прерывен из C в C. Вполне непрерывность оператора $g(x)=\int_0^1 (t+x-2tx)^{-1/3} f(t)dt$ из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$ следует из легко получаемых оценок $|g(x)|\leqslant 3M$, $|g(x')-g(x)|\leqslant 3M\ |x'-x|^{1/3}$, где $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$.

Следовательно, интегральный оператор с ядром $K(x, t)$ вполне непрерывен из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$. Тогда, очевидно, интегральный оператор с ядром $R(x, t)$ также вполне непрерывен из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$.

Итак, при указанных ограничениях на коэффициенты p, q уравнения (1) и число δ задача T_δ как в случае а), так и в случае б) однозначно разрешима.

Автор выражает глубокую благодарность А. В. Бицадзе за внимание к работе.

Литература

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа.— М.: Изд-во АН СССР. 1959.— 164 с.
2. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных.— М.: Наука, 1981.— 448 с.
3. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.— М.: Наука, 1966.— 203 с.
4. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям.— М.: Физматгиз, 1959.— 232 с.
5. Зайнулабидов М. М.— Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 1, с. 91—99.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Физматгиз, 1962.— 599 с.
7. Tricomi F.— Atti Accad. Naz, Lincei Mam., 1923, ser. 5, vol. 14, fasc. 7, p. 133—247.
8. Франкль Ф. И.— Изв. АН СССР. Сер. мат. наук, 1945, т. 9, № 2, с. 121—143.
9. Зайнулабидов М. М.— Дифференц. уравнения, 1970, т. 6, № 1, с. 99—108.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики.— М.: Наука, 1974, т. 4, ч. 1.— 336 с.

Дагестанский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию 25 июня 1984 г.

УДК 517.956.227

Н. Ю. КАПУСТИН, А. С. МАКИН

ТОЧНЫЕ ПО ПОРЯДКУ СООТНОШЕНИЯ АНТИАПРИОРНОГО ТИПА МЕЖДУ СОБСТВЕННЫМИ И ПРИСОЕДИНЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

В настоящей работе устанавливаются точные по порядку антиаприорные оценки для собственных и присоединенных функций эллиптического оператора произвольного порядка. Доказательство существенно использует метод В. А. Ильина, изложенный в работе [1].

Итак, рассмотрим в произвольной N-мерной области G оператор

$$Lu = \sum_{|\alpha|=m,\,|\beta|=m} D^\alpha (A_{\alpha,\beta}(x) D^\beta u) + \sum_{|\gamma|\leqslant 2m-1} A_\gamma(x) D^\gamma u, \qquad (1)$$

коэффициенты $A_{\alpha,\beta}(x)$ которого являются вещественнозначными, а коэффициенты $A_\gamma(x)$, вообще говоря, комплекснозначными функциями точки x.

Для простоты будем считать функции $A_{\alpha,\beta}(x)$ и $A_\gamma(x)$ бесконечно дифференцируемыми в области G.

Кроме того, предположим, что коэффициенты $A_{\alpha,\beta}(x)$ оператора (1) удовлетворяют на каждом компакте K области G условию равномерной эллиптичности, т. е. $A_{\alpha,\beta}(x)=A_{\beta,\alpha}(x)$ и существует положитель-

ная постоянная $\rho(K)$ такая, что для любого вещественного вектора $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ и для любой точки x, принадлежащей компакту K, справедлива оценка

$$(-1)^{m+1} \sum_{|\alpha|=m, |\beta|=m} A_{\alpha,\beta}(x)\xi^\alpha \xi^\beta \geqslant \rho(K)|\xi|^{2m}. \tag{2}$$

Следуя В. А. Ильину, под собственной функцией оператора (1), отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую неравную тождественно нулю комплекснозначную функцию $\overset{0}{u}(x)$ из класса $C^{(2m)}(G)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $L\overset{0}{u}+\lambda\overset{0}{u}=0$.

Аналогично под присоединенной функцией порядка l ($l=1, 2, \ldots$), отвечающей тому же собственному значению λ и собственной функции $\overset{0}{u}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $\overset{l}{u}(x)$ из класса $C^{(2m)}(G)$, которая является решением уравнения $L\overset{l}{u}+\lambda\overset{l}{u}=\overset{l-1}{u}$.

Теорема 1. *Пусть фиксированы два произвольных компакта K и K' области G, первый из которых содержится строго внутри второго. Тогда существует постоянная C, зависящая лишь от компактов K и K', от коэффициентов оператора (1), от константы $\rho(K')$ из неравенства (2), от размерности N области G, от порядка $2m$ оператора (1) и от порядка $l+1$ присоединенной функции, такая, что для любого $l=0, 1, 2, \ldots$ справедлива оценка*

$$\|\overset{l}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant C(1+|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{2m}})\|\overset{l+1}{u}\|_{L_2(K')}. \tag{3}$$

Сформулированная теорема 1 в случае $m=1$ при ограничении $|\mathrm{Im}\lambda|\leqslant M\sqrt{|\lambda|}$ на собственные значения λ была установлена В. А. Ильиным в работе [1]. Им же в работе [2] при аналогичном ограничении на область изменения спектрального параметра доказана оценка (3) для собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка.

В качестве «срезки» $\eta(x)$ выберем любую функцию из класса $C^{(2m+1)}(R^N)$, равную единице в каждой точке шара $V(x_0, R)$ и нулю вне $V(x_0, R+\delta)$. Легко проверяется справедливость неравенства

$$\left|\frac{\partial\eta^k}{\partial x_i}\right| \leqslant c_1 k\eta^{k-1}, \quad i=1, 2, \ldots, N, \tag{4}$$

где k — любое натуральное число.

Теорема 1 является следствием леммы Гейне — Бореля и следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть фиксированы произвольные положительные числа R, δ и ε и произвольное четное натуральное число k. Тогда для всех точек x произвольного компакта K области G, расстояние которого от границы области G превосходит число $R+\delta+2\varepsilon$, существуют постоянные C_k^l и $\hat{C}_k^l$, зависящие лишь от R, δ, ε, k, K, от порядка присоединенной функции $l+1$, от коэффициентов оператора (1), от константы $\rho(K\cup V(x_0, R+\delta+\varepsilon))$ из неравенства (2) и от размерности N области G, такие, что для любого номера l ($l=0, 1, 2, \ldots$) справедливо неравенство*

$$\int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^k |\overset{l}{u}|^2 dx \leqslant C_k^l (1+|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}}) \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^{k-2} |\overset{l+1}{u}|^2 dx +$$

$$+ \hat{C}_k^l (1+|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-2}{m}}) \int\limits_{V(x_0, R+\delta+\varepsilon)} |\overset{l+1}{u}|^2 dx. \tag{5}$$

Следуя идее работ [1, 3], установим сначала оценку (5) в случае $l=0$. Очевидно, достаточно доказать ее при $|\mathrm{Re}\lambda|\geqslant 1$.

Для этого нам понадобится оценка

$$|\mathrm{Im}\,\lambda|^2 \int\limits_{V(x_0,R+\delta)} \eta^{k+2}|\overset{0}{u}|^2\,dx \leqslant c_2|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}} \int\limits_{V(x_0,R+\delta)} \eta^k|\overset{0}{u}|^2\,dx + $$
$$+ c_3|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-2}{m}} \int\limits_{V(x_0,R+\delta+\varepsilon/2)} |\overset{0}{u}|^2\,dx, \tag{6}$$

которая является следствием трех неравенств

$$\int\limits_{V(x_0,R+\delta)} |D^h\overset{0}{u}|^2\,dx \leqslant c_4|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{|h|}{m}} \int\limits_{V(x_0,R+\delta+\varepsilon/4)} |\overset{0}{u}|^2\,dx,\ |h|\leqslant 2m-1, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}|\mathrm{Im}\,\lambda|^2 \int\limits_{V(x_0,R+\delta)} \eta^{k+2}|\overset{0}{u}|^2\,dx \leqslant c_5 \int\limits_{V(x_0,R+\delta)} \eta^k \sum_{|h|=2m-1} |D^h\overset{0}{u}|^2\,dx + \\ + c_6 \int\limits_{V(x_0,R+\delta)} \sum_{|h|<2m-1} |D^h\overset{0}{u}|^2\,dx + c_7|\mathrm{Re}\,\lambda| \int\limits_{V(x_0,R+\delta)} |\overset{0}{u}|^2\,dx,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{V(x_0,R+\delta)} \eta^k|D^h\overset{0}{u}|^2\,dx \leqslant c_8|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}} \int\limits_{V(x_0,R+\delta)} \eta^k|\overset{0}{u}|^2\,dx + \\ + c_9|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-2}{m}} \int\limits_{V(x_0,R+\delta+\varepsilon/4)} |\overset{0}{u}|^2\,dx,\ |h|=2m-1,\end{gathered} \tag{9}$$

первое из которых установлено в работе [4], а второе и третье будут доказаны ниже.

Рассмотрим в $N+1$-мерном цилиндре

$$\text{Ц}=\{x\in V(x_0,\ R+\delta),\ \ |t-t_0|<R+\delta\}$$

функцию $\overset{0}{v}(x,\ t)=\overset{0}{u}(x,\ t)\exp(i\,\mathrm{Im}\,\lambda t)$, удовлетворяющую уравнению $\overset{0}{v}_t=-L\overset{0}{v}-\mathrm{Re}\,\lambda\overset{0}{v}$, которое, очевидно, является уравнением параболического типа. Как и в работе [5], оценим интеграл $\iint\limits_{\text{Ц}} \varphi^k|\overset{0}{v}_t|\,dxdt$, умножив левую и правую часть уравнения для функции $\overset{0}{v}(x,\ t)$ на функцию $\varphi^k(x,\ t)\overline{\overset{0}{v}_t}$, где $\varphi(x,\ t)=\omega(t)\eta(x)$, $\omega(t)$ — функция из класса $C^2(-\infty<t<\infty)$, равная единице в каждой точке интервала $|t-t_0|<R$ и нулю вне $|t-t_0|<R+\delta$, и проинтегрировав обе части полученного соотношения по цилиндру Ц.

Применяя формулу Грина и неравенство $\rho a^2/2+b^2/2\rho\geqslant ab$, справедливое для любых действительных a, b и $\rho>0$, получим, используя (4) и аналог для функции $\omega(t)$, следующую оценку:

$$\iint\limits_{\text{Ц}} \varphi^{k+2}|\overset{0}{v}_t|^2\,dxdt \leqslant c_{10}\iint\limits_{\text{Ц}} \varphi^k \sum_{|h|=2m-1} |D^h\overset{0}{v}|^2\,dxdt +$$
$$+ c_{11}\iint\limits_{\text{Ц}} \Big|\varphi^{k+2}\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} A_{\alpha,\beta}(x)\,D^\alpha\overset{0}{v}D^\beta\overline{\overset{0}{v}_t}\Big|\,dxdt +$$

$$+ c_{12} \iint\limits_{Ц} \sum_{|h|<2m-1} |D^h \overset{0}{v}|^2 \, dxdt + c_{13} |\mathrm{Re}\,\lambda| \iint\limits_{Ц} |\overset{0}{v}|^2 \, dxdt,$$

которая приводит к неравенству

$$\iint\limits_{Ц} \varphi^{k+2} |\overset{0}{v}_t|^2 \, dxdt \leqslant c_{10} \iint\limits_{Ц} \varphi^k \sum_{|h|=2m-1} |D^h \overset{0}{v}|^2 \, dxdt +$$
$$+ c_{14} \iint\limits_{Ц} \sum_{|h|<2m-1} |D^h \overset{0}{v}|^2 \, dxdt + c_{11} |\mathrm{Re}\,\lambda| \iint\limits_{Ц} |\overset{0}{v}|^2 \, dxdt. \tag{10}$$

Действительно, условие на коэффициенты $A_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha}$ позволяет записать соотношение

$$A_{\alpha,\beta}(x) D^\alpha f D^\beta f_t + A_{\beta,\alpha}(x) D^\beta f D^\alpha f_t = (A_{\alpha,\beta}(x) D^\alpha f D^\beta f)_t,$$

дающее возможность избавиться от смешанных производных.

Оценка (8) является тривиальным следствием неравенства (10).

Установим оценку (9). В работе [6] доказано, что коэффициенты $A_{\alpha,\beta}$, A_γ оператора L можно продолжить на все пространство R^N так, чтобы полученные функции $\tilde{A}_{\alpha,\beta}$, $\tilde{A}_\gamma$ совпадали с функциями $A_{\alpha,\beta}$, A_γ на компакте $V(x_0, R+\delta)$, были постоянными вне некоторого шара в R^N, бесконечно дифференцируемыми во всем R^N и чтобы оператор $\tilde{L}$ с коэффициентами $\tilde{A}_{\alpha,\beta}$, $\tilde{A}_\gamma$ удовлетворял условию

$$(-1)^{m+1} \inf_{x \in R^N} \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} \tilde{A}_{\alpha,\beta}(x) \xi^\alpha \xi^\beta \geqslant \rho_0 |\xi|^{2m}, \quad \rho_0 > 0.$$

Обозначим через $Z(x, t; \xi, \tau)$ построенное в книге [6] фундаментальное решение параболического по И. Г. Петровскому уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \tilde{L}\varphi + \psi. \tag{11}$$

Согласно формуле для решения задачи Коши для уравнения (11) (см. [6]) и в силу свойств функции $\eta^{k/2}(x)$ имеем

$$\int\limits_{V(x_0, R+\delta)} Z(x, t; \xi, 0) \eta^{k/2}(\xi) \overset{0}{u}(\xi) \, d\xi = \exp(-\lambda t) \eta^{k/2}(x) \overset{0}{u}(x) +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} Z(x, t; \xi, \tau) \exp(-\lambda\tau) \times$$
$$\times (-L(\eta^{k/2}(\xi) \overset{0}{u}(\xi)) - \lambda \eta^{k/2}(\xi) \overset{0}{u}(\xi)) \, d\xi d\tau,$$

откуда, преобразуя второе слагаемое в правой части, получим

$$\int\limits_{V(x_0, R+\delta)} Z(x, t; \xi, 0) \eta^{k/2}(\xi) \overset{0}{u}(\xi) \, d\xi = \exp(-\lambda t) \eta^{k/2}(x) \overset{0}{u}(x) +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} Z(x, t; \xi, \tau) \exp(-\lambda\tau) \sum_{|\alpha| \leqslant 2m-1} F_\alpha(\xi) D^\alpha \overset{0}{u}(\xi) \, d\xi d\tau,$$

где $F_\alpha(\xi)$ — линейная комбинация произведений частных производных не выше порядка $2m$ от функции $\eta^{k/2}(x)$ и коэффициентов оператора L. Продифференцируем последнее равенство по x, считая $|h| = 2m-1$,

$$\int\limits_{V(x_0, R+\delta)} D_x^h Z(x, t; \xi, 0) \eta^{k/2}(\xi) \overset{0}{u}(\xi) \, d\xi =$$

$$= \exp(-\lambda t)\,\eta^{k/2}(x)\,D^h \overset{0}{u}(x) +$$

$$+ \sum_{\beta<h} c_\beta D^{h-\beta}\eta^{k/2}(x)\,D^\beta \overset{0}{u}(x) +$$

$$+ \int_0^t \int_{V(x_0,R+\delta)} D_x^h Z(x,\ t;\ \xi,\ \tau)\exp(-\lambda\tau) \sum_{|\alpha|\leqslant 2m-1} F_\alpha(\xi)\,D^\alpha \overset{0}{u}(\xi)\,d\xi d\tau.$$

Рассматривая первое слагаемое в правой части этой формулы и используя оценки функции $Z(x,\ t;\ \xi,\ \tau)$ и ее производных, содержащиеся в [6], получим

$$\exp(-\operatorname{Re}\lambda t)\|\eta^{k/2}D^h \overset{0}{u}\|_{L_2(V(x_0,R+\delta))} \leqslant c_{15} t^{-\frac{|h|}{2m}} \times$$

$$\times \|\eta^{k/2}\overset{0}{u}\|_{L_2(V(x_0,R+\delta))} + c_{16}\sum_{\beta<h}\|D^{h-\beta}\eta^{k/2}D^\beta \overset{0}{u}\|_{L_2(V(x_0,R+\delta))} +$$

$$+ c_{17} t^{\frac{1}{2m}}(\exp(-\operatorname{Re}\lambda t)+1)\sum_{|\alpha|\leqslant 2m-1}\|D^\alpha \overset{0}{u}\|_{L_2(V(x_0,R+\delta))},$$

откуда, полагая $t = |\operatorname{Re}\lambda|^{-1}$, получим

$$\|\eta^{k/2}D^h \overset{0}{u}\|_{L_2(V(x_0,R+\delta))} \leqslant c_{18}|\operatorname{Re}\lambda|^{\frac{2m-1}{2m}}\|\eta^{k/2}\overset{0}{u}\|_{L_2(V(x_0,R+\delta))} +$$

$$+ c_{19}\sum_{\beta<h}\|D^{h-\beta}\eta^{k/2}D^\beta \overset{0}{u}\|_{L_2(V(x_0,R+\delta))} +$$

$$+ c_{20}|\operatorname{Re}\lambda|^{-\frac{1}{2m}}\sum_{|\alpha|\leqslant 2m-1}\|D^\alpha \overset{0}{u}\|_{L_2(V(x_0,R+\delta))}.$$

Из последнего неравенства и оценки (7) легко вывести оценку (9).

Умножая уравнение для $\overset{0}{u}(x)$, как в работе [1], на функцию $\eta^k \overset{1}{u}(x)$, а уравнение для $\overset{1}{u}$ на функцию $\eta^k \overset{0}{u}(x)$ и интегрируя по частям левую часть суммы полученных соотношений с привлечением оценки из работы [4]

$$\int_{V(x_0,R+\delta)} |D^h \overset{1}{u}|^2\,dx \leqslant \tilde{c}_4(|\operatorname{Re}\lambda|^{\frac{|h|}{m}} + \ln^\alpha|\lambda|)\int_{V(x_0,R+\delta+\varepsilon/4)} |\overset{1}{u}|^2\,dx,\quad |h|\leqslant 2m-1,$$

$\alpha > 0$, и оценки

$$\int_{V(x_0,R+\delta)} \eta^{k-2}|D^h \overset{1}{u}|^2\,dx \leqslant c_{21}|\operatorname{Re}\lambda|^{\frac{2m-1}{m}}\int_{V(x_0,R+\delta)} \eta^{k-2}|\overset{1}{u}|^2\,dx +$$

$$+ c_{22}(|\operatorname{Re}\lambda|^{\frac{2m-2}{m}} + \ln^\alpha|\lambda|)\int_{V(x_0,R+\delta+\varepsilon/4)} |\overset{1}{u}|^2\,dx + \tag{12}$$

$$+ c_{23}\int_{V(x_0,R+\delta)} \eta^{k-2}|\overset{0}{u}|^2\,dx\cdot|\operatorname{Re}\lambda|^{-\frac{1}{m}},\quad |h| = 2m-1,$$

будем иметь

$$\int_{V(x_0,R+\delta)} \eta^k|\overset{0}{u}|^2\,dx \leqslant c_{24}(|\operatorname{Re}\lambda|^{\frac{2m-1}{m}} + \ln^\alpha|\lambda|)\int_{V(x_0,R+\delta)} \eta^{k-2}|\overset{1}{u}|^2\,dx +$$

$$+ c_{25}\left(|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-2}{m}} + \ln^{\alpha}|\lambda|\right) \int\limits_{V(x_0, R+\delta+\varepsilon/4)} |\overset{1}{u}|^2\,dx +$$

$$+ \frac{c_{26}}{|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{1}{m}}} \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^{k-2}\,|\overset{0}{u}|^2\,dx +$$

$$+ \tilde{\varepsilon}\,\frac{|\mathrm{Im}\,\lambda|^2}{\left(|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}} + \ln^{\alpha}|\lambda|\right)} \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^{k+2}\,|\overset{0}{u}|^2\,dx, \qquad (13)$$

где ε — любое положительное число.

Докажем оценку (12). Согласно формуле для решения задачи Коши для уравнения (11) и в силу свойств функции $\eta^{(k-2)/2}(x)$ будем иметь

$$\int\limits_{V(x_0, R+\delta)} Z(x,\ t;\ \xi,\ 0)\,\eta^{\frac{k-2}{2}}(\xi)\,\overset{1}{u}(\xi)\,d\xi = \exp(-\lambda t)\,\eta^{\frac{k-2}{2}}(x)\,\overset{1}{u}(x) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} Z(x,\ t;\ \xi,\ \tau)\exp(-\lambda\tau) \times$$

$$\times \left(-L\left(\eta^{\frac{k-2}{2}}(\xi)\,\overset{1}{u}(\xi)\right) - \lambda\eta^{\frac{k-2}{2}}(\xi)\,\overset{1}{u}(\xi)\right) d\xi d\tau.$$

Рассуждая так же, как при выводе оценки (9), получим неравенство

$$\|\eta^{\frac{k-2}{2}} D^h \overset{1}{u}\|_{L_2(V(x_0, R+\delta))} \leqslant \tilde{c}_{18}\,|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{2m}} \times$$

$$\times \|\eta^{\frac{k-2}{2}}\,\overset{1}{u}\|_{L_2(V(x_0, R+\delta))} + \tilde{c}_{19} \sum_{\beta<h} \|D^{h-\beta}\eta^{\frac{k-2}{2}} D^{\beta}\,\overset{1}{u}\|_{L_2(V(x_0, R+\delta))} +$$

$$+ \tilde{c}_{20}\,|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{1}{2m}} \sum_{|\alpha|\leqslant 2m-1} \|D^{\alpha}\,\overset{1}{u}\|_{L_2(V(x_0, R+\delta))} +$$

$$+ \tilde{c}_{20}\,|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{1}{2m}} \|\eta^{\frac{k-2}{2}}\,\overset{0}{u}\|_{L_2(V(x_0, R+\delta))}.$$

Отсюда и из оценок работы [4] вытекает оценка (12).

Неравенства (6) и (13), если положить $\tilde{\varepsilon} = 1/(2c_2)$, дают вместе с грубой антиаприорной оценкой (см. [4]) в силу $|\mathrm{Re}\,\lambda|^2 + \ln^{\alpha}|\lambda| = |\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{1}{m}}\left(|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}} + \frac{\ln^{\alpha}|\lambda|}{|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{1}{m}}}\right) \leqslant |\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{1}{m}}\left(|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}} + \ln^{\alpha}|\lambda|\right)$ при $|\mathrm{Re}\,\lambda| \geqslant 1$ неравенство (см. работу [2])

$$\int\limits_{V(x_0, R+\delta)} |\overset{0}{u}|^2\,dx \leqslant c_{27}\left(|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}} + \ln^{\alpha}|\lambda|\right) \int\limits_{V(x_0, R+\delta+\varepsilon/3)} |\overset{1}{u}|^2\,dx,$$

применяя которое в силу произвольности R, δ и ε в предыдущем рассуждении в качестве грубой антиаприорной оценки получим

$$\int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^k\,|\overset{0}{u}|^2\,dx \leqslant c_{28}\left(|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}} + \ln^{\alpha}|\lambda|\right) \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^{k-2}\,|\overset{1}{u}|^2\,dx +$$

$$+ c_{29}(|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-2}{m}} + \ln^{\alpha}|\lambda|) \int\limits_{V(x_0, R+\delta+\varepsilon/4)} |\overset{1}{u}|^2\, dx. \tag{14}$$

Далее, применяя конструкцию работы [5] в отношении функции $\overset{1}{v}(x, t)$, будем иметь

$$|\mathrm{Im}\,\lambda|^2 \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^{k+2} |\overset{1}{u}|^2\, dx \leqslant c_{30} |\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}} \times$$

$$\times \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^{k} |\overset{1}{u}|^2\, dx + c_{31} |\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-2}{m}} \times \tag{15}$$

$$\times \int\limits_{V(x_0, R+\delta+\varepsilon/4)} |\overset{1}{u}|^2\, dx + c_{32} \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^{k+2} |\overset{0}{u}|^2\, dx.$$

Если $|\mathrm{Re}\,\lambda| \geqslant |\mathrm{Im}\,\lambda|$, то оценка (5) сразу же следует из оценки (14). Если $|\mathrm{Im}\,\lambda| > |\mathrm{Re}\,\lambda|$, то из неравенства (15) следует оценка

$$|\mathrm{Im}\,\lambda| \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} |\overset{1}{u}|^2\, dx \leqslant c_{33} \int\limits_{V(x_0, R+\delta+\varepsilon/4)} |\overset{1}{u}|^2\, dx,$$

а значит, в силу произвольности R, δ и ε и неравенство (5) при $l=0$.

Оценка (9) и неравенство (5) при $l=0$ дают аналог оценки (6) для функции $\overset{1}{u}(x)$

$$|\mathrm{Im}\,\lambda| \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^{k+2} |\overset{1}{u}|^2\, dx \leqslant c_{34} |\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}} \times$$

$$\times \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^{k} |\overset{1}{u}|^2\, dx + c_{35} |\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-2}{m}} \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} |\overset{1}{u}|^2\, dx.$$

Установим теперь оценку (5) при любом натуральном l.

Аналог соотношения (17) будет содержать дополнительно интеграл $J = \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^k |\overset{l-1}{u}|\,|\overset{l+1}{u}|\, dx$, который можно оценить следующим образом:

$$J \leqslant \frac{|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}}}{2\tilde{\varepsilon}} \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^{k-2} |\overset{l+1}{u}|^2\, dx +$$

$$+ \frac{\tilde{\varepsilon}}{2\,|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}}} \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^{k+2} |\overset{l-1}{u}|^2\, dx.$$

Применяя метод математической индукции, второй интеграл в последнем соотношении оценим с помощью антиаприорной оценки (5). Выполнив это, получим неравенство

$$J \leqslant \frac{|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}}}{2\tilde{\varepsilon}} \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^{k-2} |\overset{l+1}{u}|^2\, dx + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} C_{k+2}^{l-1} \times$$

$$\times \int\limits_{V(x_0, R+\delta)} \eta^{k} |\overset{l}{u}|^2\, dx + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2\,|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{1}{m}}} \hat{C}_{k+2}^{l-1} \int\limits_{V(x_0, R+\delta+\varepsilon/4)} |\overset{l}{u}|^2\, dx,$$

которое при $\tilde{\varepsilon}=(2C_{k+2}^{l-1})^{-1}$ приведет к оценке

$$\int\limits_{V(x_0,R+\delta)} \eta^k |\overset{l}{u}|^2\,dx \leqslant c_{36}(|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}}+\ln^\alpha|\lambda|)\times$$

$$\times\int\limits_{V(x_0,R+\delta)} \eta^{k-2}|\overset{l+1}{u}|^2\,dx + c_{37}(|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-2}{m}}+\ln^\alpha|\lambda|)\times$$

$$\times\int\limits_{V(x_0,R+\delta+\varepsilon/4)} |\overset{l+1}{u}|^2\,dx + \frac{c_{38}}{|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{1}{m}}}\int\limits_{V(x_0,R+\delta+\varepsilon/4)} |\overset{l}{u}|^2\,dx +$$

$$+\tilde{\varepsilon}\,\frac{|\mathrm{Im}\,\lambda|^2}{(|\mathrm{Re}\,\lambda|^{\frac{2m-1}{m}}+\ln^\alpha|\lambda|)}\int\limits_{V(x_0,R+\delta)} \eta^{k+2}|\overset{l}{u}|^2\,dx.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущим в случае $l=0$. Теорема доказана.

Авторы выражают глубокую благодарность В. А. Ильину за постановку рассмотренной задачи и внимание к настоящей работе.

Литература

1. Ильин В. А.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 1, с. 30—37.
2. Ильин В. А.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 5, с. 771—794.
3. Ильин В. А., Моисеев Е. И.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1859—1867.
4. Макин А. С.— Докл. АН СССР, 1983, т. 269, № 2, с. 281—284.
5. Капустин Н. Ю.— Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 1, с. 41—45.
6. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа.— М.: Мир, 1968.— 427 с.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Всесоюзный заочный машиностроительный институт

Поступила в редакцию 25 июня 1984 г.

УДК 517.95

В. В. КОРНИЕНКО

О СПЕКТРЕ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В последнее время началась интенсивная разработка спектральной теории для уравнений смешанного типа [1, 2]. Однако проблемы спектра уже для модельных уравнений смешанного типа требуют специальных исследований. Например, существенные трудности возникают при исследовании спектра задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева — Бицадзе. Исследованию специфических свойств решений для подобных уравнений в специальной «модельной» ситуации и посвящена настоящая работа. Метод исследования позволяет охватить довольно широкий класс уравнений и рассмотреть природу ряда присущих им специфических свойств. Свойства уравнений описываются в терминах спектральных свойств соответствующих операторов.

§ 1. ИРРЕГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть $V_t\equiv(0,\ b)$ — ограниченный интервал вещественной оси t, V_x — ограниченная область пространства R^n переменных $x=(x_1,\ ...,\ x_n)$ с достаточно гладкой границей ∂V_x. Пусть $H_t\equiv\mathscr{L}_2(V_t)$, $H_x\equiv\mathscr{L}_2(V_x)$—