И. Р. Шафаревич, О некоторых бесконечномерных группах. II,
Изв. АН СССР. Сер. матем., 1981, том 45, выпуск 1, 214–226

https://www.mathnet.ru/im1554

СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
Том 45, № 1, 1981

УДК 513.6

И. Р. ШАФАРЕВИЧ

О НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРУППАХ. II

Настоящая работа примыкает к моему докладу ([9]), представленному 15 лет назад на конференцию, посвященную 100-летию со дня рождения Кастельнуово. Непосредственным стимулом к ее появлению послужила недавняя рецензия на этот доклад ([7]).

В докладе ([9]) я хотел обратить внимание на то, что некоторые естественно появляющиеся группы (среди них, например, группа автоморфизмов кольца многочленов от нескольких переменных) могут быть естественно рассматриваемы как бесконечномерные аналоги алгебраических групп. Для них можно ввести понятие алгебры Ли, и некоторые известные трудные гипотезы оказываются вполне проверяемыми на уровне алгебр Ли. Отсюда можно доказать и для самих групп некоторые ослабленные формы этих гипотез.

Я надеялся, что намеки, содержащиеся в докладе ([9]), будут достаточны для того, чтобы квалифицированный математик мог восстановить ход рассуждений. Однако из рецензии профессора Камбаяши ([7]) видно, что он столкнулся с трудностями при попытках восстановить доказательства. Поэтому здесь предлагается подробное изложение материала, входившего в доклад ([9]). Некоторые незначительные изменения в формулировках внесены для упрощения изложения.

§ 1

Определения. Бесконечномерным алгебраическим многообразием над полем k назовем индуктивный предел X направленной системы (X_i, f_{ij}) алгебраических многообразий над полем k, причем морфизмы $f_{ij}: X_i \to X_j$ $(i<j)$ являются замкнутыми вложениями.

Дальше мы будем рассматривать только тот случай, когда множество индексов есть множество натуральных чисел $\mathbf{N}$ или имеет такое конфинальное подмножество. Поле k мы будем всегда предполагать алгебраически замкнутым.

Каждое из X_i будет рассматриваться в его топологии Зарисского, а X мы снабдим топологией индуктивного предела, в которой множество $Z \subset X$ тогда и только тогда замкнуто, когда его прообраз в каждом из X_i замкнут. В частности, каждое X_i замкнуто в X.

Непрерывное отображение $f: X \to Y$ двух бесконечномерных алгебраических многообразий назовем морфизмом, если для любого X_i из системы (X_i), определяющей X, найдется такое Y_j в системе (Y_j), определяющей Y, что $f(X_i)\subset Y_j$ и ограничение $f: X_i\to Y_j$ является морфизмом алгебраических многообразий (конечномерных).

Неприводимость и связность бесконечномерного алгебраического многообразия определяется как неприводимость или связность соответствующего топологического пространства.

Предложение 1. *Бесконечномерное алгебраическое многообразие $X=\varinjlim X_i$ тогда и только тогда неприводимо, когда множество неприводимых компонент многообразий X_i, упорядоченное по включению, является направленным.*

Доказательство. Назовем неприводимые компоненты X_i^λ и X_j^μ многообразий X_i и X_j сравнимыми, если существует такая неприводимая компонента X_k^ν многообразия X_k, что $X_i^\lambda\subset X_k^\nu$, $X_j^\mu\subset X_k^\nu$. Условие направленности означает, что любые компоненты X_i^λ и X_j^μ сравнимы. Пусть это условие выполнено, а X приводимо: $X=X'\cup X''$, X' и X'' замкнуты, $X'\neq X$, $X''\neq X$. Пусть $a'\notin X'$, $a''\notin X''$. При некотором i a', $a''\in X_i$. Пусть $a'\in X_i^\lambda$, $a''\in X_i^\mu$, где X_i^λ и X_i^μ — неприводимые компоненты X_i. По условию сравнимости существует такая неприводимая компонента X_j^ν некоторого X_j, что $X_i^\lambda\subset X_j^\nu$, $X_i^\mu\subset X_j^\nu$. Тогда X_j^ν содержится или в X' или в X''. Если, например, $X_j^\nu\subset X'$, то $a''\in X_i^\mu\subset X_j^\nu\subset X'$, что противоречит предположению.

Предположим, что X неприводимо, а X_i^λ и X_j^μ — две несравнимые компоненты многообразий X_i и X_j. Обозначим через S' множество таких неприводимых компонент X_k^ν, что $X_k^\nu\not\supset X_i^\lambda$, через S'' — множество компонент X_l^σ, для которых $X_l^\sigma\not\supset X_j^\mu$, через X' — объединение всех компонент, входящих в S', а через X'' — объединение компонент, входящих в S''. Если X_k^ν — компонента, входящая в S', а X_n^ρ — такая компонента многообразия X_n, что $X_k^\nu\supset X_n^\rho$, то и X_n^ρ содержится в S'. Поэтому S' (аналогично и S'') — замкнутое множество, $X'\cup X''=X$, ввиду несравнимости X_i^λ и X_j^μ, $X'\neq X$, так как X_i^λ не содержится в S' и по аналогичной причине $X''\neq X$. Поэтому X приводимо.

Аналогичная характеристика существует и для связных многообразий. Две компоненты X_i^λ и X_j^μ многообразий X_i и X_j назовем связанными, если у некоторого многообразия X_k существуют такие компоненты $X_k^1, \ldots, X_k^r$, что $X_i^\lambda\subset X_k^1$, $X_j^\mu\subset X_k^r$, $X_k^\nu\cap X_k^{\nu+1}\neq\varnothing$.

Предложение 2. *Бесконечномерное алгебраическое многообразие X тогда и только тогда связно, когда любые две компоненты X_i^λ и X_j^μ любых многообразий X_i и X_j связаны.*

Доказательство совершенно аналогично доказательству предложения 1. Единственное изменение относится к доказательству того, что если компоненты X_i^λ и X_j^μ не связаны, то X не связно. Здесь в качестве множества S' надо взять множество всех компонент, связанных с X_i^λ, а в качестве S'' — множество не связанных с X_i^λ компонент.

Мы опускаем очевидное определение произведения бесконечномерных алгебраических многообразий.

Множество G, являющееся группой и бесконечномерным алгебраическим многообразием, назовем бесконечномерной алгебраической группой, если отображения обращения $G \to G$ и умножения $G \times G \to G$ являются морфизмами.

Предложение 3. *Связная бесконечномерная алгебраическая группа неприводима.*

Пусть G — связная бесконечномерная алгебраическая группа, $G = \varinjlim X_i$. Пусть X_i^λ и X_j^μ — некоторые неприводимые компоненты многообразий X_i и X_j. Ввиду связности многообразия G согласно предложению 2 существует многообразие X_k и такие его компоненты $X_k^1, \ldots, X_k^r$, что $X_i^\lambda \subset X_k^1$, $X_j^\mu \subset X_k^r$, $X_k^\nu \cap X_k^{\nu+1} \neq \varnothing$. Пусть $X_k^\nu \cap X_k^{\nu+1} \ni g_\nu$. Множество $X_k^1 g_1^{-1} X_k^2 g_2^{-1} \ldots X_k^{r-1} g_{r-1}^{-1} X_k^r$ содержится (по определению алгебраической группы) в некотором многообразии X_l. Это множество является неприводимым конечномерным многообразием, так как оно — образ неприводимого многообразия $X_k^1 \times X_k^2 \times \ldots \times X_k^r$ при естественном морфизме. Поэтому оно содержится в некоторой неприводимой компоненте X_l^ρ многообразия X_l. Тогда

$$X_i^\lambda = X_i^\lambda g_1^{-1} g_1 g_2^{-1} g_2 \cdots g_{r-1}^{-1} g_{r-1} \subset X_l^\rho,$$
$$X_j^\mu = g_1 g_1^{-1} \cdots g_{r-1} g_{r-1}^{-1} X_j^\mu \subset X_l^\rho.$$

Поэтому X_i^λ и X_j^μ сравнимы, а отсюда, согласно предложению 1, вытекает неприводимость X.

Если все X_i являются аффинными многообразиями, то X будет называться аффинным бесконечномерным многообразием. Если $k[X_i]$ — кольцо регулярных функций на X_i, то $k[X] = \varprojlim k[X_i]$ назовем кольцом регулярных функций на X. Топология проективного предела превращает $k[X]$ в топологическое кольцо. Морфизм $f: X \to Y$ определяет непрерывный гомоморфизм $f^*: k[Y] \to k[X]$.

Если $x \in X$, то соответствие $f \to f(x)$ является непрерывным гомоморфизмом кольца $k[X]$ в поле k. Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками бесконечномерного аффинного многообразия X и непрерывными гомоморфизмами топологического кольца $k[X]$ в поле k.

Пусть X и Y — два бесконечномерных аффинных многообразия. Морфизм $f: Y \to X$ называется замкнутым вложением, если соответствующий непрерывный гомоморфизм колец $f^*: k[X] \to k[Y]$ является строгим эпиморфизмом, т. е. f^* — эпиморфизм и естественный гомоморфизм $k[X]/\mathrm{Ker}\, f^* \to k[Y]$ является изоморфизмом топологических колец. Отождествляя точки с соответствующими непрерывными гомоморфизмами в k, мы получаем, таким образом, вложение Y в X, причем Y является замкнутым подмножеством в X. Мы будем называть в этом случае Y замкнутым подмногообразием.

Исходя из этих определений, очевидным образом определяется аффинная бесконечномерная группа и ее замкнутая подгруппа (являющаяся по определению замкнутым многообразием).

Дальше мы ограничимся рассмотрением аффинных бесконечномерных алгебраических групп, так как автору не известны нетривиальные примеры иного типа (примеры будут рассмотрены в § 2).

Если x — точка бесконечномерного аффинного многообразия X, то функции $f \in k[X]$, для которых $f(x)=0$, образуют замкнутый максимальный идеал $\mathfrak{m}_x$ кольца $k[X]$. Замыкание n-й степени идеала $\mathfrak{m}_x$ в $k[X]$ обозначим $\mathfrak{m}_x^{(n)}$. Если $\mathfrak{m}_{x,i}$ — максимальный идеал точки x в кольце $k[X_i]$ для $X_i \ni x$, то $\mathfrak{m}_x^{(n)} = \varprojlim \mathfrak{m}_{x,i}^{(n)}$ и $\mathfrak{m}_x^{(n)}/\mathfrak{m}_x^{(l)} = \varprojlim \mathfrak{m}_{x,i}^n/\mathfrak{m}_{x,i}^l$ при $n<l$. Топологическое векторное пространство $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{(2)}$ (с топологией проективного предела) называется кокасательным пространством к X в точке x, а двойственное пространство $T_{x,X} = \mathrm{Hom}_c(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{(2)}, k)$ (гомоморфизмы — непрерывные) — касательным. Замкнутое вложение $f: Y \to X$ определяет гомоморфизм $(df)_y: T_{y,Y} \to T_{f(y),X}$.

Нашей целью является доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G — связная аффинная бесконечномерная алгебраическая группа, определенная над полем k характеристики* 0, *H — ее замкнутая подгруппа и $f: H \to G$ — вложение. Если $(df)_e: T_{e,H} \to T_{e,G}$ является изоморфизмом, то f — изоморфизм* (*т. е.* $H=G$).

Прежде чем переходить к доказательству, введем еще одно определение. Обозначим через $\hat{S}^n(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{(2)})$ пополненное n-е симметрическое произведение (см. ([3]), стр. 75) топологического векторного пространства $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{(2)}$. По непрерывности определен гомоморфизм

$$\varphi_n: \hat{S}^n(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{(2)}) \to \mathfrak{m}_x^{(n)}/\mathfrak{m}_x^{(n+1)},$$

являющийся эпиморфизмом как проективный предел эпиморфизмов

$$S^n(\mathfrak{m}_{x,X_i}/\mathfrak{m}_{x,X_i}^2) \to \mathfrak{m}_{x,X_i}^n/\mathfrak{m}_{x,X_i}^{n+1}$$

и ввиду линейной компактности пространства $\hat{S}^n(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{(2)})$. Многообразие X называется гладким в точке x (а точка x — простой на X), если все гомоморфизмы φ_n являются изоморфизмами. В противном случае точка x называется особой.

Теорема 1 является следствием двух других результатов.

ТЕОРЕМА 2. *Если $f: Y \to X$ — замкнутое вложение бесконечномерных аффинных многообразий, X неприводимо, Y гладко в точке $y \in Y$ и гомоморфизм $(df)_y: T_{y,Y} \to T_{f(y),X}$ является изоморфизмом, то f тоже является изоморфизмом.*

ТЕОРЕМА 3. *Бесконечномерная алгебраическая группа, определенная над полем характеристики* 0, *является гладким многообразием.*

Докажем теорему 2. Нам достаточно доказать, что гомоморфизм f^* является мономорфизмом; тогда из определения замкнутого вложения будет следовать, что f — изоморфизм топологических колец $k[Y]$ и $k[X]$, а отсюда вытекает, что $Y=X$.

Пусть $u \in k[X]$, $f^*(u)=0$. Обозначим через Ω_y топологическое векторное пространство $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^{(2)}$. По условию $\Omega_y \simeq \Omega_{f(y)}$. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \hat{S}^n(\Omega_{f(y)}) & \xrightarrow{\sim} & \hat{S}^n(\Omega_y) \\ \downarrow & & \downarrow\wr \\ \mathfrak{m}_{f(y)}^{(n)}/\mathfrak{m}_{f(y)}^{(n+1)} & \to & \mathfrak{m}_y^{(n)}/\mathfrak{m}_y^{(n+1)} \end{array}$$

в которой вертикальная гомоморфизмы эпиморфны, а верхний горизонтальный и правый вертикальный являются по условию изоморфизмами. Отсюда вытекает, что нижний горизонтальный гомоморфизм является мономорфизмом. Таким образом, если $u \in \mathfrak{m}_{f(y)}^{(n)}$ и $f^*(u)=0$, то $u \in \mathfrak{m}_{f(y)}^{(n+1)}$, а значит, $u \in \bigcap \mathfrak{m}_{f(y)}^{(n+1)}$. Пусть X_i^λ — некоторая неприводимая компонента многообразия X_i, проходящая через точку $f(y)$. Обозначим через u_i^λ ограничение u на X_i^λ, а через $\tilde{\mathfrak{m}}$ — максимальный идеал точки $f(y)$ в $k[X_i^\lambda]$. Из доказанного выше соотношения вытекает, что $u_i^\lambda \in \bigcap \tilde{\mathfrak{m}}^n$, т. е. $u_i^\lambda=0$. Пусть X_i^μ — другая компонента многообразия X_i. Как мы видели при доказательстве предложения 1, эти компоненты сравнимы, т. е. содержатся в некоторой неприводимой компоненте X_j^ν какого-то многообразия X_j. Рассуждая как выше, мы получим, что $u=0$ на X_j^ν, а значит, $u=0$ на X_i^μ. Таким образом, $u=0$ на X_i и раз это верно для всех i, то $u=0$.

Теорема 3 в случае конечномерных алгебраических групп хорошо известна. Обычно доказательство соответствующего факта основывают на том, что многообразие G однородно, а множество его простых точек открыто и непусто. К бесконечномерным многообразиям такое рассуждение не применимо, так как такое многообразие вполне может не иметь ни одной простой точки. Например, если C — конечномерное алгебраическое многообразие с особой точкой c_0, $X_i=C^i$, вложение $X_i \to X_{i+1}$ определяется как $(c_1, c_2, \ldots, c_i) \to (c_0, c_1, \ldots, c_i)$ и $X=\bigcup X_i$, то ни одна точка многообразия X не является простой. Однако в случае основного поля характеристики 0 применимо другое доказательство гладкости группового многообразия, принадлежащее Картье. Его мы и изложим, опуская некоторые подробности, совершенно аналогичные конечномерному случаю (см. ([5]) или ([8]), §§ 11, 12).

Мы будем рассматривать только аффинные многообразия и пользоваться языком колец вместо двойственного геометрического языка. Если X и Y — аффинные бесконечномерные алгебраические многообразия, то, как легко видеть, $k[X \times Y]=k[X]\hat{\otimes}k[Y]$ (пополненное тензорное произведение). Пусть G — аффинная бесконечномерная алгебраическая группа, определенная над полем k, $A=k[G]$. Морфизм умножения $\mu : G\times \times G \to G$ определяет непрерывный гомоморфизм $\mu^* : A \to A\hat{\otimes}A$, а гомоморфизм «значение в единичном элементе e» — непрерывный гомоморфизм $\varepsilon : A \to k$. Идеал $\mathfrak{m}_e=\operatorname{Ker} \varepsilon$ обозначим через $\mathfrak{m}$. μ^* и ε связаны известными соотношениями:

$$(\mu^* \hat{\otimes} 1)\, \mu^* = (1 \hat{\otimes} \mu^*)\, \mu^*,$$

$$(\varepsilon \hat{\otimes} 1)\, \mu^* = (1 \hat{\otimes} \varepsilon)\, \mu^* = \mathrm{Id}.$$

Из этих соотношений следует, что для $a \in \mathfrak{m}$

$$\mu^* a = a \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} a + u, \quad u \in \mathfrak{m} \hat{\otimes} \mathfrak{m}.$$

Мы будем рассматривать, не оговаривая этого дальше, только непрерывные дифференцирования топологической k-алгебры A.

Дифференцирование D называется инвариантным, если $\mu^* D = (1 \hat{\otimes} D) \mu^*$. Умножив это равенство на $1 \hat{\otimes} \varepsilon$, получим $D = (1 \hat{\otimes} \varepsilon D) \mu^*$. Положим $\varepsilon D = f$. Это гомоморфизм $A \to k$, причем из того, что D — дифференцирование, следует, что $f(\mathfrak{m}^{(2)}) = 0$. Кроме того, $f(1) = 0$, так что f задается линейной формой, которую мы будем обозначать той же буквой: $f \in \mathrm{Hom}_C(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)}, k)$. Наоборот, по форме $f \in \mathrm{Hom}_C(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)}, k)$ строится инвариантное дифференцирование $D_f = (1 \hat{\otimes} f) \mu^*$, где мы рассматриваем f как гомоморфизм $\mathfrak{m}$, равный 0 на $\mathfrak{m}^{(2)}$ и распространяем на все A, полагая $f(1) = 0$. Здесь $1 \hat{\otimes} f$ рассматривается как гомоморфизм $A \hat{\otimes} A \to A \hat{\otimes} k = A$, при котором $a \otimes b \to a f(b)$. Инвариантность для D_f легко следует из диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\mu^*} & A \hat{\otimes} A & \xrightarrow{1 \otimes f} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \mu^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mu^* \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle \mu^*} \\ A \hat{\otimes} A & \xrightarrow{1 \otimes \mu^*} & A \hat{\otimes} A \hat{\otimes} A & \xrightarrow{1 \otimes (1 \otimes f)} & A \hat{\otimes} A \end{array}$$

Проверка того, что D_f — дифференцирование, также элементарна. Достаточно проверить равенство $D_f(ab) = D_f(a) b + a D_f(b)$ для $a, b \in \mathfrak{m}$. Надо представить $\mu^* a$ и $\mu^* b$ в виде $\mu^* a = 1 \hat{\otimes} a + a \hat{\otimes} 1 + u$, $\mu^* b = 1 \hat{\otimes} b + b \hat{\otimes} 1 + v$, где $u, v \in \mathfrak{m} \hat{\otimes} \mathfrak{m}$, и подставить в наше равенство. После очевидных преобразований мы получим:

$$D_f(ab) = af(b) + bf(a) + (1 \hat{\otimes} f)((a \hat{\otimes} 1) v) + (1 \hat{\otimes} f)(u (b \hat{\otimes} 1)),$$

$$D_f(a) b + a D_f(b) = af(b) + bf(a) + a (1 \hat{\otimes} f)(v) + b (1 \hat{\otimes} f)(v).$$

Остается проверить, что $(1 \hat{\otimes} f)((x \hat{\otimes} 1) z) = x (1 \hat{\otimes} f)(z)$ для $z \in \mathfrak{m} \hat{\otimes} \mathfrak{m}$. Достаточно рассмотреть случай $z = z_1 \hat{\otimes} z_2$, $z_1, z_2 \in \mathfrak{m}$, когда это равенство очевидно.

Таким образом, устанавливается изоморфизм между пространством инвариантных дифференцирований кольца A и пространством $\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)}, k) \simeq T_e$. Так как пространство инвариантных дифференцирований является алгеброй Ли, то тем самым в пространство T_e вводится структура алгебры Ли. Эта алгебра называется алгеброй Ли группы G и обозначается через $\mathscr{L}(G)$.

После этих приготовлений теорема 3 доказывается коротко. Положим $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)} = \Omega$, и пусть $\varphi_k : \hat{S}^k(\Omega) \to \mathfrak{m}^{(k)}/\mathfrak{m}^{(k+1)}$ — введенные раньше гомоморфизмы (очевидно, сюръективные). Пусть для $k < n$ φ_k инъективно (φ_1 — изоморфизм тавтологически). Предположим, что для $x \in \hat{S}^n(\Omega)$ $\varphi_n(x) = 0$. Для любого $f \in \mathrm{Hom}_C(\Omega, k)$ $D_f \mathfrak{m}^{(k)} \subset \mathfrak{m}^{(k-1)}$. Обозначим через $\overline{D}_f$ однозначно определенное дифференцирование в $\hat{S}(\Omega) = \oplus \hat{S}^k(\Omega)$, равное

f на Ω. Тогда $D_f\varphi_n=\varphi_{n-1}\overline{D}_f$ и $\varphi_{n-1}\overline{D}_f(x)=0$. Так как φ_{n-1} по предположению инъективно, то $\overline{D}_f(x)=0$ для любого $f\in\mathrm{Hom}_c(\Omega, k)$. Остается заметить, что если для линейно компактного пространства Ω и для некоторого $x\in\hat{S}^n(\Omega)$ $\overline{D}_f(x)=0$ для любого дифференцирования $\overline{D}_f$, то $x=0$ (в предположении характеристики 0). Это можно вывести, например, из аналога формулы Эйлера. Пространство Ω обладает по предположению счетным базисом $\{e_i\}$, $e_i\to 0$. Если f_i — дуальный базис в $\mathrm{Hom}_c(\Omega, k)$, а $x\in\hat{S}^n(\Omega)$, то

$$nx=\sum\overline{D}_{f_i}(x)\,e_i.$$

Проверить это равенство достаточно для $x=e_{i_1}\hat{\otimes}\ldots\hat{\otimes}e_{i_n}$, когда оно сводится к классическому тождеству Эйлера.

Таким образом установлено, что точка e является простой. Простота других точек следует из однородности группового многообразия.

Замечание. Вышеизложенным рассуждениям можно придать более локальный характер, рассматривая вместо кольца $k[G]$ локальное кольцо точки e. При этом надо сделать выбор между двумя вариантами определения локального кольца точки x бесконечномерного алгебраического многообразия $X=\bigcup X_i$. Можно определить это кольцо как проективный предел локальных колец $\mathcal{O}_{x,X_i}$ точки x на всех содержащих ее многообразиях X_i. Это кольцо полно относительно топологии проективного предела, однако оно не является слоем какого-либо естественного пучка. Другой вариант заключается в том, что рассматриваются функции, регулярные в какой-либо окрестности точки x. Это кольцо является слоем «структурного пучка $\mathcal{O}_X$» многообразия X. Оба определения пригодны для доказательства теоремы 3.

§ 2

Пусть $\mathbf{A}^n$ — n-мерное аффинное пространство над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0. Через $G=\mathrm{Aut}(\mathbf{A}^n)$ мы обозначим группу всех автоморфизмов $\mathbf{A}^n$. Тем самым G — это группа автоморфизмов алгебры многочленов $k[\mathbf{A}^n]=k[T_1, \ldots, T_n]$. Эту алгебру мы будем обозначать дальше R. Выбрав в $\mathbf{A}^n$ систему координат x_i, мы зададим элемент $g\in G$ n элементами $(g(x_1), \ldots, g(x_n))\in R^n$. Мы будем задавать этот элемент набором из $2n$ элементов $(g(x_1), \ldots, g(x_n); g^{-1}(x_1), \ldots, g^{-1}(x_n))\in R^{2n}$. Кольцо многочленов R можно рассматривать как бесконечномерное аффинное пространство, в котором координатами являются коэффициенты многочлена. Пространство R^n и $R^{2n}=R^n\times R^n$ также изоморфно бесконечномерному аффинному пространству и в таком качестве мы будем обозначать R^n через $\mathbf{A}'$, другой экземпляр R^n — через $\mathbf{A}''$, а $R^{2n}=R^n\times R^n$ — через $\mathbf{A}$. Таким образом, $G\subset\mathbf{A}=\mathbf{A}'\times\mathbf{A}''$ и задается «уравнением» $g\circ h=e$, $g\in\mathbf{A}'$, $h\in\mathbf{A}''$. Это уравнение на самом деле есть тождество относительно $x_1, \ldots, x_n$, из которого, приравнивая коэффициенты, мы получаем бесконечное число уравнений, определяющих G в $\mathbf{A}$.

Структура бесконечномерного многообразия в $\mathbf{A}$ определяется подпространствами $\mathbf{A}_i$, где $\mathbf{A}_i$ состоит из наборов $2n$ многочленов, степень каждого из которых $\leqslant i$. Индуцированная структура на G задает, как легко видеть, структуру аффинной бесконечномерной алгебраической группы на G. Наша цель заключается в том, чтобы определить алгебру Ли $\mathscr{L}(G)$ этой группы.

Касательное пространство $T_{e,\mathbf{A}}$ бесконечномерного аффинного пространства $\mathbf{A}$ в точке e, соответствующей единичному элементу группы G, можно отождествить с самим этим пространством: $T_{e,\mathbf{A}}\simeq\mathbf{A}$. Таким образом, элемент $\xi\in T_{e,\mathbf{A}}$ можно задать набором $(P_1, \ldots, P_n; Q_1, \ldots, Q_n)$, P_i, $Q_i\in R$. Элементы из $T_{e,G}\subset T_{e,\mathbf{A}}=\mathbf{A}$ задаются так же. Если $\xi\in T_{e,G}$, то $Q_i=-P_i$. Действительно, для $f\in T_{e,G}$ и $u\in k[\mathbf{A}]$ из $u|_G=0$ следует, что $\langle f, u\rangle=0$. Напомним, что $\langle f, uv\rangle=\langle f, u\rangle v(e)+u(e)\langle f, v\rangle$. Применим это соображение к «уравнению» $g\circ h=e$. Пусть $g(x_i)=\sum a_i^{(\nu)}x^{(\nu)}$, $h(x_j)=\sum b_j^{(\nu)}x^{(\nu)}$, где $a_i^{(\nu)}$ и $b_j^{(\nu)}\in k[\mathbf{A}]$. Здесь $x^{(\nu)}=x_1^{\nu_1}\ldots x_n^{\nu_n}$, $\alpha_i^{(\nu)}=\alpha_i^{(\nu_1,\ldots,\nu_n)}$ и т. д. Тогда $\langle f, g(x_i)\rangle=P_i$, $\langle f, h(x_j)\rangle=Q_j$. Если $\langle f, a_i^{(\nu)}\rangle=\alpha_i^{(\nu)}\in k$, $\langle f, b_j^{(\nu)}\rangle=\beta_j^{(\nu)}$, то наше «уравнение» принимает вид $\sum a_i^{(\nu)}h^{(\nu)}=x_i$, откуда $\left\langle f, \sum a_i^{(\nu)}h^{(\nu)}\right\rangle=0$, где мы полагаем $h=(h(x_1), \ldots, h(x_n))$. Но

$$\left\langle f, \sum a_i^{(\nu)}h^{(\nu)}\right\rangle=\left(\sum \alpha_i^{(\nu)}h^{(\nu)}\right)\Big|_{h=e}+\sum\left(\frac{\partial g(x_i)}{\partial x_j}(h)\langle f, h_j\rangle\right)\Big|_{g=h=e}=P_i+Q_i.$$

Отсюда $Q_i=-P_i$. Поэтому дальше мы будем рассматривать $\mathscr{L}(G)$ как подпространство в $\mathbf{A}'=R^n$, так как этой проекцией элемент из $\mathscr{L}(G)$ однозначно определяется.

Точно так же мы будем рассматривать вложение $(F_1, \ldots, F_n):G\to\mathbf{A}'$ и, таким образом, $\mathscr{L}(G)$ состоит из таких наборов $(P_1, \ldots, P_n)$, что $P_i=\langle f, F_i\rangle$ для некоторого $f\in T_{e,G}\subset T_{e,\mathbf{A}'}$.

Мы зададим алгебру $\mathscr{L}(G)$ как подалгебру дифференцирований кольца R. Именно, если аффинная алгебраическая группа G действует на аффинном многообразии X (оба могут быть и бесконечномерными), то любой элемент $f\in T_{e,G}$ определяет дифференцирование D_f кольца $k[X]$. Если действие G на X задается морфизмом $\varphi: G\times X\to X$, которому соответствует непрерывный гомоморфизм $\varphi^*: k[X]\to k[X]\hat{\otimes}k[G]$, то $D_f=(1\hat{\otimes}f)\varphi^*$. Произведение операторов $D_{f_2}\circ D_{f_1}$ не является, вообще говоря, дифференцированием. Это дифференциальный оператор D_f, определяемый той же формулой $D_f=(1\hat{\otimes}f)\varphi^*$ при помощи свертки $f=f_1*f_2$ отображений f_1 и f_2. Именно, f_1 и f_2 мы рассматриваем как гомоморфизмы $k[G]\to k$, определяя их на $\mathfrak{m}_e$ через композицию $\mathfrak{m}_e\to\mathfrak{m}_e/\mathfrak{m}_e^{(2)}\xrightarrow{f}k$ и доопределяя на $k[G]$ условием $f_i(1)=0$, а f полагаем равным $(f_1\hat{\otimes}f_2)\mu^*$. Равенство $D_{f_2}\circ D_{f_1}=D_f$ немедленно вытекает из рассмотрения коммутативной диаграммы, в которой мы положили $k[G]=A$, $k[X]=R$.

$$\begin{tikzcd}
 & & R\hat\otimes A\hat\otimes A \arrow[dl, "1_R\hat\otimes 1_A\hat\otimes f_1"'] & & R\otimes A \arrow[ll, "1_R\hat\otimes\mu^*"'] \\
 & R\hat\otimes A \arrow[dl, "1_R\hat\otimes f_2"'] & & R\hat\otimes A \arrow[ul, "\varphi^*\hat\otimes 1_A"'] \arrow[dl, "1_R\hat\otimes f_1"'] & \\
R & & R \arrow[ul, "\varphi^*"'] \arrow[ll, "Df_2"'] & & R \arrow[ul, "\varphi^*"'] \arrow[uu, "\varphi^*"'] \arrow[ll, "Df_1"']
\end{tikzcd}$$

Полагая $X=G$ и $\varphi=\mu$, мы видим, что алгебра Ли $\mathscr{L}(G)$ изоморфна алгебре Ли $\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)}, k)$ относительно свертки. Для любого X мы имеем гомоморфизм последней алгебры в алгебру Ли дифференцирований $\mathrm{Diff}\, k[X]$ алгебры $k[X]$. Отсюда следует, что, сопоставляя инвариантному дифференцированию на G дифференцирование кольца $k[X]$, соответствующее той же функции f, мы получаем гомоморфизм $\mathscr{L}(G)$ в алгебру $\mathrm{Diff}\, k[X]$. В нашем случае $X=\mathbf{A}^n$, $G=\mathrm{Aut}\,\mathbf{A}^n$ этот гомоморфизм очевидным образом является мономорфизмом. В качестве подалгебры Ли алгебры $\mathrm{Diff}\, k[\mathbf{A}^n]$ мы и будем исследовать алгебру $\mathscr{L}(G)$.

Обозначим через $J_g(x)$ якобиан эндоморфизма g пространства $\mathbf{A}^n$. Из соотношения $J_{g_1g_2}(x)=J_{g_1}(x)J_{g_2}(g_1(x))$ следует, что если g обладает обратным, то $J_g(x)=c$, что дает нам еще одно «уравнение» группы $G\subset\mathbf{A}'$, которое мы и исследуем. Если $f\in T_{e,G}$, g — эндоморфизм пространства $\mathbf{A}^n$, $g(x_i)=F_i(x_1, \ldots, x_n)$, то

$$\langle f, J_g\rangle=\langle f, J(F_1, \ldots, F_n)\rangle=J(\langle f, F_1\rangle, F_2, \ldots, F_n)\big|_{g=e}+\cdots$$
$$\cdots+J(F_1, F_2, \ldots, \langle f, F_n\rangle)\big|_{g=e}.$$

Отсюда

$$\langle f, J_g\rangle=\frac{\partial\langle f, F_1\rangle}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial\langle f, F_n\rangle}{\partial x_n}.$$

Таким образом, для $(P_1, \ldots, P_n)\in\mathscr{L}(G)$ $\dfrac{\partial P_1}{\partial x_1}+\cdots+\dfrac{\partial P_n}{\partial x_n}=c\in k.$

Нами доказан следующий результат.

ЛЕММА 1. *Алгебра Ли $\mathscr{L}(G)$ бесконечномерной алгебраической группы $G=\mathrm{Aut}(\mathbf{A}^n)$ содержится в алгебре $\Lambda\subset\mathrm{Diff}\, k[\mathbf{A}^n]$, состоящей из дифференциальных операторов вида $D=\sum P_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ с $\mathrm{Div}\, D=0$. То, что Λ есть алгебра Ли, следует из легко проверяемого тождества*

$$\mathrm{Div}[D_1, D_2]=D_1(\mathrm{Div}\, D_2)-D_2(\mathrm{Div}\, D_1).$$

Выделим в группе G две важные подгруппы. Одна из них есть $\mathrm{Aff}(n)$ — группа аффинных преобразований, алгебра Ли ее состоит из дифференциальных операторов $\sum P_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, в которых P_i линейны. Мы обозначим ее через Γ. Другая — $\mathcal{T}$ есть группа треугольных преобразований вида

$$g(x_i)=x_i+f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}), \quad i=1, \ldots, n.$$

Всякое преобразование такого вида есть автоморфизм и поэтому уравнения $\mathcal{T}$ в $\mathbf{A}'$ выписываются просто как обращения в 0 некоторых коэффициентов многочленов $g(x_i)$. Ввиду этого алгебра $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ находится без труда: она состоит из дифференциальных операторов вида $\sum P_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, где $P_i \in k[x_1, \ldots, x_{i-1}]$. Ее мы обозначим через Δ.

ЛЕММА 2. *Алгебры Ли* Γ *и* Δ *порождают всю алгебру Ли* Λ *над полем* k *характеристики* 0.

Доказательство основывается на тождестве

$$\Big[\underbrace{y\frac{\partial}{\partial x}, \ldots, y\frac{\partial}{\partial x}}_{k}, x^r\frac{\partial}{\partial y}\Big] = -kr(r-1)\ldots(r-k+2)\,y^{k-1}x^{r-k+1}\frac{\partial}{\partial x} + $$
$$+ r(r-1)\cdots(r-k+1)\,y^k x^{r-k}\frac{\partial}{\partial y},$$

которое легко проверяется индукцией по r.

Элемент $x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\frac{\partial}{\partial x_i}$ при $i<n$ представим в виде $Cx_i^{\alpha_i}x_n^{\alpha_n}\frac{\partial}{\partial x_i}$, $C=x_1^{\alpha_1}\ldots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$. Ввиду указанного выше тождества, к алгебре, порожденной элементами $x_n\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $x_i^r\frac{\partial}{\partial x_n}$ принадлежит элемент вида

$$Cx_i^{\alpha_i}x_n^{\alpha_n}\frac{\partial}{\partial x_i} + C\cdot F(x_i, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Отсюда следует, что для любых $P_1, \ldots, P_{n-1}$ существует элемент вида $\eta=\sum_{i=1}^{n-1} P_i\frac{\partial}{\partial x_i}+Q\frac{\partial}{\partial x_n}$, принадлежащий алгебре, порожденной подалгебрами Γ и Δ. Пусть $\xi=\sum_{i=1}^{n} P_i\frac{\partial}{\partial x_i}\in\Lambda$. Построенный нами элемент η, конечно, также принадлежит Λ. Поэтому $\xi-\eta=(P_n-Q)\frac{\partial}{\partial x_n}\in\Lambda$. Это значит, что $\frac{\partial(P_n-Q)}{\partial x_n}=c$, т. е. $P_n-Q=cx_n+U$, $U\in k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. Таким образом,

$$\xi = \eta + c x_n \frac{\partial}{\partial x_n} + U \frac{\partial}{\partial x_n},$$

т. е. принадлежит подалгебре, порожденной Γ и Δ.

Следствие. *Алгебра Ли группы G совпадает с Λ.*

Алгебра Λ заведомо не проста — в ней содержится идеал Λ_0, состоящий из дифференциальных операторов D с $\operatorname{Div} D = 0$.

ЛЕММА 3. *Алгебра Ли Λ_0 над полем характеристики 0 проста.*

Действительно, если отличный от 0 элемент $\sum P_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ принадлежит идеалу алгебры Λ_0, то к тому же идеалу принадлежит и

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \sum P_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right] = \sum \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Применяя эту операцию несколько раз, мы получим в нашем идеале ненулевой элемент с постоянными коэффициентами $\sum c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $c_i \in k$. За счет замены переменных можно считать, что это $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Тогда к тому же идеалу принадлежат и элементы

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right] = \sum \frac{\partial X_i}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где $\eta = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ — произвольный элемент алгебры Λ_0. Если нам задан элемент $\xi = \sum Q_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ алгебры Λ_0, то мы можем представить его в таком виде, выбрав X_i из условия $\frac{\partial X_i}{\partial x_1} = Q_i$. Нужно только добиться того, чтобы элемент η принадлежал алгебре Λ_0. Так как $\operatorname{Div} \xi = 0$, то $\frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Div} \eta = 0$, т. е. $\operatorname{Div} \eta = F(x_2, \ldots, x_n)$. Не нарушая условия $\frac{\partial X_i}{\partial x_1} = Q_i$, мы можем заменить X_i на $X_i + \Phi_i(x_2, \ldots, x_n)$. Это меняет $\operatorname{Div} \eta$ на $\sum \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}$ и остается выбрать Φ_i так, что $F + \sum \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} = 0$.

Чтобы вывести из этих утверждений об алгебрах Ли некоторые факты об алгебраических группах, нужен еще один простой результат.

ЛЕММА 4. *Группа $G = \operatorname{Aut} \mathbf{A}^n$ неприводима.*

Ввиду предложения 3 достаточно доказать связность группы G. Для этого годится прием, при помощи которого Александер доказал связность группы гомеоморфизмов шара (1). Группа G как алгебраическое многообразие разлагается в прямое произведение двух подгрупп: группы аффинных преобразований $\mathrm{Aff}(n)$ и группы H, преобразования которой задаются формулами

$$h(x_i) = x_i + f_i^{(2)}(x_1, \ldots, x_n) + f_i^{(3)}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n),$$

где $f_i^{(k)}$ — форма степени k. Поэтому достаточно доказать связность группы H. Обозначим через C_λ гомотетию $C_\lambda(x_i) = \lambda x_i$. Для $h \in H$, $h_\lambda = C_\lambda^{-1} h C_\lambda \in H$

$$h_\lambda(x_i) = x_i + \lambda f_i^{(2)} + \lambda^2 f_i^{(3)} + \cdots + \lambda^{k-1} f_i^{(k)}.$$

Отсюда видно, что $C_\lambda^{-1} h C_\lambda$ — это алгебраическая кривая, соединяющая элемент h (при $\lambda = 1$) с единичным элементом (при $\lambda = 0$).

Из лемм 2 и 4 и теоремы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 4. *Группа G порождается подгруппами* $\mathrm{Aff}(n)$ *и* $\mathcal{T}$, *как алгебраическая группа, т. е. всякая замкнутая алгебраическая подгруппа $G' \subseteq G$, содержащая подгруппы* $\mathrm{Aff}(n)$ *и* $\mathcal{T}$, *совпадает с G.*

Так как для $g \in G$ $J_g(x) \in k^*$, то отображение $g \to J_g$ является гомоморфизмом $G \to G_m$. Его ядро есть подгруппа G_0, алгебра Ли которой совпадает с алгеброй Λ_0. Из леммы 4 точно так же следует

ТЕОРЕМА 5. *Группа G_0 является простой как алгебраическая группа.*

При $n = 2$ известно, что G порождается подгруппами $\mathrm{Aff}(2)$ и $\mathcal{T}$ и как абстрактная группа. Конечно, теорема 4 является слабым приближением к этому результату. Однако для теоремы 5 подобное усиление невозможно: как показал В. И. Данилов, как абстрактная группа, группа G_0 не является простой ([4]) даже при $n = 2$.

Теоремы 1—4 покрывают содержание § 1 доклада ([9]). В заключение сделаем некоторые библиографические замечания к § 2 доклада. Теорема 6 устанавливает уже упомянутое свойство: при $n = 2$ группа G порождается подгруппами $\mathrm{Aff}(2)$ и $\mathcal{T}$. Она не претендовала на новизну, но, как указано в ([9]), выводилась новым способом — путем вложения $\mathbf{A}^2$ в $\mathbf{P}^2$ и разложения каждого автоморфизма $g \in G$, как бирационального автоморфизма $\mathbf{P}^2$, в произведение σ-процессов. Теорема 7 утверждает, что G является даже амальгамированным произведением этих подгрупп, а теорема 8 выводит из этого общий вид конечномерных алгебраических подгрупп группы G. В работе ([2]) эти результаты обобщены на очень широкий класс однородных (и квазиоднородных) алгебраических поверхностей. Наконец, теорема 9 утверждает, что аффинная плоскость $\mathbf{A}^2$ не имеет форм. Это так же обобщено на тот же класс поверхностей в той же работе ([2]). Но и мое прежнее, более элементарное доказательство также было опубликовано. По просьбе профессора Камбаяши я сообщил ему подробно ход доказательства теорем 8 и 9. Он взял на себя труд публикации этих рассуждений ([6]): по-видимому, более общие результаты работы ([2]) ускользнули от его внимания.

Поступило
23.IX.1980

Литература

[1] **Alexander J. W.,** On the deformation of an n — cell, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, № 9 (1923), p. 406.

[2] **Гизатуллин М. Х., Данилов В. И.,** Автоморфизмы аффинных поверхностей. I, Изв. АН СССР. Сер. матем., 39 (1975), № 3, 523—565.

[3] **Grothendieck A.,** Eléments de Géometrie Algebrique, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. № 4, 1940.

[4] **Данилов В. И.,** Непростота группы унимодулярных автоморфизмов аффинной плоскости, Матем. заметки, 15 (1974), № 2, 289—293.

[5] **Demasure M., Grothendieck A.,** Schémas en groupes I. Exp. VII Lecture Notes in Math., № 151.

[6] **Kambayashi T.,** On the abscene of nontrivial separable forms of the affine plane, J. Alg. 35 (1975), p. 449—456.

[7] **Kambayashi T.,** Shafarevitsh I. R. On some infinitedimensional groups (реферат), Math. Rev., 58 (1979), № 5697.

[8] **Mumford D.,** Abelian varieties, Oxford Univ. Press, 1970.

[9] **Shafarevisch I. R.,** On some infinitedimensional groups. Simposio Internazionale di Geometria Algebrica, Roma, 1967, p. 208—212.