

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. A. Konyaev, Yu. G. Martynenko, N. G. Panfilov, An Asymptotic Analog of Reducibility Theorems for Some Classes of Nonautonomous Linear Systems,

Differ. Uravn., 2004, Volume 40, Number 3, 330–333

<https://www.mathnet.ru/eng/de11038>

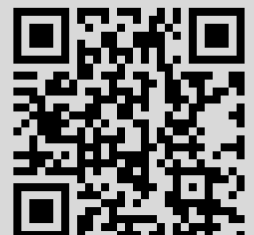
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

April 23, 2025, 20:43:45



===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.926.4

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМ О ПРИВОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕАВТОНОМНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

© 2004 г. Ю. А. Коняев, Ю. Г. Мартыненко, Н. Г. Панфилов

Доказаны асимптотические аналоги теорем о приводимости некоторых классов неавтономных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), что дополняет или уточняет известные ранее результаты [1–10].

Рассмотрим неавтономную систему ОДУ с полиномиально-периодическими коэффициентами

$$\dot{x} = \left(t^m \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) t^{-k} \right) x \quad (x \in R^n; \quad t \geq t_0 > 1; \quad m \geq 1) \quad (1)$$

(где $A_k(t)$ – T -периодические достаточно гладкие матричные функции) в случае, если спектр $\{\lambda_{0,j}(t)\}_1^n$ матрицы $A_0(t)$ удовлетворяет условиям

$$\sigma_{jk}(t) \equiv \lambda_{0j}(t) - \lambda_{0k}(t) \neq 0 \quad (j \neq k; \quad j, k = \overline{1, n}; \quad t \geq t_0). \quad (2)$$

Для удобства изложения для произвольной квадратной матрицы A введем обозначения: $A = \{a_{jk}\}_1^n$, $\bar{A} = \text{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$, $\tilde{A} = A - \bar{A}$. невырожденная достаточно гладкая T -периодическая замена $x = S_0(t)y$, $S_0^{-1}(t)A_0(t)S_0(t) = \Lambda_0(t) = \text{diag}\{\lambda_{01}(t), \dots, \lambda_{0n}(t)\}$ приводит систему (1) к системе

$$\dot{y} = B(t)y, \quad B(t) = t^m \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) t^{-k}, \quad B_0(t) = \Lambda_0(t),$$

которую невырожденной при достаточно больших $t > 1$ заменой

$$y = H(t)z, \quad H(t) = E + \sum_{k=1}^{m+1} \tilde{H}_k(t) t^{-k} \quad (3)$$

приводим к системе с почти диагональной матрицей

$$\dot{z} = Q(t)z, \quad Q(t) = t^m \sum_{k=0}^{m+1} \Lambda_k(t) t^{-k} + O(t^{-2}), \quad (4)$$

если имеет место соотношение

$$\dot{H} = B(t)H - HQ(t). \quad (5)$$

Приравнивая в равенстве (5) коэффициенты при одинаковых степенях t , получим простые алгебраические матричные уравнения вида

$$\Lambda_0(t) \tilde{H}_k(t) - \tilde{H}_k(t) \Lambda_0(t) = \Lambda_k(t) - P_k(t) \quad (k \geq 1)$$

для последовательного и однозначного определения всех диагональных $\Lambda_k(t)$ и “бездиагональных” $\tilde{H}_k(t)$ матриц.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Линейная система (1) в случае, если спектр $\{\lambda_{0,j}(t)\}_1^n$ матрицы $A_0(t)$ удовлетворяет неравенствам (2), может быть с помощью невырожденной при достаточно больших $t > 1$ замены $x = S(t)H(t)z$ преобразована к системе с почти диагональной матрицей вида (4).*

Замечание 1. К системам вида (1) при постоянных матрицах A_k сводится большой класс уравнений гипергеометрического типа $p(t)\ddot{x} + q(t)\dot{x} + \lambda x = 0$ (где $q(t)$ и $p(t)$ – полиномы не выше первой и второй степени соответственно, λ – некоторый постоянный параметр), в частности, уравнения Эйри $\ddot{x} - tx = 0$, Бесселя $t^2\ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - \nu^2)x = 0$, Эрмита $\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2\nu x = 0$ и ряд других.

Замечание 2. Результаты теоремы 1 позволяют получить асимптотическое представление при $t \rightarrow +\infty$ любой гипергеометрической функции. Так, уравнение Бесселя может быть записано в виде системы $\dot{z} = (\sum_{k=0}^2 A_k t^{-k})z$; $z = (x, \dot{x})^T$, где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nu^2 & 0 \end{pmatrix},$$

и после описанного выше алгоритма и соответствующей замены мы приходим к системе (4) с почти диагональной матрицей, где

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = -\frac{1}{2}E, \quad \Lambda_2 = \delta_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix},$$

$$\bar{H}_1 = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{H}_2 = b_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{2\nu^2 + 1}{8}, \quad \delta_2 = \frac{4\nu^2 + 1}{8i},$$

что дает возможность (с точностью до постоянного множителя) записать асимптотическое представление (при $t \rightarrow +\infty$) функций Ханкеля первого $H_\nu^{(1)}(t)$ и второго $H_\nu^{(2)}(t)$ рода:

$$H_\nu^{(1,2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 \pm \frac{i}{4t} + \frac{b_2}{t^2} + O\left(\frac{1}{t^3}\right) \right) \exp(\mp i(t - \delta_2(t)))$$

и аналогичное представление для функций Бесселя с учетом соотношения $J_\nu(t) = 0.5[H_\nu^{(1)}(t) + H_\nu^{(2)}(t)]$.

Уравнение Эрмита позволяет перейти к системе $\dot{z} = (\Lambda_0 t + B_1)z$, где

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\nu & 0 \end{pmatrix},$$

и после соответствующих преобразований построить асимптотику общего решения системы

$$z = \left(E + \sum_{k=1}^3 H_k \frac{1}{t^k} + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \right) \exp\left(\frac{1}{2}\Lambda_0 t^2 + \Lambda_2 \ln t\right) C,$$

где $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = \text{diag}\{\nu, -\nu\}$, $\Lambda_3 = 0$,

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ \nu & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 0 & -0.25(\nu - 1) \\ -0.5\nu(\nu + 1) & 0 \end{pmatrix},$$

и общего решения уравнения Эрмита

$$x = C_1 \left(1 + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \right) t^\nu + C_2 \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{4t^3} + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \right) \frac{1}{t^\nu} e^{t^2},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые могут быть найдены из дополнительных условий.

Замечание 3. С помощью предложенного метода были исследованы на устойчивость малые колебания оси гироскопа на стадии разгона с переменным кинетическим моментом [7], которые достаточно точно описываются системой дифференциальных уравнений четвертого порядка: $\dot{x} = (A_0 t + A_1)x$, $x = (\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})^T$, где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ K & (hR) \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

α и β – углы отклонения гироскопа, h определяются начальным кинетическим моментом, слагаемые $(k_{11}\alpha + k_{12}\beta)$ и $(k_{21}\alpha + k_{22}\beta)$ описывают действие позиционных сил. После замены

$$x = S_0 \left(E + \sum_{k=1}^2 H_k t^{-k} \right) y, \quad S_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

в силу теоремы 1 получаем систему с почти диагональной матрицей $\dot{y} = (\Lambda_0 t + \Lambda_1 + Q_2 t^{-1} + O(t^{-2}))y$, где $\Lambda_0 = \text{diag}\{0, 0, i, -i\}$, $\Lambda_1 = h\Lambda_0$,

$$Q_2 = \begin{pmatrix} Q_{21} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad Q_{21} = \begin{pmatrix} k_{21} & k_{22} \\ -k_{11} & -k_{12} \end{pmatrix},$$

$$Q_{22} = (1/2) \text{diag}\{(k_{12} - k_{21} + i(k_{11} + k_{22})), (k_{12} - k_{21} - i(k_{11} + k_{22}))\}.$$

Это позволяет найти область устойчивости $k_{11}k_{22} \geq k_{12}k_{21}$ ($k_{12} = k_{21}$) малых колебаний осей гироскопа.

Покажем возможность приведения линейной T -периодической возмущенной системы

$$\dot{x} = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \varepsilon^k \right) x \equiv A(t, \varepsilon)x \quad (x \in R^n, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad t \geq 0), \quad (6)$$

где $A_k(t)$ – T -периодические достаточно гладкие матричные функции, в случае, если спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ матрицы A_0 удовлетворяет условиям

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq i \cdot 2\pi q T^{-1} \quad (j \neq k, \quad j, k = \overline{1, n}, \quad q = 0, \pm 1, \dots), \quad (7)$$

к системе с почти постоянной диагональной матрицей вида

$$\dot{z} = Q(t, \varepsilon)z \quad \left(Q(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \Lambda_k \varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}) \quad \forall N \geq 1 \right). \quad (8)$$

Действительно, после невырожденной при достаточно малых ε замены

$$x = S_0 H(t, \varepsilon)z \quad \left(H(t, \varepsilon) = E + \sum_{k=1}^N H_k(t) \varepsilon^k \quad \forall N \geq 1, \quad S_0^{-1} A_0 S_0 = \text{diag}\{\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0n}\} = \Lambda_0 \right) \quad (9)$$

нужный результат имеет место, если справедливо соотношение

$$\dot{H} = B(t, \varepsilon)H - HQ(t, \varepsilon), \quad (10)$$

где $B(t, \varepsilon) = S_0^{-1} A(t, \varepsilon) S_0 = \Lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) \varepsilon^k$. Приравнявая коэффициенты в (10) при одинаковых степенях ε , получим простые дифференциальные матричные уравнения для последовательного и однозначного определения каждой из постоянных диагональных матриц Λ_k и T -периодических матриц $H_k(t)$. Таким образом, доказана

Теорема 2. Система (6) в случае, если спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ матрицы A_0 удовлетворяет условиям (7), может быть с помощью невырожденной при достаточно малых $\varepsilon > 0$ замены (9) преобразована к системе с почти постоянной и диагональной матрицей вида (8).

Замечание 4. Теорема 2 является асимптотическим и в отличие от ранее известного (см., например, [1–6]) конструктивным аналогом теоремы Флоке–Ляпунова с достаточно простым алгоритмом.

Замечание 5. При наличии у матрицы A_0 кратных точек спектра, удовлетворяющих условиям (7), следует воспользоваться так называемым “срезающим преобразованием” (см., например, [9]), что в общем случае приводит к разложению по некоторым дробным степеням малого параметра ε .

Замечание 6. Ограничения вида (7) на наличие резонансных соотношений не являются существенными и их можно убрать, если на соответствующем шаге матрицу Λ_0 представить в виде $\Lambda_0 = \bar{D}_0 + i\bar{C}_0$ ($\bar{C}_0 = 2\pi T^{-1} \text{diag}\{m_1, \dots, m_n\}$), где спектр матрицы \bar{D}_0 уже удовлетворяет условиям (7), что позволяет после замены $y = \exp(i\bar{C}_0)z$ перейти к системе вида (8).

Для иллюстрации рассмотрим пример. Система регулярно возмущенных линейных уравнений [4]

$$\ddot{x} + a^2x = 2\varepsilon y \sin t, \quad \ddot{y} + b^2y = 2\varepsilon x \cos t$$

описывает взаимодействие двух линейных осцилляторов при отсутствии резонансов ($a \neq b$, $ab \neq 0$, $|a \pm b| \neq 1$). Замена $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = y$, $x_4 = \dot{y}$, $z_{1,2} = x_2 \pm ia x_1$, $z_{3,4} = x_4 \pm ib x_3$ позволяет перейти к системе четвертого порядка $\dot{z} = (\Lambda_0 + \varepsilon A_1(t))z$, где

$$z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T, \quad \Lambda_0 = \text{diag}\{ia, -ia, ib, -ib\},$$

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & b^{-1}N_0 \sin t \\ a^{-1}N_0 \cos t & 0 \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

которая с помощью приведенного выше алгоритма может быть преобразована к виду $\dot{v} = (\sum_{k=0}^2 \Lambda_k \varepsilon^k + O(\varepsilon^2))v$, где

$$\Lambda_1 = O, \quad \Lambda_2 = \text{diag}\{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\}, \quad \nu_1 = \nu_2 = -\nu_3 = -\nu_4 = \frac{1}{2ab} \left(\frac{1}{1 - (a+b)^2} - \frac{1}{1 - (a-b)^2} \right).$$

Структура спектра матриц Λ_k ($k = \overline{0,2}$) позволяет сделать вывод о неустойчивости тривиального решения исходной системы при любых действительных параметрах a и b .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М., 1950.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
3. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., 1972.
4. Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М., 1971.
5. Морозов В.М., Каленова В.И. Оценивание и управление в нестационарных линейных системах. М., 1988.
6. Магницкий Н.А. Асимптотические методы анализа нестационарных управляемых систем. М., 1992.
7. Коняев Ю.А., Мартыненко Ю.Г. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1427–1429.
8. Коняев Ю.А., Мартыненко Ю.Г. // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 375–381.
9. Коняев Ю.А. // Мат. сб. 1993. № 12. С. 133–144.
10. Коняев Ю.А. // Изв. вузов. Математика. 2000. № 6. С. 10–15.

Российский университет дружбы народов, г. Москва,
Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
06.01.2001 г.