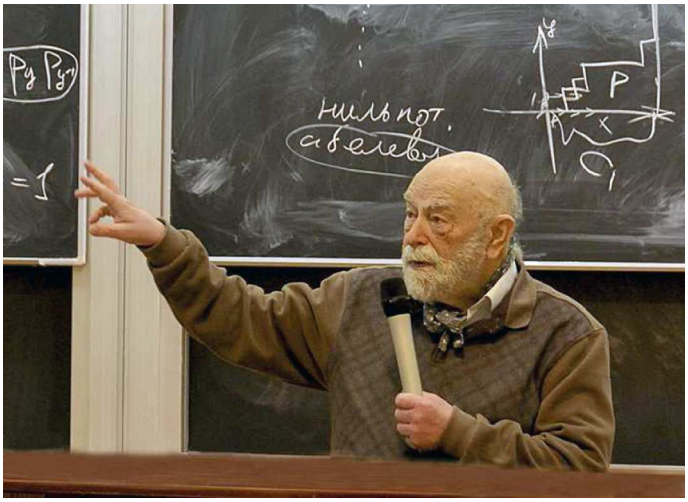
Том 69 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 2
2024

АНАТОЛИЙ МОИСЕЕВИЧ ВЕРШИК
(28.12.1933 – 14.02.2024)



14 февраля 2024 года не стало замечательного петербургского математика Анатолия Моисеевича Вершика.

Анатолий Моисеевич родился 28 декабря 1933 года в пригороде Ленинграда (г. Пушкин) в семье преподавателей. Его мать — Ева Яковлевна Люстерник (1904–1991) была известным востоковедом-индологом, историком русско-индийских отношений, профессором ЛГУ. Отец — Моисей Менделевич Вершик (1904–1992) был преподавателем политэкономии в Ленинградском институте инженеров связи (сейчас это Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича).

В 1951 г. Анатолий Моисеевич окончил с серебряной медалью школу № 222 г. Ленинграда и поступил на математико-механический факультет Ленинградского университета. Свою первую студенческую работу, посвященную функциям матричного аргумента, Анатолий Моисеевич Вершик выполнил под руководством Д. К. Фаддеева, выдающегося алгебраиста, а затем выбрал кафедру математического анализа, где учился функциональному анализу у Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова.

Отказавшись от предложения сразу же по окончании университета в 1956 г. поступить в аспирантуру, Анатолий Моисеевич распределился на работу в один из организованных в то время вычислительных центров. Спустя два года после окончания университета он поступил в аспирантуру математико-механического факультета. Научным руководителем Анатолия Моисеевича был Г. П. Акилов. В 1963 г. Анатолий Моисеевич защитил кандидатскую диссертацию “Теория линейных преобразований, сохраняющих гауссовскую меру”.

Жизнь Анатолия Моисеевича была тесно связана с математико-механическим факультетом ЛГУ–СПбГУ, в котором он прошел путь от ассистента (1962 г.) до профессора (1985 г.). В 1992 г. по приглашению Санкт-Петербургского отделения Математического института Российской академии наук (ПОМИ РАН) Анатолий Моисеевич перешел на работу в этот институт и стал заведующим лабораторией вычислительной математики и теории представлений (позднее — теории представлений и динамических систем), не прекращая преподавания в университете. В 2002 г. Анатолий Моисеевич становится главным научным сотрудником ПОМИ РАН.

Анатолий Моисеевич Вершик был человеком широчайших научных интересов, но ниже мы коснемся только его основных достижений в теории вероятностей.

В конце 60-х гг. Анатолий Моисеевич строит теорию убывающих последовательностей измеримых разбиений и, на ее основе, траекторную эргодическую теорию. Главные результаты в этой области — теорема о лакунарном изоморфизме, открытие нестандартных последовательностей и критерий нестандартности — привели к новым инвариантам в эргодической теории. Эти работы, соединившие идеи аппроксимации разбиений (и действий аменабельных групп) с теорией операторов и факторов фон Неймана, вошли в его докторскую диссертацию “Аппроксимация в теории меры” (1973).

Большое влияние на математические интересы Анатолия Моисеевича оказал В. А. Рохлин, под влиянием которого Анатолий Моисеевич стал заниматься динамическими системами. К этому периоду относятся его работы по теории вероятностей, в которых он стал изучать стационарные гауссовские процессы как динамические системы.

Анатолию Моисеевичу принадлежит фундаментальная теорема о марковской реализации эргодических автоморфизмов, развивающая классическую лемму Рохлина о периодической аппроксимации.

Одна из любимых тем Анатолия Моисеевича, к которой он неизменно возвращался и которая получила в его работах мощное развитие, — теория вероятностных границ и случайных блужданий на группах, полугруппах, графах, градуированных графах. Это красивая, сложная и богатая связями область, вовлекающая теорию вероятностей, эргодическую теорию, теорию групп (а также и комбинаторику, геометрию, топологию, функциональный анализ и т.д.). К данному направлению относится изучение нескольких классов границ групп и пространств, включая границы Мартина, границы Пуассона–Фюрстенберга (называемые также границами Пуассона, границами Фюрстенберга или просто границами), границы–вход и границы–выход Дынкина, которые при переходе от теории марковских процессов к контексту случайных блужданий на группах Анатолий Моисеевич предложил называть также абсолютными границами или абсолютами. В качестве примеров глубоких и широко известных результатов Анатолия Моисеевича в этой области назовем полученный совместно с его учеником В. А. Каймановичем [2] глобальный энтропийный критерий тривиальности границы Пуассона–Фюрстенберга и связанное с этим критерием фундаментальное неравенство, гласящее, что энтропия случайного блуждания в конечно порожденной группе не превышает произведения логарифмического объема группы на снос блуждания. Среди недавних результатов Анатолия Моисеевича по данной тематике отметим полученное совместно с А. В. Малю-

тиным описание абсолюта для случайных блужданий в однородных деревьях, свободных группах, абелевых группах и полугруппах и описание так называемой лапласовой (невырожденной) части абсолюта для нильпотентных групп. Одна из работ указанной серии, дающая полное описание абсолюта дискретной группы Гейзенберга в стандартной системе образующих и доказывающая его компактность, ожидает публикации. Добавим, что полученные Анатолием Моисеевичем результаты в этой области и развитые им методы и подходы обогатили как теорию вероятностных границ и случайных блужданий, так и эргодическую теорию, теорию групп, теорию кос, теорию узлов и т.д.

Из работы над задачами теории представлений, возможно, развился интерес Анатолия Моисеевича к разбиениям целых чисел, вопросы о которых он часто ставил в вероятностной постановке. Разбиения целого числа n естественным образом параметризуют неприводимые представления симметрической группы порядка n. Поэтому естественной является мера Планшереля, при которой вероятность разбиения равна квадрату размерности соответствующего представления, деленному на $n!$. В совместной работе [3] с С. В. Керовым, учеником Анатолия Моисеевича, показано, что при больших n диаграмма Юнга случайного по мере Планшереля разбиения после сжатия в $\sqrt{n}$ раз будет близка к неслучайной кривой — *предельной форме* Вершика–Керова–Логана–Шеппа (последние двое — американские математики, установившие независимо этот же результат примерно в то же время). Более подробно эти результаты и некоторые их уточнения изложены в работе [6]. Меры Планшереля имеют и другую интерпретацию — они являются образом равномерной меры на перестановках множества $\{1, \ldots, n\}$ при соответствии Робинсона–Шенстеда–Кнута (RSK). В частности, максимальное слагаемое в разбиении, полученном алгоритмом RSK из перестановки π, равняется наибольшей длине возрастающей подпоследовательности в π. Уточнение метода, которым была получена предельная форма, позволило Вершику и Керову найти асимптотику первой строки случайной по мере Планшереля диаграммы Юнга, и тем самым, получить решение знаменитой проблемы Улама о наибольшей возрастающей последовательности: длина наибольшей возрастающей последовательности в случайной перестановке $\{1, \ldots, n\}$ после деления на $\sqrt{n}$ сходится по вероятности к константе 2.

Со свойственной ему широтой взглядов на математические задачи, Анатолий Моисеевич не ограничивался изучением одной меры на разбиениях целых чисел. В совместных работах [4], [5] с другим своим учеником, А. А. Шмидтом, исследуется другая мера на разбиениях, также получаемая из случайной перестановки множества $\{1, \ldots, n\}$ другой проекцией на разбиения целого числа n: разбиением на длины циклов перестановки. В работе она называется мерой Хаара, но сейчас она более известна под названием мера Ювенса. В этих работах применялся новаторский подход к изучению этой меры, основанный на изучении предельного ($n \to \infty$) объекта, возникающего при рассмотрении последовательности отображений, переводящих единичный куб размерности n с мерой Лебега в симплекс той же размерности. Изучение предельных объектов и соответствия между ними позволило получить асимптотические результаты о конечных перестановках, в частности, найти более простое описание предельного распределения размера самого длинного цикла, деленного на n, при $n \to \infty$.

Изучение различных мер на разбиениях продолжено в работе [7], где рассматривались равномерные меры на разбиениях числа n, а также широкий класс их обобщений, связанных с задачами статистической механики. Эта связь еще больше прояснена в статье [8]. В частности, установлено, что для рассматриваемого класса мер также будут существовать предельные формы у случайных диаграмм Юнга (для равномерной меры этот факт упоминался уже в работе [6]), объяснено образование конденсата Бозе–Эйнштейна для идеального газа. Предложенная техника, концептуально схожая с техникой пуассонизации, затем применялась многими авторами для более детального изучения различных свойств таких случайных разбиений. Работа [7] является одной из наиболее цитируемых работ Анатолия Моисеевича, Web of Science насчитывает 183 ссылки на нее.

Анатолия Моисеевича привлекала идея построения бесконечномерных аналогов меры Лебега, т.е. мер в бесконечномерном пространстве, которые были бы инвариантны или квазиинвариантны относительно большой и естественной группы преобразований пространства. В качестве таких мер он часто рассматривал пуассоновские меры на пространствах конфигураций. Исходя из нужд теории представлений в работе [1] была построена такая замечательная бесконечная мера, инвариантная относительно группы мультипликативных преобразований. Как было показано, ее можно трактовать как распределение скачков устойчивого процесса с независимыми приращениями и нулевым индексом устойчивости.

В [9], [10] совместно с Н. Цилевич и М. Йором Анатолий Моисеевич установил квазиинвариантность группы мультипликативных преобразований другой специальной пуассоновской меры (гамма-процесса). Эти идеи были потом развиты для более широкого класса пуассоновских мер.

Еще одним предметом интереса Анатолия Моисеевича, особенно в последние годы, являлось исследование свойств mm-энтропии метрического пространства с мерой (она определяется как логарифм минимального числа шаров радиуса ϵ, покрывающих пространство с точностью до меры δ). Он считал, что изучение таких пространств позволит “построить иную и более общую по сравнению с теорией Шеннона–Колмогорова теорию энтропии динамических систем с инвариантной мерой”, см. [11], [12]. В работе [13] для широкого класса банаховых пространств с гауссовской мерой показано, что их mm-энтропия тесно связана с энтропией соответствующего эллипсоида рассеяния и в определенном диапазоне ведет себя так же, как логарифм меры малых шаров.

Жизнь Анатолия Моисеевича удивительным образом опровергает общепризнанный постулат о том, что “математика — дело молодых”. Свою наиболее цитируемую работу [2], относящуюся как раз к теории вероятностей (360 ссылок в Web of Science), он опубликовал в пятьдесят лет, а его публикационная активность, при безупречном качестве работ, достигла максимума в двухтысячных годах, когда ему было больше семидесяти.

Анатолий Моисеевич играл существенную роль в математической жизни Санкт-Петербурга. С 1979 г. он был вице-президентом, а с 1998 г. по 2008 г. — президентом Санкт-Петербургского математического общества. Долгие годы Анатолий Моисеевич руководил семинаром по теории представлений и динамическим системам, а также общеинститутским математическим семинаром

ПОМИ. Среди его многочисленных учеников более 25 кандидатов и 5 докторов физико-математических наук.

Анатолий Моисеевич Вершик навсегда останется в нашей памяти как большой ученый и сильный неординарный человек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, “Коммутативная модель представления группы токов $SL(2,\mathbb{R})^X$, связанная с унипотентной подгруппой”, *Функц. анализ и его прил.*, **17**:2 (1983), 70–72; англ. пер.: A. M. Vershik, I. M. Gel’fand, M. I. Graev, “A commutative model of representation of the group of flows $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})^X$ that is connected with a unipotent subgroup”, *Funct. Anal. Appl.*, **17**:2 (1983), 137–139.
2. V. A. Kaimanovich, A. M. Vershik, “Random walks on discrete groups: boundary and entropy”, *Ann. Probab.*, **11**:3 (1983), 457–490.
3. А. М. Вершик, С. В. Керов, “Асимтотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга”, *Докл. АН СССР*, **233**:6 (1977), 1024–1027; англ. пер.: A. M. Vershik, S. V. Kerov, “Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux”, *Soviet Math. Dokl.*, **18** (1977), 527–531.
4. А. М. Вершик, А. А. Шмидт, “Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп. I”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **22**:1 (1977), 72–88; англ. пер.: A. M. Vershik, A. A. Shmidt, “Limiting measures arising in the asymptotic theory of symmetric groups. I”, *Theory Probab. Appl.*, **22**:1 (1977), 70–85.
5. А. М. Вершик, А. А. Шмидт, “Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп. II”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **23**:1 (1978), 42–54; англ. пер.: A. M. Vershik, A. A. Shmidt, “Limit measures arising in the asymptotic theory of symmetric groups. II”, *Theory Probab. Appl.*, **23**:1 (1978), 36–49.
6. А. М. Вершик, С. В. Керов, “Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы”, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:1 (1985), 25–36; англ. пер.: A. M. Vershik, S. V. Kerov, “Asymptotic of the largest and the typical dimensions of irreducible representations of a symmetric group”, *Funct. Anal. Appl.*, **19**:1 (1985), 21–31.
7. А. М. Вершик, “Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:2 (1996), 19–39; англ. пер.: A. M. Vershik, “Statistical mechanics of combinatorial partitions, and their limit shapes”, *Funct. Anal. Appl.*, **30**:2 (1996), 90–105.
8. А. М. Вершик, “Предельное распределение энергии квантового идеального газа с точки зрения теории разбиений натуральных чисел”, *УМН*, **52**:2(314) (1997), 139–146; англ. пер.: A. M. Vershik, “Limit distribution of the energy of a quantum ideal gas from the viewpoint of the theory of partitions of natural numbers”, *Russian Math. Surveys*, **52**:2 (1997), 379–386.
9. А. М. Вершик, М. Йор, Н. В. Цилевич, “О тождествах Маркова–Крейна и квазиинвариантности гамма-процесса”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. VI*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **283**, ПОМИ, СПб., 2001, 21–36; англ. пер.: A. M. Vershik, M. Yor, N. V. Tsilevich, “On the Markov–Krein identity and quasi-invariance of the gamma process”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **121**:3 (2004), 2303–2310.

10. N. Tsilevich, A. Vershik, M. Yor, “An infinite-dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process”, *J. Funct. Anal.*, **185**:1 (2001), 274–296.
11. A. M. Vershik, “Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants”, *Markov Process. Related Fields*, **16**:1 (2010), 169–184.
12. А. М. Вершик, Г. А. Вепрев, П. Б. Затицкий, “Динамика метрик в пространствах с мерой и масштабированная энтропия”, *УМН*, **78**:3(471) (2023), 53–114; англ. пер.: A. M. Vershik, G. A. Veprev, P. B. Zatitskii, “Dynamics of metrics in measure spaces and scaling entropy”, *Russian Math. Surveys*, **78**:3 (2023), 443–499.
13. А. М. Вершик, М. А. Лифшиц, “О mm-энтропии банахова пространства с гауссовской мерой”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **68**:3 (2023), 532–543; англ. пер.: A. M. Vershik, M. A. Lifshits, “On mm-entropy of a Banach space with Gaussian measure”, *Theory Probab. Appl.*, **68**:3 (2023), 431–439.

А. И. Буфетов, И. А. Ибрагимов,
М. А. Лифшиц, А. В. Малютин,
Ф. В. Петров, Н. В. Смородина,
А. Н. Ширяев, Ю. В. Якубович