha_n$ имеют тип $g(Q)$, если для всех достаточно больших $Q = \max(q_1,\ldots,\ q_n)$

$$\|\alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n\| \geqslant \frac{1}{Q^n g(Q)}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать функции $g(x)$ только вида x^λ, $\lambda \geqslant 0$ — вещественное число.

Из результатов Хинчина [7] следует, что почти все системы чисел $(\alpha_1,\ldots,\ \alpha_n)$ имеют тип $\log^{1+\varepsilon} x$, однако до сих пор мы знаем очень мало представителей такого типа. Если о системе чисел известно, что она имеет тип x^λ, то метод Ленга для $\lambda = 1$, $n > 1$ и метод Адамса при $\lambda > \frac{n+1}{n(n+2)}$ не дают никаких результатов, так как при указанных значениях λ остаток поглощает главный член. Например, метод Ленга не дает асимптотики числа решений неравенств $\|\pi q\| < f(q)$ ни для какой убывающей функции $f(x)$, так как о π пока известно [8], что π — число типа x^{41}.

В настоящей работе, развивая идею Спринджука [4], мы получаем результат, дающий асимптотику числа решений для систем чисел типа x^λ, $\lambda \geqslant 0$ — любое вещественное число. В частности, мы показываем, что число решений неравенств $\|\pi q\| < q^{-\sigma}$, $0 < \sigma < 1/42$, $q = 1,\ldots,N$, асимптотически равно

$$\frac{1}{1-\sigma} N^{1-\sigma} + O\left(N^{(42-\sigma)/43}\right).$$

Пусть $[\alpha_1,\ \beta_1)\ldots\ [\alpha_n,\ \beta_n)$ — некоторый параллелепипед в n-мерном единичном кубе. Скажем, что система векторов $a_q = (\alpha_q^{(1)},\ \ldots,\ \alpha_q^{(n)})$ обладает свойством (A), если для числа $M(N)$ векторов a_q таких, что

$$\alpha_q^{(i)} \in [\alpha_i,\ \beta_i) \qquad (i = 1,\ldots,\ n),$$

асимптотически справедливо равенство

$$M(N) = N\cdot(\beta_1 - \alpha_1)\ldots(\beta_n - \alpha_n) + O(N^\mu),$$
$$0 \leqslant \mu < 1,$$

где μ не зависит от N.

Связь понятия типа с условием (A) показывает

ЛЕММА. *Пусть вещественные числа* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *имеют тип* x^λ, $\lambda \geqslant 0$. *Тогда для системы векторов*

$$a_q = (2\|\alpha_1 q\|, \ldots, 2\|\alpha_n q\|)$$

выполняется условие (A) *с* $\mu = 1 - \frac{1}{\lambda + n}$.

Доказательство леммы без труда проводится методом «стаканчиков» Виноградова ([9], стр. 260). Из леммы видна бо́льшая общность условия (A) по сравнению с понятием типа.

Мы доказываем две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть вещественные числа* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *имеют тип* x^λ, $\lambda \geqslant 0$. $\lambda(N)$ — *число решений неравенств*

$$\|\alpha_i q\| < q^{-\sigma_i} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\sigma_i > 0,\ \sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i < 1/(\lambda + n), \quad q = 1, \ldots, N.$$

Тогда при $N \to \infty$

$$\lambda(N) = \frac{1}{1-\sigma} N^{1-\sigma} + O\left(N^{\frac{\lambda+n-\sigma}{\lambda+n+1}}\right).$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть система векторов* a_q *удовлетворяет условию* (A),

$$\Psi(x) = \frac{\omega(x)}{x} = f_1(x) \ldots f_n(x),$$

где $f_i(x) \leqslant 1$ *и убывают,* $x/\omega(x)$ *возрастает, а* $\omega(x)/x^\mu$ *возрастает неограниченно для достаточно больших* x. *Обозначим через* $\lambda(N)$ *число векторов* a_q, *для которых* $\alpha_q^{(i)} < f_i(q)$ $(i = 1,\ldots, n)$, $q = 1,\ldots, N$. *Тогда при* $N \to \infty$

$$\lambda(N) = \int_1^N \Psi(x)\,dx + O\left(\int_1^N \left(\frac{x^2}{\omega(x)}\right)^{(\mu-1)/(2-\mu)} dx\right).$$

В силу леммы ясно, что теорема 1 является частным случаем теоремы 2 при $n = 1$, $f(x) = x^{-\sigma}$, $\mu = 1 - 1/(\lambda + 1)$.

Доказательство теоремы 2. Обозначим через $\lambda_m(N)$ число векторов $a_l = (\alpha_l^{(1)},\ldots, \alpha_l^{(n)})$, для которых

$$\alpha_l^{(i)} < f_i(l) \qquad (i = 1,\ldots,n), \qquad l = N - m + 1,\ldots,N,$$

где $m = \left(\frac{N^2}{\omega(N)}\right)^{1/(2-\mu)}$. Пусть теперь $\lambda_m^+(N)$ и $\lambda_m^-(N)$ — число векторов a_l, для которых $\alpha_l^{(i)} < f_i(t)$ с t, равным $N - m$ и N соответственно. Так как

$$f_i(N) \leqslant f_i(l) \leqslant f_i(N-m)$$

для $l \in [N - m + 1, N]$, то

$$\lambda_m^-(N) \leqslant \lambda_m(N) \leqslant \lambda_m^+(N),$$

откуда

$$\lambda_m(N) = \lambda_m^-(N) + \theta(\lambda_m^+(N) - \lambda_m^-(N)),$$

где $|\theta| \leqslant 1$. Заметим, что $\lambda_m^+(N)$ и $\lambda_m^-(N)$ есть число векторов a_l, принадлежащих параллелепипедам

$$[0, f_1(N-m)) \ldots [0, f_n(N-m))$$

и

$$[0, f_1(N)) \ldots [0, f_n(N))$$

соответственно. В силу условия (A)

$$\lambda_m^+(N) = m f_1(N-m) \ldots f_n(N-m) + O(m^\mu) = m\Psi(N-m) + O(m^\mu),$$

$$\lambda_m^-(N) = m f_1(N) \ldots f_n(N) + O(m^\mu) = m\Psi(N) + O(m^\mu),$$

откуда

$$\lambda_m(N) = m\Psi(N) + O[m(\Psi(N-m) - \Psi(N)) + m^\mu].$$

Покажем, что $m[\Psi(N-m) - \Psi(N)]$ есть величина порядка m^μ. $\omega(x)$ — функция возрастающая, поэтому $\omega(N-m) \leqslant \omega(N)$; для достаточно больших N, как нетрудно убедиться, $\frac{m}{N} < \frac{1}{2}$ и, значит, $N - m > \frac{N}{2}$,

$$0 \leqslant m[\Psi(N-m) - \Psi(N)] \leqslant m\frac{N\omega(N) - (N-m)\omega(N)}{\frac{1}{2}N \cdot N} =$$

$$= \frac{2m^2\omega(N)}{N^2} = 2m^2 \cdot m^{\mu-2} = 2m^\mu.$$

Теперь заметим, что

$$m\Psi(N) \leqslant \int_{N-m}^{N} \Psi(x)\,dx \leqslant m\Psi(N-m)$$

и

$$\int_{N-m}^{N}\left(\frac{x^2}{\omega(x)}\right)^{(\mu-1)/(2-\mu)}dx \geqslant m\left(\frac{N^2}{\omega(N)}\right)^{(\mu-1)/(2-\mu)} =$$

$$= m\cdot m^{\mu-1} = m^{\mu}.$$

Последнее неравенство имеет место ввиду того, что функция $\frac{x^2}{\omega(x)}$ монотонно возрастает. Теперь легко получаем

$$\lambda_m(N) = \int_{N-m}^{N}\Psi(x)\,dx + O\left(\int_{N-m}^{N}\left(\frac{x^2}{\omega(x)}\right)^{(\mu-1)/(2-\mu)}dx\right).$$

Повторяя проведенные рассуждения с $N-m$ вместо N и т. д., а затем складывая полученные равенства, получим требуемое.

Выражаю искреннюю признательность профессору В. Г. Спринджуку за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Институт математики
АН Белорусской ССР

Поступило
11.II.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Schmidt W., A metrical theorem in diophantine approximations, Canadien J. Math., **11** (1960), 619—631.
[2] Erdos P., Some results on diophantine approximations, Acta Arithmetika, 5. № 4 (1959), 359—369.
[3] Ленг С., Введение в теорию диофантовых приближений, М., 1970.
[4] Спринджук В. Г., Асимптотика числа решений некоторых диофантовых неравенств, Докл. АН СССР, **173**, 4 (1967), 770—772.
[5] Schmidt W., Simultaneous approcimation to a basis of a real number field, Amer. J. Math., 88 (1969), 517—527.
[6] Adams W., Simultaneous asymptotic diophantine approximations, Mathematika, **14** (1967), 173—180.
[7] Khintschine A., Zur Metrischen Theorie der Diophantischen Approximationen, Math. Zeitschrift, **24** (1926), 704—714.
[8] Mahler K., On the approximation of π, Proc. Akad. Wet. Amst., **56**, № 1 (1953), 30—42.
[9] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, «Избранные труды», М., 1952, 237—331.