Алгебра и логика, 37, N 6 (1998), 621—626

УДК 512.543.14

О ЛОКАЛЬНОЙ ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИЙ РОСТА КОНЕЧНО-ПОРОЖДЕННЫХ ГРУПП И ВОПРОСЕ 5.2 ИЗ КОУРОВСКОЙ ТЕТРАДИ*)

П. де ла АРП, Р. И. ГРИГОРЧУК

§ 1. Ответ на вопрос 5.2 из Коуровской тетради

Пусть Γ — группа, порожденная конечным множеством S.

Символом $l(\gamma)$ обозначается длина элемента $\gamma \in \Gamma$, т. е. наименьшее число n такое, что существует последовательность элементов $s_1, s_2, \ldots, s_n$ из $S \cup S^{-1}$, для которой $\gamma = s_1 s_2 \ldots s_n$.

Ряд роста $\Sigma(z)$ и функция роста $\sigma(n)$ пары (Γ, S) определяются соотношениями

$$\Sigma(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma} z^{l(\gamma)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(n) z^n.$$

В "Коуровской тетради" (издание 1976 г.) В. В. Беляев и Н. Ф. Сесекин сформулировали следующую проблему: *Доказать, что*

$$\sigma(n) \leqslant \frac{\sigma(n-1) + \sigma(n+1)}{2}$$

для всех достаточно больших n (вопрос 5.2 из [1]).

Однако данное предположение неверно. Для этого рассмотрим равносторонний треугольник на евклидовой плоскости, группу, порожденную отражениями отиосительно его сторон и подгруппу Γ в ней, состоящую

*)Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда научных исследований Швейцарии, а также РФФИ, грант N 96-01-00974.

из сохраняющих ориентацию преобразований. Тогда Γ имеет хорошо известное копредставление

$$\Gamma = \langle a, b | a^3 = b^3 = (ab)^3 = 1 \rangle.$$

Это следует, например, из теоремы Пуанкаре о многоугольниках и порождающих изометриях фуксовых групп (см. [2, 3] или главу VII из [4]).

Ряд роста группы Γ относительно системы порождающих $S = \{a, b\}$ равен

$$\Sigma(z) = \frac{(1+2z)(1+2z+2z^2+2z^3-z^4)}{(1-z^2)^2}, \tag{1}$$

и функция $\sigma(n)$ определяется соотношениями $\sigma(0) = 1$, $\sigma(1) = 4$ и

$$\begin{aligned} &\sigma(2k-1) = 8k-2, \quad \text{если } K \geqslant 2, \\ &\sigma(2k) = 10k-2, \qquad \text{если } K \geqslant 1, \end{aligned} \tag{2}$$

что отмечено в примере 8.2 из [5].

Однако в работе Д. Кеннона [5] соотношения (2) не доказаны (эта работа не была опубликована). Во втором параграфе приводятся два независимых доказательства соотношений (1) и (2). То, что коэффициенты ряда, представляющего функцию (1) в окрестности нуля, являются числами, определенными соотношениями (2), проверяется непосредственным вычислением, а также следует из приведенных ниже вычислений для $\sigma(n)$ и $\Sigma(z)$.

Ответ на вопрос 5.2 из [1] вытекает из неравенства

$$\sigma(2k) > \frac{\sigma(2k-1)+\sigma(2k+1)}{2},$$

имеющего место при $k \geqslant 3$, что очевидно благодаря соотношениям (2).

В формулировке вопроса 5.2 из [1] неясно, какую функцию роста — $\sigma(n)$ или $\beta(n) = \sum\limits_{j=0}^{n} \sigma(j)$ — авторы имеют в виду. Однако если предположить, что подразумевается функция $\beta(n)$, то для нашего примера

$$\beta(2k) - \frac{\beta(2k-1)+\beta(2k+1)}{2} = \frac{\sigma(2k)-\sigma(2k+1)}{2} = k-4 > 0,$$

если $k \geqslant 5$, опять-таки предположение опровергнуто.

Отметим еще одно свойство. Граф Кэли G группы Γ, построенный по системе образующих $\{a, b\}$, имеет бесконечно много так называемых тупиковых вершин. В самом деле, геодезический путь, соединяющий начальную вершину графа G с вершиной вида $ab(a^{-1}b)^k$ или $ba(b^{-1}a)^k b$, где $k \geqslant 0$, не может быть продолжен, поскольку все соседние с его концом вершины удалены на расстояние $\leqslant 2k+3$ от начала (по-видимому, впервые это было отмечено в [6]).

§ 2. Вычисление функции роста

Приведенный ниже рисунок показывает часть графа Кэли G. Вершинами этого графа являются точки на евклидовой плоскости с координатами

$$\begin{aligned} &(4x, y), && \text{если } y = 4k\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ &(4x+2, y), && \text{если } y = (4k+2)\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ &(2x+1, y), && \text{если } y = (2k+1)\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

где $x, k \in \mathbb{Z}$.

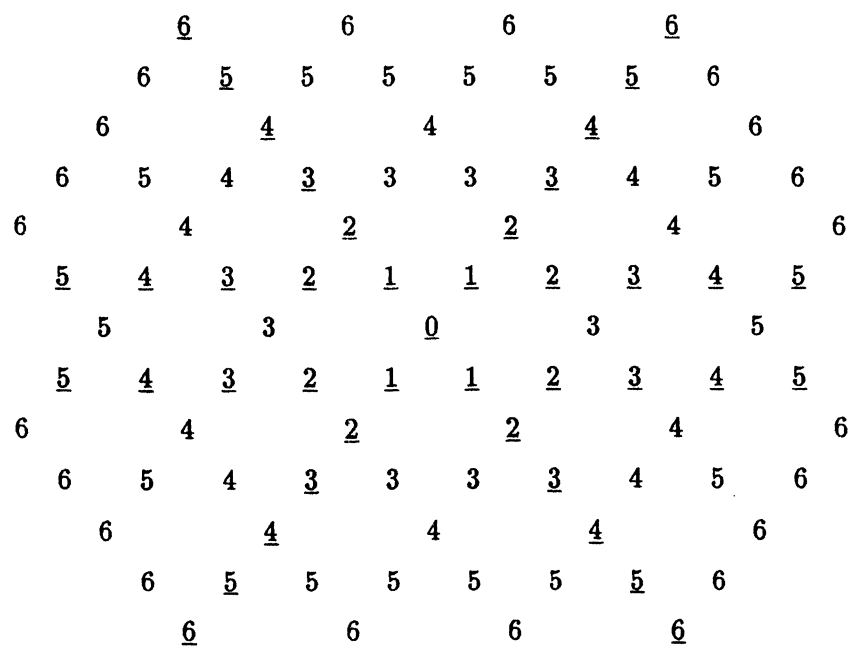

Рис.

Каждая вершина представлена на рисунке числом, равным расстоянию в G до начальной вершины (смысл подчеркивания некоторых вершин будет объяснен ниже).

Соотношения $a^3 = 1$, $b^3 = 1$ соответствуют треугольникам в графе (например, двум треугольникам с вершинами на расстоянии 0, 1, 1 от начала), а соотношение $(ab)^3 = 1$ соответствует шестиугольникам (например, двум шестиугольникам с вершинами на расстояниях 0, 1, 2, 3, 2, 1 от начала и двум шестиугольникам с вершинами на расстояниях 1, 2, 3, 3, 2, 1).

Индукцией по n несложно проверить, что каждая комбинаторная сфера радиуса n (т.е. множество вершин, удаленных на расстояние n от начала) в графе G определяет либо шестиугольник (когда n четно), либо шестиугольник с двумя дополнительными вершинами (когда n нечетно) и что число точек на такой сфере равно

$$\sigma(n) = \begin{cases} 4 \cdot (2k) + 2 \cdot (k-1) = 10k - 2, & \text{если } n = 2k \geqslant 2, \\ 4 \cdot (k-1) + 2 \cdot (2k) + 2 = 8k - 2, & \text{если } n = 2k - 1 \geqslant 3, \end{cases}$$

выражение справа соответствует суммированию по шести сторонам шестиугольника, когда n четно, и суммированию по шести сторонам шестиугольника и двум дополнительным вершинам, когда n нечетно.

Докажем теперь соотношение (1). Рассмотрим замкнутый конус L на плоскости, определенный неравенством $y \geqslant 2|x|$. Вклад вершин графа G, принадлежащих конусу L, в ряд $\Sigma(z)$, очевидно, равен

$$\begin{aligned} F(z) &= 1 + 2z + 2z^2 + 4z^3 + 3z^4 + \cdots + (k+1)z^{2k} \\ &\quad + 2(k+1)z^{2k+1} + \cdots = \frac{1+2z}{(1-z^2)^2}. \end{aligned}$$

Евклидова плоскость является объединением шести конусов: конуса L и его пяти изометричных копий, а также множества

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad |y| \leqslant 2|x|\right\}.$$

Общими границами этих семи замкнутых множеств являются две прямые

$\{y = \pm 2x\}$ и четыре полупрямые $\{|y| = 1$ и $|x| \geqslant \frac{1}{2}\}$ (на рисунке вершины графа G, находящиеся на общих границах, подчеркнуты).

Отсюда следует, что ряд Σ представляет собой сумму двух копий ряда F (соответствующих двум конусам с вершинами в начале координат), четырех копий ряда F, умноженного на z (соответствующих четырем конусам с вершинами в точках $\pm\frac{1}{2}, \pm 1$), а также ряда, соответствующего точкам на горизонтальной оси без начала координат, из которой вычтен ряд с точками, принадлежащими пересечениям конусов. Таким образом,

$$\begin{aligned}\Sigma(z) &= ((2+4z)F(z)) + \left(\frac{2z^3}{1-z^2} - \left(2\frac{1+z}{1-z} - 1\right)\right) \\ &= \frac{(1+2z)(1+2z+2z^2+2z^3-z^4)}{(1-z^2)^2},\end{aligned}$$

что совпадает с выражением (1). Заметим, что существуют и другие способы вычисления ряда роста группы Г. Например, можно воспользоваться методом замещения [7]. Интересный подход к вычислению $\Sigma(z)$ предложен Л. Бартольди в устном сообщении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коуровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории групп, под ред. В. Д. Мазурова, Е. И. Хухро, Новосибирск, Институт математики СО РАН, 1995.
2. *H. Poincaré*, Théorie des groupes fuchsiens, Acta Math., 1 (1982), 1—62.
3. *J. Milnor*, On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p,q,r)$, in: "Knots, Groups and 3-manifolds", Papers dedicated to the memory of R. H. Fox, L. P. Neuwirth ed. (Annals of Math. Studies, 84), Princeton, Princeton Univ. Press, 1975, 175—225.
4. *B. Iversen*, Hyperbolic geometry (London Math. Soc. Student Texts, 25), Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1992.
5. *J. W. Cannon*, The growth of the closed surface groups and compact hyperbolic Coxeter groups, Univ. of Wisconsin, 1980, preprint.
6. *О. В. Богопольский*, Бесконечные соизмеримые гиперболические группы билипшицево эквивалентны, Алгебра и логика, 36, N 3 (1997), 1259—272.

7. *P. Wagreich*, The growth series of discrete groups, in: "Proc. Conference on algebraic varieties with group actions" (Springer Lecture Notes Series, 956), 1982, 125—144.

Адреса авторов:

Поступило 23 июня 1997 г.
Окончательный вариант
19 декабря 1997 г.

Pierre de la HARPE,
Section de Mathématiques
Université de Geneve
C.P. 240, CH-1211
Geneve 24
SUISSE

ГРИГОРЧУК Ростислав Иванович
РОССИЯ,
117966, Москва,
ул. Губкина, 8,
Институт математики
им. В.А. Стеклова РАН.
e-mail: grigorch@mi.ras.ru