Н. А. Корешков, Модули и идеалы алгебр ассоциативного типа,
Изв. вузов. Матем., 2008, номер 8, 25–34

Известия вузов. Математика
2008, №8, с. 25–34

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Н.А. КОРЕШКОВ

МОДУЛИ И ИДЕАЛЫ АЛГЕБР АССОЦИАТИВНОГО ТИПА

Аннотация. В данной работе изучаются некоторые свойства алгебр ассоциативного типа, которые были определены в предыдущих работах автора. Показано, что конечномерная алгебра ассоциативного типа над полем нулевой характеристики является однородно полупростой тогда и только тогда, когда некоторая форма, определенная с помощью формы следа, невырождена. Доказана полная приводимость для модулей над полупростыми алгебрами в некотором подклассе алгебр ассоциативного типа. Доказано, что любой левый однородный идеал полупростой алгебры ассоциативного типа порождается однородным идемпотентом.

Ключевые слова: алгебра ассоциативного типа, однородно полупростая алгебра, модуль, идеал, однородный идемпотент.

УДК: 512.554

Abstract. In this paper we study some properties of associative-type algebras introduced in previous papers of the author. We show that a finite-dimensional algebra of associative type over a field of zero characteristic is homogeneously semisimple, if and only if a certain form defined by the trace form is nonsingular. We prove the total reducedness of modulus over semisimple algebras in a certain subclass of associative-type algebras. We also prove that any left homogeneous ideal of a semisimple algebra of associative type is generated by a homogeneous idempotent.

Keywords: algebra of associative type, homogeneous semisimple algebra, modulus, ideal, homogeneous idempotent.

В работах [1], [2] были введены алгебры лиевского типа, которые достаточно естественным образом обобщают понятие алгебр Ли, ассоциативных алгебр, супералгебр Ли с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой и некоторые другие классы алгебр. В [3] и [4] изучались алгебры, являющиеся частным случаем алгебр лиевского типа и названные алгебрами ассоциативного типа. В этих работах приведены примеры таких алгебр, связанные с понятиями групповых алгебр и алгебр картановского типа. Напомним определение алгебры ассоциативного типа.

Пусть G — полугруппа, T — некоторое конечное подмножество в G, $A = \bigoplus\limits_{\alpha\in T} A_\alpha$ — G-градуированная алгебра над полем k, т.е. для любых $\alpha, \beta \in T$ $A_\alpha A_\beta \subset A_{\alpha\cdot\beta}$, если $\alpha\cdot\beta \in T$, и $A_\alpha A_\beta = 0$, если $\alpha\cdot\beta \notin T$. Назовем алгебру A алгеброй ассоциативного типа, если для любых элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in T$ существует $\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in k$, $\lambda \neq 0$ такое, что $(a_{\alpha_1} a_{\alpha_2}) a_{\alpha_3} = \lambda a_{\alpha_1}(a_{\alpha_2} a_{\alpha_3})$ для любых $a_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, 3$.

В дальнейшем рассматриваются только конечномерные алгебры ассоциативного типа. Для таких алгебр в [3] доказано существование наибольшего однородного нильпотентного

Поступила 09.03.2006

идеала, который в дальнейшем называется однородным радикалом соответствующей алгебры. (Здесь и далее подпространство M в G-градуированной алгебре $A = \underset{\alpha\in T}{\oplus} A_\alpha$, $T \subset G$, называем однородным, если $M = \underset{\alpha\in T}{\oplus} M \cap A_\alpha$, $T \subset G$.) Этот факт приводит к появлению однородно полупростых алгебр ассоциативного типа, а именно: алгебра A ассоциативного типа называется однородно полупростой, если в ней отсутствуют нетривиальные однородные нильпотентные идеалы.

Нильпотентность алгебры зависит, вообще говоря, от расстановки скобок при определении степеней этой алгебры. Но, как показано в [3], если B — однородная подалгебра алгебры A ассоциативного типа такая, что если для любых k элементов $b_1, \dots, b_k$ из B их произведение равно нулю при одной расстановке скобок, то оно равно нулю и при любой другой расстановке. Таким образом, расстановка скобок в произведении не влияет на нильпотентность однородных подалгебр в алгебре ассоциативного типа.

Кроме того, в [3] доказано, что любая однородно полупростая алгебра ассоциативного типа A является прямой суммой двусторонних идеалов B_i, $i = 1, \dots, r$, каждый из которых есть однородно простая алгебра (т. е. алгебра, не имеющая нетривиальных двусторонних однородных идеалов). При этом каждый идеал B_i является суммой однородных минимальных левых идеалов L_{ij}, $j = 1, \dots, s_i$, и любые два идеала L_{ij} и L_{ik} для данного i изоморфны как A-модули. В дальнейшем идеалы $B_1, \dots, B_r$ будем называть простыми компонентами алгебры A. Приведем определения двух последних понятий.

Пусть G — полугруппа, M — G-множество. Если $B = \underset{\alpha\in T}{\oplus} B_\alpha$, $T \subset G$, $|T| < \infty$, — G-градуированная алгебра над полем k, $V = \underset{\gamma\in S}{\oplus} V_\gamma$, $S \subset M$, $|S| < \infty$, — линейное пространство над полем k, то линейное отображение $f : B \to \mathrm{End}_k(V)$ будем называть представлением ассоциативного типа, если

1) $f(B_\alpha)V_\gamma \subset V_{\alpha\cdot\gamma}$, когда $\alpha\cdot\gamma \in S$, либо $f(B_\alpha)V_\gamma = 0$, когда $\alpha\cdot\gamma \notin S$, где $\alpha \in T$, $\gamma \in S$;
2) $f(b_\alpha b_\beta)v_\gamma = \lambda_{\alpha,\beta,\gamma} f(b_\alpha)f(b_\beta)v_\gamma$, когда $b_\alpha \in B_\alpha$, $b_\beta \in B_\beta$, $v_\gamma \in V_\gamma$, а $\lambda_{\alpha,\beta,\gamma} \in k$, $\lambda_{\alpha,\beta,\gamma} \neq 0$, где $\alpha, \beta \in T$, $\gamma \in S$.

В этом случае пространство B будем называть B-модулем ассоциативного типа, а соотношения 1) и 2) записывать в виде

1)$'$ $B_\alpha V_\gamma \subset V_{\alpha\cdot\gamma}$, если $\alpha\cdot\gamma \in S$, $B_\alpha V_\gamma = 0$, если $\alpha\cdot\gamma \notin S$;
2)$'$ $(b_\alpha b_\beta)v_\gamma = \lambda_{\alpha,\beta,\gamma} b_\alpha(b_\beta v_\gamma)$ для любых $\alpha, \beta \in T$, $\gamma \in S$.

Если $M = G$, $V = B$ а $f(b) = L_b$ — оператор левого умножения для $b \in B$, то B будет алгеброй ассоциативного типа.

Пусть G — полугруппа, M и M' — два G-множества, $\pi : M \to M'$ — G-отображение. Если $V = \underset{\gamma\in S}{\oplus} V_\gamma$, $S \subset M$, $|S| < \infty$, и $V' = \underset{\gamma'\in S'}{\oplus} V_{\gamma'}$, $S' \subset M'$, $|S'| < \infty$, — два A-модуля ассоциативного типа над алгеброй, градуированной полугруппой G, $A = \underset{\alpha\in T}{\oplus} A_\alpha$, $T \subset G$, $|T| < \infty$, то линейное отображение $\varphi_\pi : V \to V'$ будем называть гомоморфизмом A-модуля V в A-модуль V', если

1) $\pi(S) \subset S'$ и для любого $\gamma \in S$ $\varphi_\pi(V_\gamma) \subset V'_{\pi\gamma}$;
2) для любых $\alpha \in T$, $\beta \in S$ существует такой ненулевой элемент $\lambda_{\alpha,\beta} \in k$, что $\varphi_\pi(ax) = \lambda_{\alpha,\beta} a\varphi_\pi(x)$, когда $a \in A_\alpha$, $x \in V_\beta$.

Если φ_π — биекция, то φ_π — изоморфизм A-модулей ассоциативного типа.

Рассматривая алгебру ассоциативного типа B как модуль над самим собой, назовем его левым регулярным B-модулем и обозначим ${}_B B$.

Подпространство $U = \bigoplus_{\gamma\in S} U_\gamma$, $U_\gamma = U \cap V_\gamma$, будем называть B-подмодулем модуля V, если U является B-модулем в смысле приведенного определения.

Будем говорить, что B-модуль V ассоциативного типа вполне приводим, если для любого B-подмодуля ассоциативного типа W существует B-подмодуль ассоциативного типа U такой, что $V = W \oplus U$.

Используя стандартные рассуждения, легко показать, что это определение равносильно разложению B-модуля ассоциативного типа в сумму (не обязательно прямую) неприводимых подмодулей ассоциативного типа. Таким образом, минимальные левые однородные идеалы в алгебре ассоциативного типа A — это в точности неприводимые подмодули левого регулярного A-модуля ассоциативного типа ${}_AA$. Поэтому из теоремы о разложении однородной полупростой алгебры, доказанной в [3], получается

Теорема 1. *Если A — конечномерная однородно полупростая алгебра ассоциативного типа, то левый регулярный A-модуль ${}_AA$ вполне приводим.*

Используя этот результат, докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Каждый ненулевой однородный двусторонний идеал B однородно полупростой конечномерной алгебры ассоциативного типа A является прямой суммой некоторых компонент этой алгебры.*

Доказательство. Идеал B содержит однородный минимальный левый идеал L алгебры A. Тогда $Lx \subset B$ для любого однородного элемента $x \in A$. (Элемент называем однородным, если он принадлежит одной из компонент A_α.) В [3] доказано, что минимальные однородные левые идеалы L и L' изоморфны (как A-модули) тогда и только тогда, когда $L' = La'$ для некоторого однородного элемента $a' \in L'$. Поэтому идеал B содержит сумму B_L всех однородных минимальных левых идеалов, изоморфных L. Как показано в [3], B_L является одной из простых компонент алгебры A.

Обозначим через B' сумму всех простых компонент алгебры A, содержащихся в идеале B. В силу полной приводимости левого регулярного модуля ${}_AA$ имеем $B = B' \oplus B''$, где B'' — A-модуль или левый однородный идеал. Если $B'' \neq 0$, то он содержит ненулевой минимальный однородный левый идеал L''. Тогда по предыдущему $B_{L''} \subset B'$. С другой стороны, $B' \cap B'' = 0$, что ведет к противоречию. Следовательно, $B'' = 0$ и идеал B представляется в виде прямой суммы некоторых компонент алгебры A. $\square$

В дальнейшем полагаем, что все алгебры ассоциативного типа и их модули являются конечномерными векторными пространствами над полем k и поле k имеет характеристику нуль.

Следуя ([5], с. 31), будем говорить, что однородный элемент a является собственно нильпотентным, если ab и ba — нильпотентные элементы для любого однородного элемента b.

Условие собственной нильпотентности элемента можно описать в терминах некоторой формы.

Пусть $k[x]$ — кольцо многочленов одной переменной. Обозначим $A[x] = k[x] \otimes_k A$, $V[x] = k[x] \otimes_k V$, где $V = \bigoplus_{\gamma\in S\subset M} V_\gamma$ — модуль ассоциативного типа, $A = \bigoplus_{\alpha\in T\subset G} A_\alpha$. Превратим $V[x] = \bigoplus_{\gamma\in S\subset M} V_\gamma[x]$, $V_\gamma[x] = k[x] \otimes_k V_\gamma$ в модуль ассоциативного типа над $A[x] = \bigoplus_{\alpha\in T\subset G} A_\alpha[x]$, $A_\alpha[x] = k[x] \otimes_k A_\alpha$, полагая $(f\otimes a)(g\otimes v) = fg\otimes av$, $a \in A_\alpha$, $v \in V_\gamma$, $f, g \in k[x]$. Тогда линейное отображение $\rho : A \to \mathrm{End}_k(V)$, определяющее структуру A-модуля ассоциативного типа на V, продолжается до линейного отображения $\rho_x : A[x] \to k[x] \underset{k}{\otimes} \mathrm{End}_k(V)$, действующего по правилу $\rho_x(f \otimes a) = f \otimes \rho(a)$, $f \in k[x]$, $a \in A_\alpha$.

Обозначим через δf старший коэффициент многочлена $f(x) \in k[x]$. Определим отображение S_V на $A[x] \times A[x]$ со значениями в k по формуле

$$S_V(a,b) = \delta \operatorname{tr} \bigl(X\rho_x(a)\rho_x(b)\bigr), \quad a, b \in A[x],$$

$X = \begin{bmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_s \end{bmatrix}$, $X_i = x^i E_i$, $E_i = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$, $n_i = \dim V_{\gamma_i}$ — размер E_i, s — количество элементов в S.

Если $a, b \in A$, то $S_V(a,b) = \delta \operatorname{tr}\bigl(X\rho(a)\rho(b)\bigr)$, где отождествляем $\rho_x(1 \otimes a)$ и $\rho(a)$. Любую матрицу $\rho(a)$, $a \in A_\alpha$, можно представить в виде $[\rho_{ij}(a)]$, $i, j = 1, \ldots, s$, где $\rho_{ij}(a) \in \mathrm{End}_k(V_{\gamma_j}, V_{\gamma_i})$.

Если выбрать в V базис, согласованный с градуировкой этого пространства, то второе соотношение из определения модуля ассоциативного типа можно переписать в виде

$$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)\Lambda, \quad \rho(a), \rho(b), \rho(ab), \Lambda \in \mathrm{End}_k(V), \tag{1}$$

где a, b — однородные элементы из A, $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, причем $\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_s \end{bmatrix}$, $\Lambda_i = \lambda_i(\alpha,\beta)E_i$, $\lambda_i(\alpha,\beta) \in k$, $\lambda_i(\alpha,\beta) \neq 0$, $E_i = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$, $n_i = \dim V_{\gamma_i}$ — размер E_i.

По аналогии с ассоциативными алгебрами A-модуль V ассоциативного типа будем называть точным, если из условия $av = 0$ для любого $v \in V$ и некоторого $a \in A$ следует $a = 0$.

Предложение 1. *Пусть $V = \bigoplus\limits_{\gamma \in S \subset M} V_\gamma$ — точный A-модуль ассоциативного типа над градуированной алгеброй $A = \bigoplus\limits_{\alpha \in T \subset G} A_\alpha$. Тогда однородный элемент a собственно нильпотентен, если и только если $S_V(a,b) = S_V(b,a) = 0$ для любого однородного элемента $b \in A$.*

Доказательство. Пусть z — однородный нильпотентный элемент из A, а $\rho(z) = [\rho_{ij}(z)]$, $i, j = 1, \ldots, s$, — матрица элемента z относительно представления ρ в пространстве V. Тогда $\operatorname{tr} \rho_{ii}(z) = 0$, $i = 1, \ldots, s$. Действительно, так как $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)\Lambda$ (см. (1)) для однородных элементов a и b, то $\bigl(\rho(z)\bigr)^n = \rho(\underbrace{z \ldots (zz) \ldots}_{n})\Lambda = 0$, если n — степень нильпотентности элемента z, т. е. оператор $\rho(z)$ нильпотентен.

Если z — однородный элемент из A, то для любого $j = 1, \ldots, s$ в матрице $\rho(z) = [\rho_{ij}(z)]$ имеется не более одного ненулевого блока $\rho_{ij}(z)$. В случае, когда $\rho_{ii}(z) = 0$, и $\operatorname{tr} \rho_{ii}(z) = 0$. Если же $\rho_{ii}(z) \neq 0$, то для любого n $\bigl(\rho(z)^n\bigr)_{ii} = \bigl(\rho_{ii}(z)\bigr)^n$.

Таким образом, для однородного нильпотентного элемента z блок $\rho_{ii}(z)$ также нильпотентен. В частности, $\operatorname{tr} \rho_{ii}(z) = 0$.

Пусть a — однородный собственно нильпотентный элемент. Тогда для любого однородного элемента b произведение ab нильпотентно. Поэтому $\operatorname{tr} \rho_{ii}(ab) = 0$, $i = 1, \ldots, s$. Но $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)\Lambda$, т. е. $\operatorname{tr}\bigl(\rho(a)\rho(b)\bigr)_{ii} = 0$, $i = 1, \ldots, s$, а значит,

$$S_V(a,b) = \delta \operatorname{tr}\bigl(X\rho(a)\rho(b)\bigr) = \delta \sum_{i=1}^{s} x^i \operatorname{tr}\bigl(\rho(a)\rho(b)\bigr)_{ii} = 0.$$

Пусть $S_V(a,b)=0$ для любого однородного элемента b и некоторого элемента a. Так как $S_V(a,b)=\delta\operatorname{tr}\bigl(X\rho(a)\rho(b)\bigr)=\delta\operatorname{tr}\bigl(X\rho(ab)\Lambda\bigr)$, то $\operatorname{tr}\bigl(\rho(ab)\bigr)=0$. Заменим элемент b на $b_1=b(ab)$. По условию $S_V(a,b_1)=0$. Но

$$S_V(a,b_1)=\delta\operatorname{tr}\bigl(X\rho(a)\rho(b(ab))\bigr)=\delta\operatorname{tr}\bigl(X\rho(a(b(ab)))P\bigr)=\\ =\lambda^{-1}_{a,b,ab}\delta\operatorname{tr}\bigl(X(\rho(ab^2)P\bigr)=\lambda^{-1}_{a,b,ab}\delta\operatorname{tr}\bigl(X(\rho(ab))^2P'\bigr),$$

где P, P' — блочно-диагональные матрицы с ненулевыми коэффициентами на диагонали, причем коэффициент в каждом блоке постоянен. Следовательно, $\operatorname{tr}\bigl(\rho(ab)\bigr)^2=0$. Повторяя эту процедуру, получим $\operatorname{tr}\bigl(\rho(ab)\bigr)^n=0$ для любого натурального n. Поскольку основное поле имеет характеристику нуль, то $\rho(ab)$ — нильпотентный оператор, т. е. $\bigl(\rho(ab)\bigr)^m=0$ для некоторого натурального m. Опять используя соотношение $\bigl(\rho(ab)\bigr)^m=\rho\bigl((ab)^{[m]}\bigr)\Lambda$, где $(ab)^{[m]}=\bigl(\underbrace{(ab)(\ldots((ab)(ab))\ldots)}_{m}\bigr)$, имеем $\rho\bigl((ab)^{[m]}\bigr)=0$. Так как ρ — точное представление, то $(ab)^{[m]}=0$.

Все приведенные рассуждения можно повторить и для элемента ba, что доказывает собственную нильпотентность a. □

Пусть $M=G$, $V=A$ и ρ — регулярное представление, определяемое операторами левого умножения L_x, $x\in A$. Все рассуждения предложения 1 справедливы и в этом случае, за исключением перехода от $\rho\bigl((ab)^{[m]}\bigr)=0$ к $(ab)^{[m]}=0$, который использует точность ρ. В данном случае применим соотношение $L_{(ab)^{[m]}}=0$ к элементу ab. Тогда $(ab)^{[m+1]}=0$ и получаем

Предложение 2. *Если A — алгебра ассоциативного типа, то однородный элемент $a\in A$ собственно нильпотентен тогда и только тогда, когда $S_A(a,b)=S_A(b,a)=0$ для любого однородного элемента $b\in A$.*

Пусть I — подпространство в алгебре A. Обозначим $I^{\perp}_{L,V}=\{a\in A,\ S_V(a,b)=0,\ b\in I\}$, $I^{\perp}_{R,V}=\{a\in A,\ S_V(b,a)=0,\ b\in I\}$, где V — некоторый A-модуль ассоциативного типа. Если $I=A$, то $A^{\perp}_{L,V}$ будем называть левым ядром отображения S_V и обозначать $\operatorname{Ker}_L S_V$, а $A^{\perp}_{R,V}$ — правым ядром и обозначать $\operatorname{Ker}_R S_V$.

Если G — группа, то будем говорить, что G-множество M не имеет неподвижных точек, если $gm=m\Leftrightarrow g=1$.

Предложение 3. *Пусть $A=\bigoplus\limits_{\alpha\in T\subset G}A_\alpha$, G — группа, $V=\bigoplus\limits_{\gamma\in S\subset M}V_\gamma$ — A-модуль ассоциативного типа и M — G-множество без неподвижных точек. Если I — однородный двусторонний идеал в A, то $I^{\perp}_{L,V}$, $I^{\perp}_{R,V}$ — также однородные двусторонние идеалы, причем $I^{\perp}_{L,V}=I^{\perp}_{R,V}$.*

В частности, из предложения 3 вытекает, что $\operatorname{Ker}_L S_V=\operatorname{Ker}_R S_V$, и данное множество, обозначаемое $\operatorname{Ker} S_V$, будем называть ядром отображения S_V.

Доказательство. Во-первых, отметим, что $I^{\perp}_{L,V}$ (соответственно $I^{\perp}_{R,V}$) является подпространством в A. Действительно, если $S_V(a,b)=0$ и $S_V(a',b)=0$, то $\operatorname{tr}\bigl(X\rho(a)\rho(b)\bigr)=0$ и $\operatorname{tr}\bigl(X\rho(a')\rho(b)\bigr)=0$, где ρ — представление, отвечающее модулю V. Из линейности функции следа и линейности ρ получим $\operatorname{tr}\bigl(X\rho(\alpha a+\alpha' a')\rho(b)\bigr)=0$, $\alpha,\alpha'\in k$. Следовательно, $S_V(\alpha a+\alpha' a',b)=0$. Если последнее соотношение выполняется для любого $b\in I$, то $\alpha a+\alpha' a'\in I^{\perp}_{L,V}$.

Кроме того, $I^{\perp}_{L,V}$, $I^{\perp}_{R,V}$ — однородные пространства. В силу однородности идеала I условие ортогональности достаточно проверить, когда $b = b_\beta \in I \cap A_\beta$. Пусть $S_V(a, b_\beta) = 0$ и $a = \sum\limits_{\alpha\in S} a_\alpha$. Если $\alpha\cdot\beta \neq 1$, то все диагональные блоки матрицы $\rho(a_\alpha)\rho(b_\beta)$ равны нулю, так как G-множество M не имеет неподвижных точек. Следовательно, в этих случаях $\mathrm{tr}\,\big(X\rho(a_\alpha)\rho(b_\beta)\big) = 0$, а значит, и $\mathrm{tr}\,\Big(X\rho\Big(a - \sum\limits_{\alpha\neq\beta^{-1}} a_\alpha\Big)\rho(b_\beta)\Big) = 0$. Поэтому $S_V(a_{\beta^{-1}}, b_\beta) = 0$, т. е. все компоненты a ортогональны b_β и, значит, принадлежат $I^{\perp}_{L,V}$.

Пусть $a\in A_\alpha$, $b\in A_\beta$ и $S_V(a,b)=0$. Тогда $\mathrm{tr}\,\big(X\rho(a)\rho(b)\big)=0$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{s} x^i\,\mathrm{tr}\,\big(\rho_{ij}(a)\rho_{ji}(b)\big) = 0$, где s — количество компонент градуировки в модуле V. Если $\rho_{ji}(b) \neq 0$ для некоторого i, то номер j определяется однозначно, так как в каждом i-м блочном столбце может быть только один ненулевой блок. Поэтому коэффициент при x^i в рассмотренной сумме равен $\mathrm{tr}\,\big(\rho_{ij}(a)\rho_{ji}(b)\big)$. Значит, и в случае, когда $\rho_{ji}(b) \neq 0$, тем не менее $\mathrm{tr}\,\big(\rho_{ij}(a)\rho_{ji}(b)\big) = 0$.

Рассмотрим $C = \sum\limits_{k=1}^{s}\sum\limits_{t=1}^{s} x^k\,\mathrm{tr}\,\big(\rho_{kt}(b)\rho_{tk}(a)\big)$. Если $\rho_{kt}(b) \neq 0$ для некоторого k, то $\mathrm{tr}\,\big(\rho_{tk}(a)\rho_{kt}(b)\big) = 0$. Но $\mathrm{tr}\,\big(\rho_{tk}(a)\rho_{kt}(b)\big) = \mathrm{tr}\,\big(\rho_{kt}(b)\rho_{tk}(a)\big)$, следовательно, $C = 0$. Тем более, $S_V(b,a) = \delta C = 0$.

Итак, $I^{\perp}_{L,V} = I^{\perp}_{R,V}$. Это множество будем обозначать $I^{\perp}_V$. В частности, $\mathrm{Ker}_L\, S_V = \mathrm{Ker}_R\, S_V = \mathrm{Ker}\, S_V$.

Проверим, что $I^{\perp}_V$ — однородный двусторонний идеал. Для этого убедимся, что если $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, $c \in A_\gamma$, то $S_V(ab,c) = 0 \Leftrightarrow S_V(a,bc)=0$. Вычислим каждое из указанных значений функции S_V:

$$S_V(ab,c) = \delta\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} x^i\,\mathrm{tr}\,\big(\rho_{ij}(ab)\rho_{ji}(c)\big) = \delta\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\lambda_i x^i\,\mathrm{tr}\,\big(\rho_{ik}(a)\rho_{kj}(b)\rho_{ji}(c)\big),$$

так как $\delta\,\mathrm{tr}\,\big(X\rho(ab)\rho(c)\big) = \delta\,\mathrm{tr}\,\big(X\Lambda\rho(a)\rho(b)\rho(c)\big)$. (При условии, что G-множество M не имеет неподвижных точек, любая матрица $\rho(a) = [\rho_{ij}(a)]$ имеет не более одного ненулевого блока $\rho_{ij}(a)$ для каждого i. Поэтому $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)\widetilde{\Lambda} = \Lambda\rho(a)\rho(b)$, где блочно-диагональная матрица Λ получается из матрицы $\widetilde{\Lambda}$ перестановкой диагональных блоков.) Соответственно

$$S_V(a,bc) = \delta\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} x^i\,\mathrm{tr}\,\big(\rho_{ik}(a)\rho_{ki}(bc)\big) = \delta\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\lambda'_i x^i\,\mathrm{tr}\,\big(\rho_{ik}(a)\rho_{kj}(b)\rho_{ji}(c)\big),$$

так как $\delta\,\mathrm{tr}\,\big(X\rho(a)\rho(bc)\big) = \delta\,\mathrm{tr}\,\big(X\rho(a)\rho(b)\rho(c)\Lambda'\big)$.

Если $S_V(ab,c) = 0$, то $\sum\limits_{k=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{s}\mathrm{tr}\,\big(\rho_{ik}(a)\rho_{kj}(b)\rho_{ji}(c)\big) = 0$ для любого $i = 1,\ldots,s$, так как все λ_i ненулевые. Но тогда из выражения $S_V(a,bc)$ имеем $S_V(a,bc) = 0$. Это доказывает сформулированное выше условие “частичной” инвариантности. □

Если G — группа, $M = G$, $V = A$ и ρ — регулярное представление, то условия предложения 3 выполнены, и получаем

Следствие. Пусть G — группа, $A = \bigoplus\limits_{\alpha\in T\subset G} A_\alpha$ — алгебра ассоциативного типа. Если I — однородный двусторонний идеал в A, то $I^{\perp}_{L,A}$, $I^{\perp}_{R,A}$ — также однородные двусторонние идеалы, причем $I^{\perp}_{L,A} = I^{\perp}_{R,A}$.

В частности, $\operatorname{Ker}_L S_A = \operatorname{Ker}_R S_A$, и данное множество (обозначаемое $\operatorname{Ker} S_A$) будем называть ядром отображения S_A.

В силу соотношения $(ab)c = \lambda a(bc)$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in k$, для однородных элементов a, b, c алгебры A по индукции легко проверить, что если I — однородный двусторонний идеал в A, то любая его степень I^k — также однородный двусторонний идеал. Отсюда вытекает, что сумма двух однородных нильпотентных идеалов также является однородным нильпотентным идеалом. Поэтому для конечномерной алгебры A существует наибольший однородный нильпотентный идеал, который будем обозначать $R_{qr(A)}$.

Предложение 4. *Пусть G — группа, A — G-градуированная алгебра ассоциативного типа. Тогда $R_{qr(A)} = \operatorname{Ker} S_A$.*

Доказательство. Пусть I — однородный нильпотентный идеал в A. Тогда для любого однородного элемента x из I элемент $xa \in I$, следовательно, x собственно нильпотентен, когда a однороден. Поэтому из предложения 2 следует, что $I \subset \operatorname{Ker} S_A$. В частности, $R_{qr(A)} \subset \operatorname{Ker} S_A$.

Обратно, пусть $y \in \operatorname{Ker} S_A$. В силу предложения 2 элемент y собственно нильпотентен. В частности, y^2 нильпотентен. Но тогда нильпотентен и элемент y. Используя теорему 1 из [3], получим, что $\operatorname{Ker} S_A$ нильпотентно. Поэтому $\operatorname{Ker} S_A \subset R_{qr(A)}$. Два полученных включения доказывают сформулированное выше равенство. □

Как было определено выше, алгебра A ассоциативного типа однородно полупроста, если в ней отсутствуют однородные двусторонние нильпотентные идеалы, т. е. $R_{qr(A)} = 0$. Тогда из предложения 4 вытекает

Теорема 3. *Пусть G — группа, A — G-градуированная алгебра ассоциативного типа. Тогда A однородно полупроста, если и только если форма S_A невырождена.*

Если A полупроста, то она и однородно полупроста, поэтому имеет место

Теорема 4. *Если A — полупростая G-градуированная алгебра ассоциативного типа, где G — группа, то форма S_A невырождена.*

Теорема 5. *Если $A = \bigoplus\limits_{\alpha \in T} A_\alpha$, $T \subset G$, $|T| < \infty$, — полупростая алгебра ассоциативного типа и G — группа, то $1 \in T$ и A_1 — полупростая ассоциативная алгебра.*

Доказательство. В [3] показано, что полупростая алгебра ассоциативного типа $A = \bigoplus\limits_{\alpha \in T} A_\alpha$, $T \subset G$ содержит однородный идемпотент e. Если G — группа, то идемпотент e необходимо принадлежит A_1, 1 — единица группы G, т. е. $A_1 \neq 0$. Подставляя идемпотент e в соотношение $(ab)c = \lambda a(bc)$, $a, b, c \in A$, имеем $\lambda = 1$, т. е. A_1 — ассоциативная алгебра.

Для любого однородного элемента $a \in A_\alpha$ матрица оператора левого умножения L_a в базисе, согласованном с градуировкой алгебры A, имеет вид $[L_{ij}(a)]$, $i, j = 1, \ldots, r$, $r = |T|$ и $L_{ij}(a)$ — ограничение оператора L_a на подпространство A_{α_j} со значениями в A_{α_i}. Как было отмечено в предложении 1, для каждого j имеется не более одного ненулевого блока $L_{ij}(a)$, а так как G — группа, то и для любого i имеется не более одного ненулевого блока $L_{ij}(a)$. В частности, все диагональные блоки $L_{ii}(c)$ матрицы L_c нулевые, когда $c \in A_\alpha$, $\alpha \neq 1$.

Если $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$ и $\alpha \cdot \beta \neq 1$, то $S_A(a, b) = 0$, так как $L_a L_b = L_{ab}\Lambda$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_r \end{bmatrix}$, $\Lambda_i = \lambda_i E_i$, $\lambda_i \in k$, $\lambda_i \neq 0$, E_i — единичный оператор пространства A_{α_i}, $i = 1, \ldots, r$, и все диагональные блоки матрицы L_{ab} нулевые. Следовательно, $S_A(A_1, A_\beta) = 0$, когда $\beta \neq 1$.

Если $z \in A_1$ такой, что матрица L_z нильпотентна, то все диагональные блоки $L_{ii}(z)$ — также нильпотентные матрицы, и поэтому след каждого диагонального блока $\operatorname{tr} L_{ii}(z)$ равен нулю.

Пусть I — нильпотентный идеал в A_1. Тогда для $a \in I$, $b \in A_1$ оператор L_{ab} нильпотентен в силу формулы $L_{z^{[n]}} = (L_z)^n \Lambda$ (см. предложение 1). Поэтому $\operatorname{tr}(XL_aL_b) = \sum \lambda_i x^i \operatorname{tr}\big(L_{ii}(ab)\big)=0$. Отсюда следует, что $\delta \operatorname{tr}(XL_aL_b) = 0$, $a \in I$, $b \in A_1$, т.е. $S_A(I, A_1) = 0$. Используя полученное выше условие $S_A(A_1, A_\beta) = 0$, когда $\beta \neq 1$, имеем $S_A(I, A) = 0$. В силу полупростоты алгебры A форма S_A невырождена (теорема 4), следовательно, $I = 0$, т.е. A_1 — полупростая ассоциативная алгебра. □

Теорема 6. *Пусть $A = \underset{\alpha\in T}{\oplus} A_\alpha$, $T \subset G$, — полупростая конечномерная алгебра ассоциативного типа над полем нулевой характеристики, а $V = \underset{\gamma\in S}{\oplus} V_\gamma$, $S \subset M$, — конечномерный A-модуль ассоциативного типа. Если G — группа, G-множество M не имеет неподвижных точек, то V вполне приводим.*

Доказательство. Пусть φ — представление ассоциативного типа, соответствующее модулю $V = \underset{\alpha\in S}{\oplus} V_\alpha$. Обозначим через φ_1 сужение представления φ на подалгебру A_1. Каждое подпространство V_α, $\alpha \in S$, является модулем ассоциативного типа над A_1. Соответствующее ему представление ассоциативного типа обозначим через $\varphi_{1,\alpha}$. Тогда отображение $\psi_\alpha = \lambda_{1,1,\alpha}\varphi_{1,\alpha}$, где $\lambda_{1,1,\alpha}$ — константа из п. 2 определения модуля ассоциативного типа, задает обычное представление полупростой ассоциативной алгебры A_1 в пространстве V_α. Так как всякая конечномерная ассоциативная полупростая алгебра имеет единицу e_1 ([6], с. 34), то ее образ $\psi_\alpha(e_1)$ является проектором, и поэтому имеет место разложение $V_\alpha = V'_\alpha \oplus V''_\alpha$, где $V'_\alpha = \{v_\alpha \in V_\alpha,\ \psi_\alpha(e_1)v_\alpha = v_\alpha\}$, $V''_\alpha = \{v_\alpha \in V_\alpha,\ \psi_\alpha(e_1)v_\alpha = 0\}$.

Пусть $W'' = \underset{\alpha\in S}{\oplus} V''_\alpha$, $W' = \underset{\alpha\in S}{\oplus} V'_\alpha$. Тогда $V = W' \oplus W''$, причем W', W'' — A-подмодули. Действительно, так как $\psi_\alpha(e_1)v_\alpha = 0$, когда $v_\alpha \in V''_\alpha$, а $\psi_\alpha(e_1) = \lambda_{1,1,\alpha}\varphi_{1,\alpha}(e_1)$, то $e_1 v_\alpha = 0$. Тогда, очевидно, $A_1 v_\alpha = 0$. Но, как уже отмечалось, алгебра A является суммой левых однородных идеалов Ae_k, порожденных идемпотентами e_k, которые принадлежат A_1. Поэтому $AV_\alpha = 0$, $\alpha \in S$, т.е. $AW' = 0$.

Пусть $v_\alpha \in V'_\alpha$ и предположим, что существует $a_\beta \in A_\beta$ такой, что $a_\beta v_\alpha = v'_\gamma + v''_\gamma$ и $v''_\gamma \neq 0$. Тогда $e_1(a_\beta v_\alpha) = e_1 v'_\gamma \in V'_\gamma$, так как $e_1 v''_\gamma = 0$. С другой стороны,

$$e_1(a_\beta v_\alpha) = \varphi(e_1)\varphi(a_\beta)v_\alpha = \lambda^{-1}_{1,\beta,\alpha}\varphi(e_1 a_\beta)v_\alpha = \lambda^{-1}_{1,\beta,\alpha}\varphi(\overline{\lambda}_{1,1,\beta}a_\beta)v_\alpha = \lambda^{-1}_{1,\beta,\alpha}\overline{\lambda}_{1,1,\beta}a_\beta v_\alpha,$$

где $\overline{\lambda}_{1,1,\beta}$ — константа из определения регулярного представления. Здесь использован тот факт, что оператор левого умножения на e_1 действует как ненулевой скаляр на каждом пространстве A_β, $\beta \in T$. Действительно, если $B = \langle a_\beta \in A_\beta,\ \beta \in T,\ e_1 a_\beta = 0\rangle \neq 0$, то $A_1 B = 0$, поэтому $AB = 0$ (см. соответствующее рассуждение для пространства V''_α). Тогда B — однородный двусторонний ненулевой идеал в A с условием $B^2 = 0$, что противоречит полупростоте алгебры A. Таким образом, для любого $a_\beta \in A$ имеет место включение $a_\beta v_\alpha \in V'_\gamma$, когда $v_\alpha \in V'_\alpha$, т.е. $AW' \subseteq W'$. Поэтому считаем, что образ $\psi_a(e_1)$ единичного элемента e_1 из A_1 является единичным оператором на V_α. В частности, $V_\alpha = A_1 V_\alpha$, и, следовательно, $V = AV$.

Так как алгебра A является конечной суммой минимальных левых однородных идеалов Ae_k, порожденных однородными идемпотентами $e_k \in A_1$, то $V = \sum\limits_{v_\alpha\in V}\sum\limits_{k=1}^{n}(Ae_k)v_\alpha$. Очевидно, $(Ae_k)v_\alpha = \underset{\beta\in T}{\oplus}(A_\beta e_k)v_\alpha$ — A-подмодуль модуля V. Зададим гомоморфизм A-модулей

$Ae_k \to (Ae_k)v_\alpha$ формулой $ae_k \to (ae_k)v_\alpha$. Если V' — некоторый A-подмодуль в $(Ae_k)v_\alpha$, то он имеет вид $V' = \bigoplus\limits_{\beta\in T}(B_\beta e_k)v_\alpha$, $B_\beta \subset A_\beta$ и $(B_\beta e_k)v_\alpha \subset V'$. В силу того, что G-множество M не имеет неподвижных точек, то полный прообраз A-модуля V' есть левый однородный идеал $B = \bigoplus\limits_{\beta\in T} B_\beta e_k$. Так как Ae_k — минимальный левый однородный идеал в A, то идеал B либо равен нулю, либо совпадает с Ae_k. Следовательно, подмодуль $(Ae_k)v_\alpha$ или неприводим, или равен нулю. Таким образом, V есть сумма неприводимых A-модулей, т. е. V вполне приводим. $\square$

Приведем еще один результат, указывающий на определенное сходство структуры ассоциативной алгебры и алгебры ассоциативного типа.

Теорема 7. *Пусть A — полупростая алгебра ассоциативного типа с градуировкой, определенной группой G, и I — левый однородный идеал в A. Тогда $I = Ae$ для некоторого однородного идемпотента e из A.*

Доказательство. В силу полупростоты алгебры A идеал I не может быть нильпотентным и поэтому содержит ненулевой идемпотент [3]. Так как множество T индексов градуировки алгебры A является подмножеством группы G, то все идемпотенты содержатся в A_1, 1 — единица группы G.

Каждому идемпотенту $e \in I \cap A_1$ поставим в соответствие пространство $A(e) = \langle x_\alpha \in I \cap A_\alpha,\ \alpha \in T,\ x_\alpha e = 0\rangle$. Тогда $A(e)$ — левый однородный идеал в A. Множество левых однородных идеалов $A(e)$ непусто и потому имеет минимальный элемент $A(e_0)$.

Если $A(e_0) = 0$, то из равенства $xe_0 - xe_0^2 = 0$ для любого однородного элемента $x \in I$ следует $(x - \lambda xe_0)e_0 = 0$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in k$, т. е. $x = \lambda xe_0$. Но тогда $I = Ie_0 \subset Ae_0 \subset I$, откуда $I = Ae_0$.

Предположим, что $A(e_0) \neq 0$. Покажем, что это предположение приводит к противоречию. Так как $A(e_0)$ — ненулевой левый однородный идеал полупростой алгебры A, то $A(e_0)$ содержит идемпотент $e_1 \in A_1$. По определению $e_1 \in I$ и $e_1e_0 = 0$. Рассмотрим элемент $e = e_0 + e_1 - e_0e_1$. Используя тот факт, что A_1 — ассоциативная алгебра (теорема 5), легко проверить, что e — идемпотент. Из соотношения $e_1e = e_1 \neq 0$ следует $e \neq 0$.

Пусть $x \in A(e)$ и x — однородный элемент. Тогда $xe = 0$ и $(xe)e_0 = 0$. Но $ee_0 = e_0$, следовательно, $xe_0 = 0$, т. е. $x \in A(e_0)$. Значит, $A(e) \subseteq A(e_0)$. Но $e_1 \in A(e_0)$, так как $e_1e_0 = 0$ и $e_1 \notin A(e)$, поскольку $e_1e = e_1 \neq 0$. Поэтому $A(e)$ строго содержится в $A(e_0)$, что противоречит минимальности $A(e_0)$. Таким образом, случай $A(e_0) \neq 0$ невозможен. $\square$

Литература

[1] Bahturin Y., Zaicev M. *Identities of graded algebras* // J. Algebra. – 1998. – V. 205. – № 1. – P. 1–12.

[2] Бахтурин Ю.А., Зайцев М.В., Сегал С.К. *G-тождества неассоциативных алгебр* // Матем. сб. – 1999. – Т. 190. – № 11. – С. 3–14.

[3] Корешков Н.А. *О нильпотентности и разложении алгебр ассоциативного типа* // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 9. – С. 37–42.

[4] Корешков Н.А. *Об одном классе алгебр ассоциативного типа* // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 38–46.

[5] Чеботарев Н.Г. *Введение в теорию алгебр.* – М.–Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1949. – 88 с.

[6] Херстейн И. *Некоммутативные кольца.* – М.: Мир, 1972. – 192 с.

Н.А. Корешков

доцент, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

`e-mail:` Nikolai.Koreshkov@ksu.ru

N.A. Koreshkov

Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Nikolai.Koreshkov@ksu.ru