A. B. Venkov, Approximation of Maass forms by analytic modular forms,
Algebra i Analiz, 1994, Volume 6, Issue 6, 51–64

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 6

Ральфу Филлипсу
по случаю его восьмидесятилетия

АППРОКСИМАЦИЯ ФОРМ МААСА АНАЛИТИЧЕСКИМИ МОДУЛЯРНЫМИ ФОРМАМИ

А. Б. Венков

В работе доказана теорема об аппроксимации четных модулярных форм Мааса в терминах аналитических модулярных форм. Результат достигается применением спектральной теории автоморфного оператора Шрёдингера, формул Рамануджана о дифференцировании рядов Эйзенштейна и с помощью метода Филлипса–Сарнака возмущения касп-форм.

§1. Введение

Пусть H — верхняя полуплоскость, Γ — модулярная группа $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ и $\mathcal{H} = L_2(\Gamma \setminus H)$ — стандартное гильбертово пространство автоморфных функций. Целью этой работы является доказательство следующего утверждения. Любая четная функция $f \in \mathcal{H}$ может быть представлена специальным рядом

$$f(z, \bar{z}) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(k, m) W_n(z, \bar{z}; k) \overline{W_n(z, \bar{z}; m)} + a_0,$$

где a_n — некоторые константы и

$$W_n(z, \bar{z}; k) = y^n R^{k_1}(z) Q^{k_2}(z) S^{k_3}(z, \bar{z}),$$
$$R(z) = E_6(z), \qquad Q(z) = E_4(z), \qquad S(z, \bar{z}) = E_2(z) - 3/\pi y,$$

$E_l(z)$ — аналитический ряд Эйзенштейна, $l = 2, 4, 6$; $k = (k_1, k_2, k_3)$, $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbf{Z}^3_+$, $n = 6k_1 + 4k_2 + 2k_3 = 6m_1 + 4m_2 + 2m_3$, $y = \operatorname{Im} z$, черта означает комплексное сопряжение.

Ключевые слова: спектральная теория автоморфных функций.

Для точного утверждения см. основную теорему (она является предельным усилением основного результата работы [1]). Важными составляющими в доказательстве этой теоремы являются: спектральная теория оператора Шрёдингера с автоморфным потенциалом, формулы Рамануджана для дифференцирования аналитических рядов Эйзенштейна и подход Филлипса–Сарнака к исследованию разрушения параболических форм Мааса под действием возмущений.

§2. Основная часть

Пусть H является гиперболической плоскостью с метрикой Пуанкаре ds^2 и соответствующим оператором Лапласа L. Мы рассматриваем H, как верхнюю полуплоскость $H = \{\, z \in \mathbb{C}, z = x + iy \mid y > 0 \,\}$ и $L = y^2\bigl(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\bigr)$. Обозначим через $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ модулярную группу.

Дифференциальный оператор L порождает естественным образом неотрицательный самосопряженный оператор $A(\Gamma)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(F; d\mu)$, называемый автоморфным лапласианом. Мы воспользовались обозначениями: F — фундаментальная область группы Γ на H, $d\mu$ — риманова мера, порожденная метрикой ds^2, $d\mu = \frac{1}{y^2}\,(dx \wedge dy)$. Норма $\|f\|$ функции f в $\mathcal{H}$ определяется, как обычно, интегралом

$$\|f\|^2 = \int\limits_F |f(z,\bar z)|^2\, d\mu(z,\bar z).$$

Функция f зависит от двух переменных x, y или от z, $\bar z$, где $z = x + iy$, $\bar z = x - iy$. Для аналитических функций переменного z мы будем писать $f(z)$.

Следующее спектральное разложение гильбертова пространства $\mathcal{H}$ хорошо известно

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathbb{C} \oplus \Theta, \tag{1}$$

$\mathcal{H}_0$ — это пространство параболических форм (функций) и одновременно подпространство, натянутое на все собственные функции дискретного спектра оператора $A(\Gamma)$, собственные значения которых лежат на непрерывном спектре. Θ — пространство непрерывного спектра оператора $A(\Gamma)$.

Для любой $f \in \mathcal{H}$ мы имеем разложение по собственным функциям оператора $A(\Gamma)$, которое соответствует разбиению (1)

$$\begin{aligned} f(z,\bar z) = \sum_{n=1}^{\infty}(f, v_n)v_n(z,\bar z) + \frac{1}{|F|}\int\limits_F f(z,\bar z)\,d\mu(z,\bar z) \\ + \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} s = 1/2} (f, E_s)E_s(z,\bar z)\,ds. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ означает стандартное скалярное произведение в $\mathcal{H}$, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом собственных функций в $\mathcal{H}_0$

$$(v_j, v_k) = \delta_{jk}, \qquad A(\Gamma)v_k = \lambda_k v_k,$$

$1/4 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, $|F|$ — $d\mu$-объем F, $|F| = \pi/3$, $E_s(z,\bar{z}) = E(z,\bar{z};s)$ — ряд Эйзенштейна–Мааса (или неаналитический ряд Эйзенштейна). Для $\mathrm{Re}\, s > 1$ он представляется абсолютно-сходящимся рядом Пуанкаре

$$E(z,\bar{z};s) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \mathrm{Im}^s(\gamma z),$$

где Im означает мнимую часть комплексного числа. Γ_∞ — подгруппа Γ, порожденная преобразованием $z \to z+1$, $z \in H$.

Главное свойство непрерывной функции $f \in \mathcal{H}_0$ является равенство нулю ее нулевого коэффициента Фурье в разложении, связанном с действием подгруппы Γ_∞

$$\int_0^1 f(z,\bar{z})\, dx = 0$$

для всех $y > 0$, $z = x + iy$.

Следующее разложение также важно для нас

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)}.$$

По определению

$$\mathcal{H}^{(1)} = \{\, f \in \mathcal{H} \mid -f(z,\bar{z}) = f(-\bar{z},-z)\,\},$$
$$\mathcal{H}^{(2)} = \{\, f \in \mathcal{H} \mid f(z,\bar{z}) = f(-\bar{z},-z)\,\}$$

подпространства нечетных и четных функций соответственно. Заметим, что инволюция $z \to -\bar{z}$, $H \to H$ коммутирует с оператором Лапласа L и также переводит автоморфную (модулярную) функцию в автоморфную. Нетрудно также видеть, что

$$\Theta \subset \mathcal{H}^{(2)}.$$

По поводу всех этих утверждений см. [2, 3, 4, 5].

Пусть теперь $\mathcal{H}_0^{(j)} = \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}^{(j)}$ являются подпространствами параболических форм $j = 1, 2$. Напомним несколько основных свойств аналитических модулярных форм. Функция $f\colon H \to \mathbb{C}$ называется аналитической модулярной формой веса k для Γ, если выполняются условия: 1) f — аналитична в H; 2) $f(\gamma z) = (cr + d)^k f(z)$ для любого $\gamma \in \Gamma$ и любого $z \in H$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z});$$

3) f — аналитична на бесконечности, т.е. имеет разложение Фурье (Тейлора)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp 2\pi i n z. \tag{3}$$

Пусть R, Q, P — аналитические ряды Эйзенштейна веса 6, 4, 2 соответственно. Имеем разложения Фурье

$$R(z) = E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) \exp 2\pi i n z,$$

$$Q(z) = E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) \exp 2\pi i n z,$$

$$P(z) = E_2(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(z) \exp 2\pi i n z,$$

где $\sigma_k(n)$, как обычно, означает сумму k-х степеней делителей числа n. Функции R, Q порождают градуированную алгебру B всех аналитических модулярных форм (четного веса $\geqslant 4$). Любая модулярная форма веса k представляется как комплексная линейная комбинация одночленов $R^{k_1} Q^{k_2}$, $6k_1 + 4k_2 = k$ (см., например, [6]).

Вернемся к пространствам $\mathcal{H}_0^{(j)}$. Рассмотрим один хорошо известный способ конструирования элементов пространства $\mathcal{H}_0^{(1)}$, используя аналитические модулярные формы (см. [7, §3.7] для аналогичной идеи). Пусть g_1, g_2 — две аналитические модулярные формы веса „ k“ с вещественными коэффициентами Фурье (3), тогда нетрудно видеть, что

$$f(z, \bar{z}) = y^k (g_1(z)\overline{g_2(z)} - \overline{g_1(z)} g_2(z)) \in \mathcal{H}_0^{(1)}, \quad y = \operatorname{Im} z, \tag{4}$$

черта означает комплексное сопряжение.

Интересный вопрос состоит в следующем. Какие элементы из $\mathcal{H}_0^{(1)}$ аппроксимируются линейными комбинациями функций (4), когда пары g_j пробегают всю алгебру B? Хотя по многим причинам пространство $\mathcal{H}_0^{(1)}$ выглядит более простым, чем $\mathcal{H}^{(2)}$, мы не можем ответить на этот вопрос. Но мы даем ответ на аналогичный вопрос для пространства $\mathcal{H}^{(2)}$ в этой работе.

Положим $S(z, \bar{z}) = P(z) - 3/\pi y$, $\quad y = \operatorname{Im} z$, и пусть M_∞ означает комплексное линейное пространство, порожденное системой всех функций e_k, k пробегает все четные целые числа, и $k = 0$. По определению

$$e_k = y^k R^{k_1} Q^{k_2} S^{k_3} \overline{R^{m_1} Q^{m_2} S^{m_3}}, \qquad e_0 = 1,$$
$$k = 6k_1 + 4k_2 + 2k_3 = 6m_1 + 4m_2 + 2m_3; \quad k_j, m_j \in \mathbb{Z} \geqslant 0,$$

черта означает комплексное сопряжение.

Определим теперь линейное пространство $M_\infty^{\mathcal{H}}$ как пересечение

$$M_\infty^{\mathcal{H}} = M_\infty \cap D(A(\Gamma)),$$

где $D(A(\Gamma))$ — область определения оператора $A(\Gamma)$ в $\mathcal{H}$. Наконец, обозначим через $\widehat{M}_\infty^{\mathcal{H}}$ замыкание линейного подпространства $M_\infty^{\mathcal{H}}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Сформулируем теперь главную теорему этой работы.

Основная теорема. *Справедливо равенство*

$$\widehat{M_\infty^{\mathcal{H}}} = \mathcal{H}^{(2)}.$$

Мы разобьем доказательство этой теоремы на несколько частей. Прежде всего докажем включение.

Лемма 1. $LM_\infty \subset M_\infty$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что каждая функция e_k является автоморфной, т.е. для всех $\gamma \in \Gamma$ и $z \in H$ верно равенство $e_k(\gamma z, \gamma \overline{z}) = e_k(z, \overline{z})$. Известно, что функция $P(z)$ не является модулярной формой. Выполняется равенство

$$P(-1/z) = z^2 P(z) + \frac{6z}{\pi i}.$$

Однако нетрудно доказать, что $S(z, \overline{z})$ является модулярной формой веса два, хотя и неаналитической. Тем самым выражение $R^{k_1} Q^{k_2} S^{k_3}$ является формой веса k, если выполняется условие $6k_1 + 4k_2 + 2k_3 = k$, и, стало быть, e_k является автоморфной функцией, что и требовалось доказать.

Вычислим теперь действие оператора Лапласа L на функции e_k. Хорошо известно (см. [6]), что алгебра B — незамкнута относительно дифференцирования функций, но алгебра, порожденная R, Q, P, обладает этим свойством. В основе доказательства этого утверждения лежат замечательные формулы Рамануджана

$$P_z = \frac{\pi i}{6}(P^2 - Q), \qquad Q_z = \frac{2\pi i}{3}(PQ - R), \qquad R_z = \pi i (PR - Q^2),$$

где $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$. Модифицированные формулы Рамануджана для R, Q, S имеют вид

$$\begin{cases} S_z = \dfrac{\pi i}{6}\Big(S^2 + \dfrac{6}{\pi y} S - Q\Big), & S_{\overline{z}} = \dfrac{3i}{2\pi y^2}, \\ Q_z = \dfrac{2\pi i}{3}\Big(SQ + \dfrac{3}{\pi y} Q - R\Big), & R_z = \pi i \Big(SR + \dfrac{3}{\pi y} R - Q^2\Big). \end{cases} \tag{5}$$

Используя (5), получаем равенство

$$\begin{aligned}
(z - \overline{z})^2 \frac{\partial^2 e_k}{\partial z \partial \overline{z}} = e_k \Big\{ & k + (k - k_3)k_3 + (k - m_3)m_3 - k_3 - m_3 \\
& + \frac{Q}{S^2} k_3 + m_3 \frac{\overline{Q}}{\overline{S}^2} - 6k_1 k_3 \frac{Q^2}{RS} - 4k_2 k_3 \frac{R}{QS} - k_3^2 \frac{Q}{S^2} \\
& - 6m_1 m_3 \frac{\overline{Q}^2}{\overline{R}\overline{S}} - 4m_2 m_3 \frac{\overline{R}}{\overline{Q}\overline{S}} - m_3^2 \frac{\overline{Q}}{\overline{S}^2} + \frac{36 k_3 m_3}{\pi^2 (z - \overline{z})^2 |S|^2} \\
& - \pi^2 (z - \overline{z})^2 \Big(\frac{k - k_3}{6} S - k_1 \frac{Q^2}{R} - \frac{2k_2}{3} \frac{R}{Q} - \frac{k_3}{6} \frac{Q}{S} \Big) \\
& \times \Big(m_1 \frac{\overline{Q}^2}{\overline{R}} + \frac{2m_2}{3} \frac{\overline{R}}{\overline{Q}} + \frac{m_3}{6} \frac{\overline{Q}}{\overline{S}} - \frac{k - m_3}{6} \overline{S} \Big) \Big\}.
\end{aligned}$$

Из этого равенства можно увидеть, что Le_k является линейной комбинацией функций e_{k-2}, e_k, e_{k+2}. На первый взгляд кажется, что может возникнуть проблема с малыми значениями $k = 2, 4$. Однако вычисления показывают, что это не так. Например, если $k_3 = 1$ или $m_3 = 1$, тогда $k_3 Q/S^2 = k_3^2 Q/S^2$ или $m_3 \overline{Q}/\overline{S}^2 = m_3^2 \overline{Q}/\overline{S}^2$ и соответствующие слагаемые сокращаются. Мы не будем здесь останавливаться на деталях. Лемма доказана.

На основании леммы 1, следующее утверждение доказывается стандартными методами теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Ограничимся лишь формулировкой.

Лемма 2. 1) *Пусть $h(A)$ является непрерывной ограниченной функцией автоморфного лапласиана $A(\Gamma)$, тогда*

$$h(A(\Gamma))\widehat{M}_\infty^{\mathcal{H}} \subset \widehat{M}_\infty^{\mathcal{H}}.$$

2) *Пусть P_θ, P_μ — два ортогональных проектора в $\mathcal{H}$ на подпространства Θ, $\widehat{M}_\infty^{\mathcal{H}}$ соответственно. Тогда верно равенство*

$$P_\Theta P_\mu = P_\mu P_\Theta.$$

Лемма 3. *Выполняется включение*

$$\Theta \subset \widehat{M}_\infty^{\mathcal{H}}.$$

Доказательство. Определим функцию

$$f_\Delta(z, \overline{z}) = y^{12} |\Delta(z)|^2,$$

$$\Delta(z) = c_1(Q^3(z) - R^2(z)), \qquad \Delta(z) = c_2 q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}, \qquad q = \exp 2\pi i z.$$

Здесь c_1, c_2 — некоторые константы, $\Delta(z)$ — классическая параболическая аналитическая модулярная форма веса 12. Ясно, что $f_\Delta \in \widehat{M}_\infty^{\mathcal{H}}$. Пусть, как и в лемме 2, P_Θ — ортогональный проектор в $\mathcal{H}$ на Θ. Рассмотрим стандартное гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R}_+)$ функций $\eta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \xi(t)\overline{\eta(t)}\, dt.$$

По теореме разложения по собственным функциям автоморфного лапласиана (см. [7]) отображение $u\colon \Theta \to L_2(\mathbb{R}_+)$

$$(uf)(t) = \int_F f(z, \overline{z}) E(z, \overline{z}; 1/2 - it)\, d\mu(z, \overline{z})$$

является изометрическим. Оператор $Uh(A(\Gamma))U^*$ является оператором умножения на функцию h. Напомним, по условию h непрерывна и ограничена.

Рассмотрим теперь функцию $(UP_\Theta f_\Delta)(t)$. Она непрерывна (аналитична) для $t \in [0, \infty)$, поскольку является сверткой Ранкина–Сельберга, не имеет полюсов и — лишь дискретное множество нулей. Следовательно, множество $Uh(A(\Gamma))P_\Theta f_\Delta$ (для фиксированной f_Δ, но меняющейся h) для всех ограниченных функций h заполняет плотное подмножество в $L_2(\mathbb{R}_+)$. Следовательно, пространство, содержащее все $h(A)P_\Theta f_\Delta$, после замыкания в $\mathcal{H}$ совпадает с Θ. Из леммы 2 следует теперь утверждение леммы 3. Доказательство закончено.

Лемма 4. *Справедливо включение*

$$\mathbb{C} \subset \widehat{M_\infty^{\mathcal{H}}}.$$

Доказательство. Лемма следует из того, что $e_0 = 1$.

Лемма 5. *Существует множество потенциалов $N \subset \Theta \oplus \mathbb{C}$, обладающих свойствами:* 1) *Любой потенциал $q \in N$ является непрерывной неотрицательной автоморфной функцией на H, т.е. $q(z, \bar{z}) \geqslant 0$, $q(\gamma z, \gamma\bar{z}) = q(z, \bar{z})$ для всех $z \in H$, $\gamma \in \Gamma$ и $q \in \mathbb{C}(H)$.* 2) *Комплексное линейное пространство, натянутое на множество N, является плотным множеством в $\Theta \oplus \mathbb{C}$.*

Доказательство. Хорошо известно, что пространство $\Theta \oplus \mathbb{C}$ заполняется неполными тета-рядами (см. [4, 5], например)

$$\Theta_\varphi(z, \bar{z}) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \varphi(\operatorname{Im} \gamma z),$$

где φ пробегает множество всех непрерывных функций $\varphi \colon (0, \infty) \to \mathbb{C}$ с компактными носителями. Для доказательства леммы 5 достаточно в качестве N выбрать множество всех Θ_φ с неотрицательными φ. •

Замечание. В дальнейшем в качестве множества N мы всегда будем иметь в виду множество неполных тета-рядов, определенных в доказательстве леммы 5.

Следующая лемма принадлежит спектральной теории оператора Шрёдингера с автоморфным потенциалом (см. [9, §2] и [10] для более общей теории). Мы приведем сначала чуть упрощенный вариант, а затем более продвинутый, необходимый на заключительном этапе доказательства в лемме 8.

Введем несколько обозначений. Пусть $r_q(z, \bar{z}; z', \bar{z}'q; s)$ — ядро резольвенты оператора A_q в $\mathcal{H}$ — $(A_q - \lambda)^{-1}$, $\lambda = s(1 - s)$, $\operatorname{Re} s > 1$. Далее, пусть $\psi_q(z, \bar{z}; s)$ — собственная функция непрерывного спектра оператора A_q с „собственным" значением $\lambda = s(1 - s)$ и $S_q(s)$ — соответствующая одномерная матрица рассеяния (см. [9, §2]).

Лемма 6. *Пусть $q \in N$ — потенциал из замечания к лемме 5, тогда верны утверждения:*

1) *Левая часть равенства* (1.6) *определяет самосопряженный неотрицательный оператор A_q в $\mathcal{H}$ (расширение Фридрихса).*

2) *A_q имеет однократный абсолютно-непрерывный спектр, лежащий на полуоси $[1/4, \infty)$, и дискретный спектр собственных значений конечной кратности, расположенный на полуоси $[0, \infty)$, и не имеет другого спектра.*

3) *Функции $r(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot;s)$, $\psi_q(\cdot,\cdot;s)$, $S_q(s)$ являются мероморфными для $s \in \mathbb{C}$ и удовлетворяют функциональным уравнениям:*

а) $r_q(z,\overline{z};z',\overline{z}';s) - r_q(z,\overline{z};z',\overline{z}';1-s) = \frac{1}{2s-1}\psi_q(z,\overline{z};s)\psi_q(z',\overline{z}';1-s)$;

б) $\psi_q(z,\overline{z};s) = \psi_q(z,\overline{z};1-s)S_q(s)$;

в) $S_q(s)S_q(1-s) = 1$.

Доказательство этой леммы содержится в указанных выше работах, мы не приводим его здесь. Метод доказательства — в существенном тот же самый, что и метод Л. Д. Фаддеева, применяемый им в теореме разложения по автоморфным собственным функциям оператора Лапласа на гиперболической плоскости (см. [8]). Главное, что требуется от потенциала — это достаточное его убывание в окрестности параболической вершины фундаментальной области F.

Следующий шаг в доказательстве основной теоремы состоит в построении более специального потенциала, или,точнее, семейства потенциалов q_∞, обладающих свойством: соответствующий оператор A_{q_∞} имеет только конечный дискретный спектр, расположенный вне непрерывного. При этом мы предполагаем, что $q \in \widehat{M}_\infty^{\mathcal{H}}$ и достаточно быстро убывает в параболической вершине области F для того, чтобы выполнялись утверждения леммы 6.

Из работы Колин де Вердье (см. [11], а также [10]) мы знаем, что общий потенциал q обладает свойством: A_q не имеет дискретного спектра на непрерывном. Вопрос состоит в том, насколько общим является потенциал $q \in \widehat{M}_\infty^{\mathcal{H}}$ в этом смысле. Поэтому мы должны доказать существование таких потенциалов q_∞. Для этого мы пользуемся идеей работы [12] об исчезновении касп-форм при деформации дискретной группы. Мы модифицируем метод Филлипса–Сарнака для автоморфного оператора Шрёдингера.

Фиксируем некоторый потенциал $q \in N$ (см. замечание к лемме 5) и рассмотрим оператор Шрёдингера $A_{\varepsilon q}$, определенный в пространстве $\mathcal{H}$ дифференциальным оператором $-Lf + \varepsilon q f$, где ε — маленький положительный параметр.

Пусть теперь $\lambda_n > 0$ — произвольное фиксированное собственное значение оператора $A(\Gamma) = A$ для соответствующей четной собственной функции v_n, $Av_n = \lambda_n v_n$. Мы знаем, что λ_n обязательно лежит на непрерывном спектре оператора A, другими словами, $\lambda_n > 1/4$, $\lambda_n = s_n(1-s_n)$, $\operatorname{Re} s_n = 1/2$. Пользуясь теми же аргументами, что и в [12, §2], мы получаем, что пара s_n, $v_n(z,\overline{z})$ включается в аналитическое семейство решений дифференциального уравнения

$$-Lv_n(z,\overline{z};\varepsilon) + \varepsilon q(z,\overline{z})v_n(z,\overline{z};\varepsilon) = \lambda_n(\varepsilon)v_n(z,\overline{z};\varepsilon) \tag{7}$$

в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Имеем $v_n(z,\overline{z};0) = v_n(z,\overline{z})$, $\lambda_n(0) = \lambda_n$, $\lambda_n(\varepsilon) = s_n(\varepsilon)(1-s_n(\varepsilon))$. Кроме этого, выполняется асимптотическое равенство

$$v_n(z,\overline{z};\varepsilon) = c_1(\varepsilon)y^{s_n(\varepsilon)} + c_2(\varepsilon)y^{1-s_n(\varepsilon)} + \underset{y\to\infty}{O}(\exp(-ay))$$

для некоторого $a > 0$. Аналитические функции $c_j(\varepsilon)$, $j = 1, 2$, также удовлетворяют условию $c_1(0) = c_2(0) = 0$. Для аналитических функций $s_n(\varepsilon)$ выполняется альтернатива: либо верно равенство $\operatorname{Re} s_n(\varepsilon) = 1/2$ для всех $\varepsilon \geqslant 0$, достаточно маленьких, либо верно неравенство $\operatorname{Re} s_n < 1/2$ для всех $\varepsilon > 0$, достаточно маленьких. В случае 1) верно равенство $c_1(\varepsilon) = c_2(\varepsilon) = 0$ для указанных ε, и $v_n(z,\overline{z};\varepsilon)$, $\lambda_n(\varepsilon)$ являются соответственно собственной функцией и собственным значением дискретного спектра оператора $A_{\varepsilon q}$. В случае 2) собственное значение λ_n дискретного спектра оператора A исчезает под действием сколь угодно малой деформации εq, $\varepsilon > 0$.

Найдем теперь достаточное условие, чтобы выполнялся случай 2). Это условие подобно тому, которое возникает в теории Филлипса–Сарнака при деформации в пространстве Тайхмюллера (см. [12]). Разлагая в степенной ряд, получаем

$$\begin{aligned} v_n(z,\overline{z};\varepsilon) &= v_n(z,\overline{z}) + \varepsilon w_n(z,\overline{z}) + \underset{\varepsilon\to 0}{O}(\varepsilon^2), \\ \lambda_n(\varepsilon) &= \lambda_n + \varepsilon \nu_n + \underset{\varepsilon\to 0}{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Из уравнения (7) теперь следует

$$-Lw_n(z,\overline{z}) + q(z,\overline{z})v_n(z,\overline{z}) = \nu_n v_n(z,\overline{z}) + \lambda_n w_n(z,\overline{z}). \tag{8}$$

Умножим равенство (8) на ряд Эйзенштейна и проинтегрируем полученное равенство по фундаментальной области F. В результате получим

$$\begin{aligned} &\int\limits_F q(z,\overline{z})v_n(z,\overline{z})E(z,\overline{z};s_n)\,d\mu(z,\overline{z}) \\ &= \lim_{Y\to\infty} \int\limits_{F_Y} [\lambda_n w_n(z,\overline{z})E(z,\overline{z};s_n) + (Lw_n(z,\overline{z}))E(z,\overline{z};s_n)]\,d\mu(z,\overline{z}). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь в качестве F выбрана фундаментальная область

$$F \overset{\circ}{=} \{\, z = x + iy \in H \mid |x| < 1/2,\ |z| > 1 \,\},$$

$\overset{\circ}{=}$ означает равенство с точностью до точек границы F. Теперь по определению

$$F_Y = \{\, z \in F \mid y \leqslant Y \,\},$$

где Y — фиксировано, $Y > 0$.

В (9) мы воспользовались также равенством $(v_n, E_{s_n}) = 0$. Напомним теперь один вариант интегральной формулы Грина, важный при выводе формулы следа Сельберга. Пусть f, g — две произвольные гладкие автоморфные функции, тогда имеем (см. [2, 5])

$$\int_{F_Y} (f\Delta g - g\Delta f)\, dx \wedge dy = \int_0^1 \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - g\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\Big|_{y=Y} \tag{10}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — плоский оператор Лапласа.

Интеграл в правой части формулы (9) теперь равен

$$\int_{F_Y} (E_{s_n}\Delta w_n - w_n\Delta E_{s_n})\, dx \wedge dy.$$

Мы имеем, далее,

$$w_n(z,\overline{z}) = c_1'(0)y^{s_n} + c_2'(0)y^{1-s_n} + \underset{y\to\infty}{O}(\exp(-ay)),$$
$$E(z,\overline{z}; s_n) = y^{s_n} + \varphi(s_n)y^{1-s_n} + \underset{y\to\infty}{O}(\exp(-ay))$$

для некоторого $a > 0$. Из равенства (10) следует

$$\int_{F_Y} (E_{s_n}\Delta w_n - w_n\Delta E_{s_n})\, dx \wedge dy = (1-2s_n)(c_2'(0) - \varphi(s_n)c_1'(0)) + \underset{Y\to\infty}{o(1)}\,.$$

Пользуясь (9), получаем, наконец,

$$\int_F q(z,\overline{z})v_n(z,\overline{z})E(z,\overline{z}; s_n)\, d\mu(z,\overline{z}) = (1-2s_n)(c_2'(0) - \varphi(s_n)c_1'(0)).$$

Таким образом, если верно неравенство нулю:

$$\int_F q(z,\overline{z})v_n(z,\overline{z})E(z,\overline{z}; s_n)\, d\mu(z,\overline{z}) \neq 0, \tag{11}$$

тогда, по крайней мере, одно из чисел $c_1'(0)$, $c_2'(0)$ также не равно нулю и, следовательно, мы имеем случай 2). Т.е. собственное значение λ_n исчезает под действием деформации εq.

Лемма 7. *Для любого собственного значения* $\lambda_n \neq 0$, *соответствующего четной собственной функции* $v_n(z,\overline{z})$ *оператора* A, *существует потенциал* $q = q_n \in N$ (*см. замечание к лемме* 5) *такой, что выполняется условие* (11).

Доказательство. Предположим противное. Это означает, что найдется значение $s_n(\lambda_n = s_n(1-s_n))$, для которого верно равенство

$$\int\limits_F q(z,\overline{z})v_n(z,\overline{z})E(z,\overline{z};s_n)\,d\mu(z,\overline{z}) = 0 \tag{12}$$

для всех $q \in N$ из замечания к лемме 5. Следовательно, $v_n E_{s_n}$ ортогонально всему пространству Θ в $\mathcal{H}$, откуда следует, в свою очередь, равенство нулю нулевого коэффициента Фурье

$$\int\limits_0^1 v_n(z,\overline{z})E(z,\overline{z};s_n)\,dx = 0 \tag{13}$$

для всех $y > 0$. Умножим (13) на y^s, $\operatorname{Re} s > 1$, в результате получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_0^\infty y^s \frac{dy}{y^2} \int\limits_0^1 v_n(z,\overline{z})E(z,\overline{z};s_n)\,dx \\ &= \int\limits_F E(z,\overline{z};s)v_n(z,\overline{z})E(z,\overline{z},s_n)\,d\mu(z,\overline{z}). \end{aligned}$$

Но последний интеграл не равен тождественно по s нулю, так как является сверткой Ранкина–Сельберга (см., например, [13]). Мы получили противоречие, что доказывает лемму 7.

Лемма 8. *Существует потенциал* (*множество потенциалов*) q_∞, *обладающий свойствами*: 1) *Для соответствующего оператора* A_{q_∞} *выполняется утверждения леммы* 6; 2) *дискретный спектр из п.* 2) *леммы* 6 *для оператора* A_{q_∞} *исчерпывается лишь конечным множеством конечно-кратных собственных значений* $\lambda_n \in [0, 1/4)$.

Доказательство. Рассмотрим следующий ряд:

$$q(z,\overline{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n q_n(z,\overline{z}), \tag{14}$$

где q_n пробегает множество всех потенциалов из леммы 7 для всех собственных значений λ_n оператора A, отвечающих собственным функциям, которые лежат в пространстве $\mathcal{H}_0^{(2)}$; α_n — некоторые неотрицательные константы, о которых мы сейчас поговорим более подробно. Отметим, что умножая на соответствующую положительную константу каждый потенциал q_n из леммы 7, их можно выбрать таким образом, что

$$\max_{z\in F} q_n(z,\overline{z})$$

(мы пишем max, а не sup, так как носитель q_n — компактен) при $n\to\infty$ убывает сколь угодно быстро. Отсюда следует, что для сходимости ряда (14) достаточно рассматривать ограниченные последовательности $\{\alpha_n\}$.

Докажем теперь, что найдется ограниченная последовательность неотрицательных чисел α_n такая, что для соответствующего потенциала $q(z,\overline{z})$ из (14) неравенство (11) будет выполняться для всех n из условия леммы 7. Предположим противное. Это означает, что найдется λ_n из рассматриваемого множества собственных чисел и собственная функция v_n такие, что (12) выполняется для всех q, построенных по формуле (14), когда $\{\alpha_k\}$ пробегают все ограниченные последовательности неотрицательных чисел. Но это не верно, так как для последовательности

$$\alpha_k=\begin{cases}0, & k=n,\\ 0, & \text{в противном случае},\end{cases}$$

мы имеем $q=q_n$ и неравенство (11) выполняется по определению потенциала q_n. Следовательно, желаемая последовательность $\{\alpha_k\}$ существует.

Зафиксируем эту последовательность и определим соответствующий потенциал q. Заметим, что из условия убывания $\max\limits_F q_n(z,\overline{z})$, о котором мы говорили выше, и ограниченности последовательности $\{\alpha_k\}$ следует, что потенциал $q(z,\overline{z})$ можно выбрать таким образом, чтобы

$$q(z,\overline{z})=O(e^{-\alpha y}),\quad z\in F,\ y=\operatorname{Im} z,$$

$\alpha>0$, некоторая константа. Поэтому потенциал q удовлетворяет условиям теоремы из [9, §2], и для соответствующего оператора A_q верно утверждение леммы 6 настоящей работы. Это же самое можно сказать и про потенциал εq, где $0<\varepsilon$ — числовой параметр.

Пусть теперь выполняется неравенство $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, для некоторого фиксированного ε_0, достаточно маленького. Посмотрим на собственные значения $\lambda_n(\varepsilon)$ оператора $A_{\varepsilon q}$, отвечающие четным собственным функциям, и лежащие на непрерывном спектре. Мы будем смотреть на них, когда ε меняется от 0 до ε_0. Введем замену переменной $s_n(\varepsilon)$, $s_n(\varepsilon)(1-s_n(\varepsilon))=\lambda_n(\varepsilon)$. Пусть для определенности $\operatorname{Im} s_n(\varepsilon)\geqslant 1/2$. Из принципа аналитичности следует, что $s_n(\varepsilon)$ приходит либо из $s_n^{(1)}$, $s_n^{(1)}(1-s_n^{(1)})=\lambda_n$, соответствующему собственному значению оператора A, либо из полюса $s_n^{(2)}$ автоморфной матрицы рассеяния $\varphi(s)$, где

$$E(z,s)=y^s+\varphi(s)y^{1-s}+\underset{y\to\infty}{O(1)}$$

($s_n^{(1)}$, $s_n^{(2)}$ соответствуют $\varepsilon = 0$). В обоих случаях, для каждого фиксированного n существует лишь конечное число значений ε, обозначим их ε_j, которые мы называем „плохими“, (а остальные — „хорошими“), и для которых верно равенство $\operatorname{Re} s_n(\varepsilon_j) = 1/2$. Составим теперь множество Ω

$$\Omega = \bigcup_n \bigcup_j \varepsilon_j(n),$$

объединяя все „плохие“ значения для всех собственных чисел $\lambda_n(\varepsilon)$. Очевидно, Ω — счетное множество. Следовательно, найдется последовательность $\delta_k \in \{(0, \varepsilon_0) - \Omega\}$ (разность) такая, что $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$ и для каждого $\delta_k q$ $A_{\delta_k q}$ не имеет дискретного спектра на непрерывном. Это доказывает утверждение леммы 8.

Доказательство основной теоремы. После доказанных лемм 1–8 доказательство основной теоремы почти очевидно. Как мы знаем, для последовательности „хороших“ δ_k оператор $A_{\delta_k q}$ имеет только конечный спектр собственных значений λ_k, $0 \leqslant \lambda_k < 1/4$ и однократный абсолютно-непрерывный $\lambda \in [1/4, \infty)$ в подпространстве четных функций $\mathcal{H}^{(2)}$. Обозначим через $\Theta(\delta_k q)$ соответствующее подпространство непрерывного спектра. По аналогии с леммами 2–4, пользуясь леммами 5–8 нетрудно показать, что

$$\Theta(\delta_k q) \subset \widehat{M_\infty^{\mathcal{H}}}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$ Следовательно, верно равенство

$$\mathcal{H}^{(2)} = \widehat{M_\infty^{\mathcal{H}}} \oplus D,$$

где подпространство D не более чем конечномерно. Но теперь нетрудно видеть, что

$$D = \bigcap_k D_k,$$

где D_k — подпространство дискретного спектра оператора $A_{\delta_k q}$ в $\mathcal{H}^{(2)}$, $\mathcal{H}^{(2)} = D_k \oplus \Theta(\delta_k q)$, D_k — конечномерно. Кроме этого, в пределе $\delta_k \to 0$ оператор A не имеет дискретного спектра в интервале $\lambda \in (0, 1/4)$. Отсюда следует, что D состоит только из нуля и основная теорема доказана.

Эта работа была мною написана частично в Университете Париж 7, где я находился по соглашению Jumelage с Математическим Институтом им. В. А. Стеклова. Заключительная ее версия была написана в Институте Макса Планка (Бонн). Я признателен проф. Миттеру (P. K. Mitter) (Париж) и проф. Хирцебруху (F. Hirzebruch) (Бонн) за гостеприимство и поддержку. Я признателен также проф. Колин де Вердье за ценные замечания (Colin de Verdière).

Список литературы

[1] Venkov A. B., *Some relations between the analytic modular forms and Maass waveforms for* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, Preprint of SFB-170, Heft 1 (1992), Mathematica Göttingensis.

[2] Selberg A., *Lectures on the trace formula*, University of Goettingen, 1954.

[3] Hejhal D. A., *The Selberg trace formula for* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Part II, Lect. Not. Math. **1001** (1983).

[4] Венков А. Б., *Спектральная теория автоморфных функций*, Тр. МИАН СССР **153** (1981); Eng. transl. in Proc. Steklov Math. Inst. **4** (1982).

[5] Venkov A. B., *Spectral theory of automorphic functions and its applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London, 1990.

[6] Serre J.- P., *Congruences et formes modulaires*, (d'apres H.P.S. Swinnerton–Dyer), Seminaire Bourbaki, Lect. Notes in Math., vol. 317, Springer, 1973, pp. 319–338.

[7] Terras A., *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications.* 1, Springer-Verlag, New York, 1985.

[8] Faddeev L. D., *Expansion in eigenfunctions of the Laplace operator on the fundamental domain of a discrete group on the Lobacevskii plane*, Trans. Moscow Math. Soc. **17** (1967), 357–386.

[9] Venkov A. B., *On the Selberg trace formula for the automorphic Schrödinger operator*, Preprint IHES/90/98 (France); Функцион. анализ и его прил. **25** (1991), no. 2, 26–37.

[10] Mueller W., *The point spectrum and spectral geometry for Riemannian manifolds with cusps*, Math. Nachr. **125** (1986), 243–257.

[11] Colin de Verdière Y., *Pseudo-laplaciens*, Ann. de l'Institut Fourier. I: **32** (1982), no. 3, 275–286; II: **33**, no. 2, (1983), 87–113.

[12] Phillips R. S., Sarnak P., *On cusp forms for co-finite subgroups of* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, Invent. math. **80** (1985), 339–364.

[13] Moreno C. J., *The spectral decomposition of a product of automorphic forms*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), no. 3, 399–404.

Поступило 4 ноября 1993 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27