A. H. Begmatov, A. O. Pirimbetov, A. K. Seidullaev, Weakly ill-posed problems of integral geometry witch perturbation on polygonal lines,
Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform., 2015, Volume 15, Issue 1, 5–12

https://www.mathnet.ru/eng/isu557

МАТЕМАТИКА

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 517.946

СЛАБО НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВОЗМУЩЕНИЕМ НА СЕМЕЙСТВЕ ЛОМАНЫХ

А. Х. Бегматов[1], А. О. Пиримбетов[2], А. К. Сеидуллаев[3]

[1]Доктор физико-математических наук, профессор кафедры инженерной математики, Новосибирский государственный технический университет, BegAH@ngs.ru

[2]Аспирант кафедры инженерной математики, Новосибирский государственный технический университет, azik.8622@mail.ru

[3]Аспирант кафедры инженерной математики, Новосибирский государственный технический университет, abat_1984@inbox.ru

Изучается задача восстановления функции в полосе по известным интегралам от нее с заданной весовой функцией вдоль ломаных. Для двух классов весовых функций получены явные формулы обращения, на их основе доказаны теоремы единственности и существования решения. Получены оценки устойчивости решения задач в пространствах Соболева, откуда вытекает слабая некорректность задач. Для задач интегральной геометрии с возмущением также доказаны теоремы единственности и получены оценки устойчивости решения в пространствах Соболева.

Ключевые слова: некорректные задачи, задачи интегральной геометрии, интегральные преобразования, формула обращения, единственность решения, теорема существования, слабая неустойчивость, возмущение.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются задачи восстановления функции, если известны интегралы от нее по ломаным с заданной весовой функцией, а также суммы интегралов по ломаным и по областям, ограниченным ломаными и осью Ox. Задачи первого типа относятся к задачам интегральной геометрии [1]. Такие задачи на линейных многообразиях и других явно заданных кривых и поверхностях имеют многочисленные приложения в компьютерной, сейсмической и ультразвуковой томографии, задачах восстановления изображения [1–3].

Задача восстановления функции по известным интегралам от нее на семействе конусов в случае пространства четной размерности изучалась в статье [4]. Была доказана теорема единственности и построено представление решения, получены оценки устойчивости решения в пространствах Соболева и тем самым показана слабая некорректность задачи. Задача о восстановлении функции, заданной интегралами на n-параметрическом семействе конических поверхностей с вершинами, пробегающими фиксированную координатную ось, была рассмотрена С. В. Успенским [5].

В работах [6, 7] рассматривались новые постановки слабо некорректных задач интегральной геометрии на параболических кривых со специальными весовыми функциями. В [8] получено аналитическое представление для образа Фурье по первой переменной от искомой функции, из которого вытекает утверждение о сильной некорректности решения задачи.

В параграфе 1 мы рассматриваем задачу интегральной геометрии на семействе ломаных с весовой функций Хевисайда. Выведена явная формула обращения, на основе которой доказана теорема единственности и получены оценки устойчивости решения задачи. Из этих оценок вытекает слабая некорректность задачи. Доказана теорема существования решения задачи. Для задачи интегральной геометрии с возмущением также представлены результаты по единственности и устойчивости ее решения.

В параграфе 2 получены аналогичные результаты для задачи интегральной геометрии на семействе ломаных с кусочно-постоянной весовой функцией и соответствующей задачи с возмущением.

Введем обозначения, которые будем использовать далее:

$$(x,y) \in R^2, \qquad (\xi,\eta) \in R^2, \qquad \lambda \in R^1, \qquad \mu \in R^1, \qquad L_H = \{(x,y) : x \in R^1,\ y \in [0,H],\ H < \infty\}.$$

В полосе L_H рассмотрим семейство ломаных, которые определяются соотношениями

$$\Gamma(x,y) = \{(\xi,\eta) : y - \eta = |x - \xi|,\ 0 \leqslant y \leqslant H\}.$$

Задача 1. *Восстановить функцию двух переменных $u(x,y)$, если в полосе L_H известны интегралы от нее по кривым семейства $\{\Gamma(x,y)\}$ с весовой функцией $g(x,y)$:*

$$\int\limits_{\Gamma(x,y)} g(x,\xi)u(x,y)\,d\xi = f(x,y). \tag{1}$$

Задача 2. *Восстановить функцию двух переменных $u(x,y)$, если в полосе L_H известны суммы интегралов от нее вида*

$$\int\limits_{\Gamma(x,y)} g(x,\xi)u(x,y)\,d\xi + \int\limits_0^y \int\limits_{x-h}^{x+h} K(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \mathbb{F}(x,y), \tag{2}$$

где $h = y - \eta$.

Задача 1 является задачей интегральной геометрии вольтеровского типа [9], задача 2 соответствует задаче интегральной геометрии с возмущением [10, 11].

1. ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ ХЕВИСАЙДА

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех $(x,y) \in L_H$, весовая функция имеет вид*

$$g(x,\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > x, \\ 0, & \xi < x. \end{cases}$$

Тогда решение задачи 1 в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных с носителем в полосе L_H функций единственно, выражается через функцию $f(x,y)$ по формуле

$$u(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x,y) \tag{3}$$

и удовлетворяет неравенству

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \leqslant C_1 \|f(x,y)\|_{W_2^{1,1}},$$

здесь C_1 — некоторая константа.

Доказательство. Уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$\int\limits_0^y u(x+h,\eta)\,d\eta = f(x,y), \tag{4}$$

где $h = y - \eta$. Применим к обеим частям уравнения (4) преобразование Фурье по первой переменной. Получим:

$$\int_0^y \hat{u}\,(\lambda,\eta)\, e^{-i\lambda h}\, d\eta = \hat{f}(\lambda, y), \tag{5}$$

где $\hat{u}(\lambda,\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x,y)dx$, $\hat{f}(\lambda,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x,y)dx$ — преобразования Фурье по переменной x от функций $u(x,y)$ и $f(x,y)$ соответственно.

Теперь применим к уравнению (5) преобразование Лапласа по переменной y:

$$\int_0^\infty e^{-py} \hat{f}(\lambda,y)\, dy = \int_0^\infty e^{-py} \int_0^y \hat{u}(\lambda,\eta) e^{-i\lambda h}\, d\eta\, dy\,.$$

Сделав замену $t = y - \eta$, имеем:

$$\int_0^\infty e^{-p\eta} \hat{u}(\lambda,\eta)\, d\eta \int_0^\infty e^{-(p+i\lambda)t} dt = \int_0^\infty e^{-py} \hat{f}(\lambda,y)\, dy\,.$$

Таким образом, из уравнения (4) получаем:

$$\tilde{\hat{u}}(\lambda,p) \cdot I(\lambda,p) = \tilde{\hat{f}}(\lambda,p), \tag{6}$$

где $\tilde{\hat{u}}(\lambda,p) = \int\limits_0^\infty e^{-p\eta} \hat{u}(\lambda,\eta)\, d\eta$, $\tilde{\hat{f}}(\lambda,p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} \hat{f}(\lambda,y)\, dy$, $I(\lambda,p) = \int\limits_0^\infty e^{-(p+i\lambda)t} dt\,.$

Последний интеграл легко вычислить:

$$I(\lambda,p) = \frac{1}{p+i\lambda}\,. \tag{7}$$

С учетом (7) перепишем уравнение (6) в виде

$$\tilde{\hat{u}}\,(\lambda,\, p) = (p+i\lambda)\, \tilde{\hat{f}}\,(\lambda,\, p)\,. \tag{8}$$

Применим к уравнению (8) обратное преобразование Лапласа по p и обратное преобразование Фурье по λ. Учитывая свойства преобразования Лапласа и Фурье, приходим к формуле обращения

$$u(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x,y).$$

Из последнего равенства получаем:

$$\|u(x,y)\|_{L_2}(L_H) = \left\| \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x,y) \right\|_{L_2} (L_H)\,. \tag{9}$$

Используя свойства преобразования Лапласа и Фурье, а также учитывая (9), получим оценку

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \leqslant C_1 \|f(x,y)\|_{W_2^{1,1}},$$

где C_1 — некоторая константа. □

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех $(x,y) \in L_H$, а также удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(x,y)$ финитна по переменной x;

2) $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка;

3) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\Big|_{y=H} = 0;$ $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\Big|_{y=H} = 0.$

Тогда существует решение задачи 1 в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, финитных по аргументу x, определенное формулой (3).

Доказательство. Из условий, наложенных на функции $f(x,y)$, ясно, что к обеим частям (3) можно применить преобразование Фурье по переменной x и преобразование Лапласа по переменной y. Используя свойства преобразования Фурье и Лапласа, получим:

$$\tilde{\hat{u}}(\lambda, p) = (p + i\lambda)\,\tilde{\hat{f}}(\lambda, p),$$

или

$$\tilde{\hat{f}}(\lambda, p) = \frac{1}{(p+i\lambda)}\tilde{\hat{u}}(\lambda, p).$$

Используя формулу (7), можно получить

$$\tilde{\hat{f}}(\lambda, p) = I(\lambda, p)\cdot\tilde{\hat{u}}(\lambda, p), \tag{10}$$

где $I(\lambda,p) = \int\limits_0^\infty e^{-(p+i\lambda)t}dt$.

Применяя к (10) обратное преобразование Лапласа по переменной p, придем к следующему выражению:

$$\hat{f}(\lambda, y) = \int\limits_0^y \hat{u}(\lambda,\eta)e^{i\lambda(y-\eta)}\,d\eta.$$

Применим к последнему уравнению обратное преобразование Фурье по x:

$$f(x,y) = \int\limits_0^y u(x+h,\eta)\,d\eta. \qquad \square$$

Теорема 3. *Пусть функция $\mathbb{F}(x,y)$ известна для всех $(x,y)\in L_H$ и пусть функция $K(x,y,\xi,\eta)$ финитна, имеет все непрерывные производные до второго порядка включительно и вместе со своими производными обращается в нуль на $\Gamma(x,y)$.*

Тогда решение задачи 2 с весовой функцией $g(x,\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > x, \\ 0, & \xi < x \end{cases}$ единственно в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций с носителем в полосе L_H и имеют место оценки

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \leqslant C_2\|\mathbb{F}(x,y)\|_{W_2^{1,1}},$$

где C_2 — некоторая константа.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_0(x,y) = \mathbb{F}(x,y) - f(x,y)$, т. е. второе слагаемое из левой части уравнения (2):

$$\int\limits_0^y\int\limits_{x-h}^{x+h} K(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = f_0(x,y), \qquad h = y-\eta.$$

Проделав несложные вычисления, из равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}f_0(x,y) = \int\limits_0^y\int\limits_{x-h}^{x+h} K_x(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \int\limits_0^y K(x,y,x+h,\eta)u(x+h,\eta)\,d\eta -$$
$$- \int\limits_0^y K(x,y,x-h,\eta)u(x-h,\eta)\,d\eta$$

с учетом ограничений, наложенных на весовую функцию $K(x,y,\xi,\eta)$, найдем выражения для $\dfrac{\partial}{\partial x}f_0(x,y)$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f_0(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}f_0(x,y) = \int\limits_0^y\int\limits_{x-h}^{x+h} K_x(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0(x,y) = \int\limits_0^y \int\limits_{x-h}^{x+h} K_{xx}(x,y,\xi,\eta) u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\,.$$

Входящие в правые части этих выражений производные весовой функции $K(x,y,\xi,\eta)$ ограничены. Тогда при $y < y_0$, где y_0 достаточно мало, получим оценку

$$\|f_0(x,y)\|_{W_2^{1,1}} \leqslant q \|u(x,y)\|_{L_2}, \qquad 0<q<1.$$

Из принципа сжатых отображений для оператора в правой части (2) следует единственность «в малом». А так как это вольтерровский оператор по y, единственность имеет место не только «в малом», но и в целом [12]. □

2. ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Теорема 4. *Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех $(x,y) \in L_H$, весовая функция имеет вид $g(x,\xi) = \operatorname{sgn}(x-\xi)$.*

Тогда решение задачи 1 в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных с носителем в полосе L_H функций единственно, выражается через функцию $f(x,y)$ по формуле

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y) \tag{11}$$

и удовлетворяет неравенству

$$\|u(x,y)\|_{W_2^{1,0}} \leqslant C_3 \|f(x,y)\|_{W_2^{2,2}},$$

где C_3 — некоторая константа.

Доказательство. Уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$\int\limits_0^y [u(x-h,\eta) - u(x+h,\eta)]\, d\eta = f(x,y), \tag{12}$$

где $h = y-\eta$. Аналогично предыдущему случаю применим к этому уравнению преобразование Фурье по первой переменной:

$$\int\limits_0^y \hat{u}(\lambda,\eta) \sin(\lambda h)\, d\eta = \phi(\lambda,y), \tag{13}$$

где $\phi(\lambda,y) = -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x,y)\, dx$ — преобразование Фурье по переменной x от функции $f(x,y)$.

Применим к уравнению (13) преобразование Лапласа по переменной y:

$$\int\limits_0^\infty e^{-py}\phi(\lambda,y)\, dy = \int\limits_0^\infty e^{-py} \int\limits_0^y \hat{u}(\lambda,\eta)\sin(\lambda(y-\eta))\, d\eta\, dy\,.$$

Сделав замену $t = y-\eta$, имеем:

$$\int\limits_0^\infty e^{-p\eta}\hat{u}(\lambda,\eta)\, d\eta \int\limits_0^\infty e^{-pt}\sin(\lambda t)\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-py}\phi(\lambda,y)\, dy\,.$$

Таким образом, из уравнения (12) получаем:

$$\tilde{\hat{u}}(\lambda,p)\cdot J(\lambda,p) = \tilde{\phi}(\lambda,p), \tag{14}$$

где $\phi(\lambda,p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} \hat{f}(\lambda,y)\, dy$,

$$J(\lambda,p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\sin(\lambda t) dt\,. \tag{15}$$

Интеграл (15) легко привести к виду

$$J(\lambda, p) = \frac{\lambda}{p^2+\lambda^2}\,. \tag{16}$$

Из уравнения (14), учитывая (16), получим:

$$\lambda\tilde{\hat{u}}(\lambda, p) = \left(p^2+\lambda^2\right)\tilde{\phi}(\lambda, p). \tag{17}$$

Применим к уравнению (17) обратное преобразование Лапласа по p и обратное преобразование Фурье по λ. Учитывая свойства преобразования Лапласа и Фурье, приходим к формуле обращения

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y).$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\right\|_{L_2}(L_H) = \left\|\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y)\right\|_{L_2}(L_H). \tag{18}$$

Используя свойства преобразования Лапласа и Фурье, а также учитывая (18), получим оценку

$$\|u(x,y)\|_{W_2^{1,0}} \leqslant C_3\|f(x,y)\|_{W_2^{2,2}},$$

где C_3 — некоторая константа. □

Теорема 5. *Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех $(x,y)\in L_H$, а также удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(x,y)$ финитна по переменной x;

2) $f(x,y)$ имеет все непрерывные частные производные до второго порядка включительно;

3) $f(x,y)$ вместе со своими частными производными до второго порядка включительно обращается в нуль на границах полосы L_H, т. е. при $y=0$ и $y=H$.

Тогда существует решение задачи 1 в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, финитных по аргументу x, определенное формулой (11).

Доказательство. Из условий теоремы следует, что к обеим частям уравнения (11) можно применить преобразование Фурье по переменной x. Получим

$$i\lambda\hat{u}(\lambda,y) = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\hat{f}(\lambda,y).$$

Применим к обеим частям последнего уравнения преобразование Лапласа по переменной y:

$$i\lambda\tilde{\hat{u}}(\lambda,p) = \frac{1}{2}(\lambda^2+p^2)\hat{f}(\lambda,y).$$

Из последнего равенства и (14), (16) следует, что

$$\frac{1}{2}\tilde{\hat{f}}(\lambda,p) = i\tilde{\hat{u}}(\lambda,p)\int\limits_0^\infty e^{-pt}\sin(\lambda t)dt\,. \tag{19}$$

Применим к обеим частям уравнения (19) обратное преобразование Лапласа по переменной p. Используя теорему умножения, получим:

$$i\int\limits_0^y \hat{u}(\lambda,\eta)\sin\left(\lambda(y-\eta)\right)\,d\eta = \frac{1}{2}\hat{f}(\lambda,y). \tag{20}$$

Применим к обеим частям уравнения (20) обратное преобразование Фурье по переменной λ. Из теоремы о свертке следует, что

$$\frac{i\lambda}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\int\limits_0^y \hat{u}(\lambda,\eta)\sin(\lambda(y-\eta))\,d\eta\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^y \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(x-h)}\hat{u}(\lambda,\eta)d\lambda\,d\eta - \frac{1}{2}\int\limits_0^y \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(x+h)}\hat{u}(\lambda,\eta)d\lambda\,d\eta = \frac{1}{2}f(x,y).$$

Таким образом, (11) запишется в виде

$$\int\limits_0^y [u(x-h,\eta) - u(x+h,\eta)]\,d\eta = f(x,y). \qquad \square$$

Теорема 6. *Пусть весовая функция имеет вид $g(x,\xi) = \operatorname{sgn}(x-\xi)$, функция $K(x,y,\xi,\eta)$ финитна, имеет все непрерывные производные до второго порядка включительно и вместе со своими производными обращается в нуль на $\Gamma(x,y)$. Тогда решение задачи 2 в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций единственно и имеют место оценки*

$$\|u(x,y)\|_{W_2^{1,0}} \leqslant C_4\|\mathbb{F}(x,y)\|_{W_2^{2,2}},$$

где C_4 — некоторая константа.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_0(x,y)$, т. е. второе слагаемое из левой части уравнения (2):

$$\int\limits_0^y\int\limits_{x-h}^{x+h} K\,(x,y,\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = f_0(x,y), \qquad h = y-\eta\,.$$

Найдем

$$\frac{\partial}{\partial x}f_0(x,y) = \int\limits_0^y\int\limits_{x-h}^{x+h} K_x(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta +$$

$$+\int\limits_0^y K(x,y,x+h,\eta)u(x+h,\eta)\,d\eta - \int\limits_0^y K(x,y,x-h,\eta)u(x-h,\eta)\,d\eta\,.$$

Учитывая ограничения, наложенные на весовую функцию $K(x,y,\xi,\eta)$, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}f_0(x,y) = \int\limits_0^y\int\limits_{x-h}^{x+h} K_x(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_0(x,y) = \int\limits_0^y\int\limits_{x-h}^{x+h} K_{xx}(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,.$$

Из этих выражений аналогично доказательству теоремы 3 при $y < y_0$, где y_0 достаточно мало, получим оценку

$$\|f_0(x,y)\|_{W_2^{1,1}} \leqslant \rho\|u(x,y)\|_{L_2}, \qquad 0<\rho<1.$$

Из принципа сжатых отображений для оператора в правой части (2) и вольтерровости этого оператора вытекает единственность решения уравнения (2). $\square$

Библиографический список

1. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М. : Наука, 1980. 286 с.
2. *Natterer F.* The mathematics of computerized tomography (Classics in Applied Mathematics). Philadelphia : SIAM, 2001. 222 p.
3. *Natterer F., Wubbeling F.* Mathematical methods in image reconstruction. Philadelphia : SIAM, 2001. 213 p.
4. *Бегматов А. Х.* Задача интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 500–505.
5. *Успенский С. В.* О восстановлении функции, заданной интегралами по одному семейству конических поверхностей // Сиб. матем. журн. 1977. Т. 18, № 3. С. 675–684.
6. *Бегматов А. Х., Пиримбетов А. О., Сеидулла-*

ев А. К. Задачи интегральной геометрии в полосе на семействах параболических кривых // Докл. АН ВШ РФ. 2012. № 2(19). С. 6–15.

7. *Begmatov A. H., Pirimbetov A. O., Seidullaev A. K.* Reconstruction stability in some problems of X-ray and seismic tomography // Proc. of IFOST-2012. Tomsk Polytechnic University, 2012. Vol. II. P. 261–266.

8. *Бегматов А. Х., Джайков Г. М.* О восстановлении функции по сферическим средним // Докл. АН ВШ РФ. 2013. № 1(20). С. 6–16.

9. *Бегматов А. Х.* О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости // Докл. АН. 2009. Т. 427, № 4. С. 439–441.

10. *Бегматов А. Х.* Задача интегральной геометрии с возмущением в трехмерном пространстве // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 3–14.

11. *Бегматов А. Х., Петрова Н. Н.* Задача интегральной геометрии с возмущением на кривых эллиптического типа в полосе // Докл. АН. 2011. Т. 436, № 2. С. 151–154.

12. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М. : Изд-во иностр. лит., 1960. 288 с.

Weakly Ill-posed Problems of Integral Geometry witch Perturbation on Polygonal Lines

A. H. Begmatov, A. O. Pirimbetov, A. K. Seidullaev

Novosibirsk State Technical University, 20, Prospekt K. Marksa, 630073, Novosibirsk, Russia, BegAH@ngs.ru, azik.8622@mail.ru, abat1984@inbox.ru

We study a problem of reconstruction of a function in a strip from their given integrals with known weight function along polygonal lines. We obtained two simply inversion formulas for the solution to the problem. Using these representations we prove uniqueness and existence theorems for solutions and obtain stability estimates of a solution to the problem in Sobolev's spaces and thus show their weak ill-posedness. Then we consider integral geometry problems with perturbation. The uniqueness theorems are proved and stability estimates of solutions in Sobolev spaces are obtained.

Key words: ill-posed problems, integral geometry problems, integral transforms, inversion formula, uniqueness, existence theorem, weak instability, perturbation.

References

1. Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., Shishatskii S. P. *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*. Providence, American Mathematical Society, 1986, 290 p. (in Russian).

2. Natterer F. *The mathematics of computerized tomography* (Classics in Applied Mathematics), Philadelphia, SIAM, 2001, 222 p.

3. Natterer F., Wubbeling F. *Mathematical methods in image reconstruction*. Philadelphia, SIAM, 2001, 213 p.

4. Begmatov A. H. The integral geometry problem for a family of cones in the n-dimensional space. *Siberian Math. J.*, 1996, vol. 37, no. 3, pp. 430–435. DOI: 10.1007/BF02104844.

5. Uspenskii S. V. O vosstanovlenii funktsii, zadannoi integralami po odnomu semeistvu konicheskikh poverkhnostei [On reconstruction of a function given integrals over a certain class of conic surfaces]. *Sibirsk. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 1977, vol. 18, no. 3, pp. 675–684 (in Russian).

6. Begmatov A. H., Pirimbetov A. O., Seidullaev A. K. Zadachi integral'noi geometrii v polose na semeistvakh parabolicheskikh krivykh [Problems of integral geometry in a strip on families of parabolic curves]. *Doklady AN VSh RF* [Reports of Russian Higher Education Academy of Sciences], 2012, vol. 2 (19), pp. 6–15 (in Russian).

7. Begmatov A. H., Pirimbetov A. O., Seidullaev A. K. Reconstruction stability in some problems of X-ray and seismic tomography. *Proc. of IFOST-2012*, Tomsk Polytechnic University, vol. II, pp. 261–266.

8. Begmatov A. H., Djaykov G. M. O vosstanovlenii funktsii po sfericheskim srednim [Reconstruction of a function from its spherical means]. *Doklady AN VSh RF* [Reports of Russian Higher Education Academy of Sciences], 2013, vol. 1, no. 20, pp. 6–16 (in Russian).

9. Begmatov A. H. The uniqueness of a solution to a Volterra-type integral problem in the plane. *Doklady Math.*, 2009, vol. 80, no. 1, pp. 528–530. DOI: 10.1134/S1064562409040206.

10. Begmatov A. H. A perturbed integral geometry problem in three-dimensional space. *Siberian Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 1, pp. 1–12.

11. Begmatov A. H., Petrova N. N. The problem of integral geometry with perturbation on elliptic curves in a strip. *Doklady Math.*, 2011, vol. 83, no. 1, pp. 22–25. DOI: 10.1134/S1064562411010078.

12. Trikomi F. Integral equations. New York, Interscience Publishers, Inc.; London, Interscience Publishers Ltd., 1957. 238 p.