Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. V. Astrelin, Search for the eigenpolynomials of the differential operator $P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$ over $\mathbf{C}[x, y]$, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 27–31

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.171
March 18, 2025, 14:25:52

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Редькин Н. П. Об одной математической модели неисправностей контактных схем//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 1. 42—49.
2. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем//Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1958. **51**. 270—360.
3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем//Математические вопросы кибернетики. 1988. Вып. 1. 5—25.
4. Редькин Н. П. О проверяющих тестах замыкания и размыкания//Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих структур. Вып. 40. Новосибирск, 1983. 87—99.

Поступила в редакцию
11.03.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 512.628.2

А. В. Астрелин

ПОИСК СОБСТВЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА $P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y}$ НАД $\mathbf{C}[x, y]$

В статье продолжается исследование следующей задачи: дан дифференциальный оператор $DF=P(x, y)\frac{\partial F}{\partial x}+Q(x, y)\frac{\partial F}{\partial y}$ над $\mathbf{C}[x, y]$, требуется найти множество его собственных неприводимых многочленов, т. е. таких многочленов F, что F делит DF. Эта задача возникает при поиске первых интегралов дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=R(x, y)$, где $R\in\mathbf{C}(x, y)$ [1]. В предыдущей работе [2] рассматривалось решение проблемы, когда P и Q — однородные многочлены равной степени. В этом случае ее удалось решить аналитически; в явном виде выписывалось решение и вычислялась его степень.

В статье рассматривается следующий подход: разложить многочлен F на множители над кольцом степенных рядов по одной из переменных, описать множество всех возможных делителей в явном виде и затем найти произведения этих делителей, которые являются многочленами. Для некоторого достаточно широкого класса операторов это оказывается возможным и для этого класса можно сформулировать полный алгоритм решения задачи.

Запишем условие того, что F — собственный многочлен оператора D: для некоторого $A\in\mathbf{C}[x, y]$ выполняется условие

$$DF=P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}=AF. \tag{1}$$

Обозначим $n=\max(\deg P, \deg Q)$, $N=\deg F$, тогда $\deg A\leqslant n-1$. Пусть $\overline{P}$ и $\overline{Q}$—однородные компоненты степени n многочленов P и Q. Пусть также $R(\alpha)=\alpha\overline{P}(1, \alpha)-\overline{Q}(1, \alpha)$. Если $R\neq 0$, но $\deg R<n+1$, то можно в операторе D сделать замену переменных $x=x_1+cy$, после которой будет выполнено условие $\deg R=n+1$. Мы рассматриваем случай, когда многочлен R свободен от квадратов. Пусть $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$—множество корней многочлена R (все они различны).

Разложим $\frac{\overline{P}}{\overline{P}y-\overline{Q}x}$ в сумму простейших дробей: $\frac{\overline{P}}{\overline{P}y-\overline{Q}x}=\sum\frac{a_i}{y-\alpha_i x}$. Если для некоторого i выполняется условие $a_i\in\mathbf{Q}$, то положим $a_i=\frac{b_i}{c_i}$, b_i, $c_i\in\mathbf{Z}$, $(b_i, c_i)=1$, $c_i>0$.

Если F_N — однородный компонент степени N многочлена F, то можно доказать, что $F_N=\prod_{i=0}^{n}(y-a_i x)^{N_i}$. Значит, F можно разложить в произведение $\prod_{i=0}^{n}G_i$, где $G_i\in\mathbf{C}((x^{-1}))[y]$, точнее $G_i=\sum_{j=0}^{N_i}\sum_{k=N_i-j}^{-\infty}g_{ijk}y^jx^k$ (при этом мы пользуемся тем, что многочлены $(y-\alpha_i x)^{N_i}$ являются взаимно простыми, а множество рядов $\mathbf{C}((x^{-1}))$ является полем). Более того, можно выбрать G_i так, что $\deg_y(G_i-y^{N_i})<N_i$. Для каждого такого многочлена G_i существует многочлен $A_i\in\mathbf{C}((x^{-1}))[y]$, для которого $DG_i=A_iG_i$. Чтобы построить множество всех неприводимых многочленов F, удовлетворяющих условию (1), мы сначала найдем множество всех собственных рядов G_i оператора D. Зафиксируем какое-нибудь i из $0\ldots n$ и обозначим для него $G=G_i$, $A=A_i$, $\alpha=\alpha_i$, $N=N_i$, $a=a_i$, $b=b_i$, $c=c_i$.

Будем искать методом неопределенных коэффициентов решения уравнения $DG=AG$ в виде

$$G=(y-\alpha x)^N+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=N-j}^{-\infty}g_{jk}y^jx^k.$$

Применив подстановку $y=y_1+\alpha x$, получим уравнение $P_1\frac{\partial G_1}{\partial x}+Q_1\frac{\partial G_1}{\partial y}=A_1G_1$, где $x|Q_1$, $G_1=y^N+\ldots$. Можно доказать, что коэффициенты при x^ky^j, где $j=N-\lambda b$, $k=\lambda(b-c)$, $\lambda\in\mathbf{Z}$ (если $a\in\mathbf{Q}$), остаются неопределенными, а остальные выражаются через них однозначно. Неопределенность возникает только когда $\lambda b\leqslant N$, $a>0$, $a\in\mathbf{Q}$. Если $N=b$, то многочлен G задается одним неопределенным параметром, а если $N<b$, то существует ровно одно решение (G, A).

Возможны три случая.

a) $a\leqslant 0$ или $a\notin\mathbf{Q}$. В этом случае для каждого N существует ровно одно решение уравнения $DG=AG$: $G=G_N$, $A=A_N$. Очевидно, что $G_N=G_1{}^N$, $A_N=NA_1$;

b) $a=\frac{b}{c}$, где $b>1$, $c>0$. Тогда для $N=1$ существует единственное решение $G=G_1$, $A=A_1$. Для $N=b$ существует решение $G=G_1{}^N$, $A=A_1{}^N$, так что множество решений при $N=b$ непусто и определяется одним параметром как $G=G_b(t)$, $A=A_b(t)$, где $G_b(0)=G_1{}^N$, $A_b(0)=NA_1$;

c) $a=\frac{1}{c}$, где $c>0$. В этом случае для $N=b=1$ множество решений может быть непустым и иметь вид $G=G_b(t)$, $A=A_b(t)$, а может быть пустым — это зависит от коэффициентов P и Q.

Решения A_1 и G_1 будут рядами из $\mathbf{C}((x^{-1}))[y]$, а A_b и G_b — из $\mathbf{C}[t]((x^{-1}))[y]$. При этом в случае a) отсутствуют решения вида G_b, A_b, а в случае c) — решения вида G_1, A_1.

В случаях b) и c) решения зависят от неопределенных параметров и выделить их произведения, которые являются многочленами, пока не удалось. Но если все α_i попадают в случай a), то нижеприведенный алгоритм позволяет найти все собственные неприводимые многочлены оператора D.

Утверждение, что для всех корней имеет место ситуация а), записывается в виде

$$\frac{\overline{P}}{\overline{P}y-\overline{Q}x}=\sum\frac{a_i}{y-\alpha_i x},\ \text{где } a_i\leqslant 0 \text{ или } a_i\notin\mathbf{Q}\,\forall i.$$

Если это условие выполнено, то каждое решение (G, A) уравнения $DG=AG$ имеет вид $G=\prod G_i^{k_i}$, $A=\sum k_iA_i$, где G_i и A_i — многочлены, соответствующие корню α_i и ранее обозначенные как G_1 и A_1, а $k_i\in\in\mathbf{Z}_+$ ($\mathbf{Z}_+$ — множество всех неотрицательных целых чисел).

Пусть v — вектор $(k_0, k_1, \ldots, k_n)$. Обозначим многочлены G и A, получающиеся для этих параметров k_i, через $G(v)$ и $A(v)$. Наша задача — найти множество M всех векторов v, для которых $G(v), A(v)\in\in\mathbf{C}[x, y]$.

Нетрудно показать, что $G(v)$ является многочленом тогда и только тогда, когда $\sum_{i=0}^{n} k_i f_i^j\in\mathbf{C}[x]$ при любом $j>0$, где $f_i(x)=y-G_i(x, y)$. Кроме того, $A=\sum k_iA_i$, поэтому условие, что A и f — многочлены, записывается в виде бесконечной линейной однородной системы уравнений от k_i. Решать бесконечную систему мы не умеем, но очевидно, что пространство ее решений — пересечение некоторого линейного подпространства с $\mathbf{Z}_+^{n+1}$. Это подпространство можно найти с помощью следующего итерационного процесса. Сначала в качестве L возьмем все пространство $\mathbf{Z}_+^{n+1}$. Если в нем существует вектор v, для которого $A(v)$ или $G(v)$ не является многочленом, то существует линейное уравнение, которое должно выполняться для всех искомых векторов, но не выполняется для нашего вектора. Заменим L на множество всех векторов из L, для которых это соотношение выполняется. Получим некоторое подпространство меньшей размерности. Поскольку исходная размерность L конечна, процесс может продолжаться лишь конечное число шагов, и в итоге мы получим пространство, которое состоит из тех и только тех векторов v, для которых и $G(v)$, и $A(v)$ являются многочленами.

Уточним алгоритм. Пересечение $\mathbf{Z}_+^{n+1}$ с линейным подпространством — некоторое аддитивно замкнутое множество M, т. е. из $v, w\in M$ следует $v+w\in M$. Множество целочисленных векторов с таким свойством мы будем называть полурешеткой, а ее базисом — множество $V=\{v_1, \ldots, v_r\}\subset M$, такое, что $\left(\exists\,\lambda_1, \ldots, \lambda_r\in\mathbf{Z}_+ : v=\sum\lambda_i v_i\right)\forall v\in M$. Если окажется, что для всех $v\in V$ многочлены $G(v)$ и $A(v)$ являются многочленами от двух переменных, то это верно и для всех $v\in M$, и такая полурешетка M дает решение задачи. Полурешетка, соответствующая всему пространству, имеет базис $V=\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$. Для завершения алгоритма нужно уметь решать следующие задачи: во-первых, проверить, лежит ли вектор v в искомой полурешетке, т. е. верно ли, что $G(v)$ и $A(v)$ — многочлены; во-вторых, если это не так, найти соотношение, которое входит в систему уравнений, но не выполняется для этого v, и в-третьих, найти базис полурешетки, состоящей из тех векторов из M, для которых выполняется найденное соотношение.

Рассмотрим первые две задачи. Пусть $v=(k_0, k_1, \ldots, k_n)$ — целочисленный вектор, которому соответствует решение $G=\prod G_i^{k_i}$, $A=\sum k_iA_i$.

Мы можем вычислить ряды G_i и A_i с любой точностью и, таким образом, вычислить ряды G и A. Пусть g — сумма мономов ряда G, содержащих только неотрицательные степени x, а a — аналогичная сумма для A. Если для многочленов g, a выполнено соотношение $Dg=ag$, то можно показать, что $G=g$, $A=a$. В противном случае либо G, либо A не являются многочленами и, вычислив их с достаточной точностью, можно найти коэффициент a_{jk} или g_{jk} при $k<0$, не равный нулю. В первом случае, вычислив коэффициенты a_{ijk} для всех i, мы получим нужное соотношение. Во втором случае, как указано выше, одна из сумм $\sum_{i=0}^{n} k_i f_i$ для некоторого $j\leqslant N$ не является многочленом, и не выполняется линейное соотношение, соответствующее коэффициенту g_{jk}.

Таким образом, за конечное число шагов можно либо доказать, что построенная на очередном шаге полурешетка M является искомой, либо найти некоторое линейное соотношение $\sum_{i=0}^{N}\lambda_i k_i=0$, которое должно выполняться для всех векторов искомой полурешетки, но не выполняется для какого-нибудь из векторов M. В последнем случае требуется найти базис полурешетки M_1, состоящей из тех векторов из M, для которых выполняется это соотношение.

Сначала найдем рациональный базис множества $\{\lambda_i\}$, т. е. такое множество независимых над $\mathbf{Q}$ чисел $\{t_1, ..., t_r\}$, что $\lambda_i=\sum\lambda_{ij}t_j$, где $\lambda_{ij}\in\mathbf{Z}$ (для алгебраических чисел эта задача алгоритмически разрешима). Тогда для всех j должны выполняться условия $\sum\lambda_{ij}k_i=0$ и существуют хотя бы одно значение j и хотя бы один вектор $v\in V$, для которых соответствующее условие не выполняется.

Пусть $\xi_i=\lambda_{ij}$ для этого j, обозначим через S полурешетку $\left\{v=(k_0, \dots, k_n)\in M \,\middle|\, \sum\xi_i k_i=0\right\}$, а через V_1—ее базис (искомый). Для всех $v_i\in V$ вычислим $\mu_i=\sum_{j=0}^{N}\xi_i k_{ij}$. Очевидно, что $\sum l_i v_i\in S$ тогда и только тогда, когда $\sum l_i\mu_i=0$. Следовательно, достаточно найти базис $W=\{w_i\}$ полурешетки S_1, состоящей из всех векторов $w_i\in\mathbf{Z}_+^r$, для которых $\sum\mu_j w_{ij}=0$, $w_{ij}\in\mathbf{Z}_+$ (r—мощность базиса V). Если $\mu_j=0$ для некоторого j, то соответствующий вектор $e_j\in W$. Рассмотрим остальные координаты.

Если все μ_i имеют один знак, то в W больше нет векторов. Поэтому можно считать, что $\mu_1, \dots, \mu_k>0$ и $\mu_{k+1}, \dots, \mu_N<0$ (N—число ненулевых значений μ_j). Тогда векторы $r_{ij}=\dfrac{\mu_i e_j-\mu_j e_i}{\text{НОД}\,(\mu_i, -\mu_j)}$ принадлежат S_1 для всех $i\leqslant k$, $j>k$. Пусть $R_1=\max(\mu_1, \dots, \mu_k)$, $R_2=\max(-\mu_{k+1}, \dots, -\mu_N)$. Тогда первая ненулевая координата любого вектора r_{ij} не превосходит R_2, а вторая—R_1. Каждый вектор $w\in S_1$ имеет хотя бы одну ненулевую координату $w_i\neq 0$, $i\leqslant k$ и хотя бы одну координату $w_j\neq 0$, $j>k$. Полурешетка S_1 порождается всеми векторами r_{ij} и теми векторами из $\mathbf{Z}_+^N$, для которых $\sum_{i=1}^{k} w_i\mu_i<\max((N-k)R_1, kR_2)$. В самом деле пусть некоторый вектор w лежит в S_1. Возможны два варианта: либо существуют $i\leqslant k$, $j>k$, для которых $w_i\geqslant R_2$ и $w_j\geqslant R_1$, либо это не так. В первом случае $w-r_{ij}\in S_1$, а во втором — либо $\sum_{i=1}^{k} w_i\mu_i < kR_2$, либо $\sum_{i=k+1}^{N} w_i\mu_i < (N-k)R_1$ (в зависимости от того, какое из условий не выполняется), т. е. вектор попадает в описанное выше множество. Поскольку это множество конечно, можно найти базис V_1 за конечное число шагов.

Повторяя этот процесс, мы в итоге получим базис V искомой полурешетки. Поскольку $G(v+w)=G(v)G(w)$, все неприводимые собственные многочлены оператора D будут содержаться среди многочленов $G(v)$, $v \in V$. Таким образом, задача оказывается решенной.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность Е. В. Панкратьеву за поддержку в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Singer M. Liouvillian first integrals of differential equations//Proc. ISSAC. 1988. 57—64.
2. Астрелин А. В. Оценка степени неприводимого собственного многочлена некоторого дифференциального оператора//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1990. № 5. 72—73.

Поступила в редакцию
23.04.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 512.81

В. М. Журавлев

КРАТНОСТИ НЕПРИВОДИМЫХ КОМПОНЕНТ СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ КАК МОДУЛЯ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

Известно (см. [1, п. 3.3, с. 9—10]), что алгебра Ли $L=L(X)$ со свободным порождающим множеством $X=\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ над полем F является левым $G=GL(V)$-модулем, где V — векторное пространство над F с базисом X. Подпространства $L_n(X)$ однородных элементов алгебры $L(X)$ степени n инвариантны относительно этого действия. Если $\operatorname{char} F=0$ и F содержит первообразный корень степени n из единицы, то неприводимые G-модули в пространстве $L_n(X)$ имеют вид

$$V_\lambda = T_n(V) \bigotimes_{FS_n} T_\lambda,$$

где T_λ — это S_n-модуль, отвечающий диаграмме Юнга $[\lambda]$, а $T_n(V) = \underbrace{V\otimes \ldots \otimes V}_{n}$. При этом V_λ — нулевой, если количество строк в диаграмме больше, чем $m=\dim V=|X|$.

Цель данной работы — вычислить кратности $m(V_\lambda, L_n(V))$ неприводимых G-подмодулей модуля $L_n(X)$, отвечающих всевозможным диаграммам $[\lambda]$. В книге [1, п. 3.4.7] приведена формула

$$m(V_\lambda, L_n(V)) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu(d)\chi^\lambda(\tau^{n/d}),$$

где $\tau=(1, 2, ..., n) \in S_n$, χ^λ — характер неприводимого S_n-модуля, отвечающего разбиению λ, а μ — функция Мебиуса.

Эта формула позволила А. А. Клячко дать ответ на вопрос о том, какие модули V_λ входят в разложение