В заключение рассмотрим волновое уравнение и уравнение для волн SH:

(31а) $\nabla^2 H = u_{tt}/v^2$,

(31б) $\nabla^2 u - u/r^2 = u_{tt}/v^2$.

Глобальные о.ф.и.-решения этих уравнений имеют вид (30) с одинаковыми лучевыми амплитудами $\Psi(\tau)$ и разными функциями направленности:

а) $\Psi(\tau) = \tau$,
$\Psi(\eta) = C_1 + C_2 \ln \operatorname{tg} \theta/2$;
$\eta = \theta$, $\operatorname{tg}\theta = r/z$, $\tau = v \cdot \nabla\tau = \text{const}$,

б) $\Psi(\tau) = \tau$,
$\Psi(\eta) = C_1 \operatorname{ctg}\theta + C_2/\sin\theta$;
$C_1, C_2 = \text{const}$.

При этом скорость вдоль прямых лучей должна подчиняться законам (27).

Институт геологии и геофизики
им. 60-летия Союза ССР
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
13 VI 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А.* Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 271 с. 2. *Никольский Э.В.* – ДАН, 1989, т. 308, № 6.

УДК 517.11+517.43+512.81

МАТЕМАТИКА

© **В.Г. ПЕСТОВ**

ОБ ОДНОМ НОРМИРОВАННОМ ПОЛЕ, ВВЕДЕННОМ А. РОБИНСОНОМ, И СВЯЗАННЫХ С НИМ СТРУКТУРАХ

(Представлено академиком Ю.Г. Решетняком 17 II 1988)

В работе [1] А. Робинсон перебросил мост от нестандартного анализа к неархимедовому. Этим мостом явилось изобретенное им нормированное поле ${}^{\rho}\mathbf{R}$. Наследуя многие достоинства нестандартного числового поля ${}^{*}\mathbf{R}$, поле ${}^{\rho}\mathbf{R}$ стандартно и не содержит такой массы бесконечно малых, как ${}^{*}\mathbf{R}$. Полю ${}^{\rho}\mathbf{R}$ посвящены работы [2, 3].

В настоящей заметке более детально исследуется структура этого поля (п. 1). Удается прояснить строение некоторых банаховых пространств и алгебр над ${}^{\rho}\mathbf{R}$ (п. 2). Группам Ли над полем ${}^{\rho}\mathbf{R}$ посвящен п. 3. Мы используем "классическую установку" нестандартного анализа [2, 4]. Нестандартное расширение ${}^{*}\mathfrak{M}$ теоретико-множественной структуры $\mathfrak{M}$ предполагается $\aleph_1$-насыщенным. Как и автор [5], мы придерживаемся соглашения о "стандартности антуража": встречающийся объект стандартен, если не оговорено противное.

1. П о л е ${}^{\rho}\mathbf{R}$ и е г о с т р у к т у р а.

1.1. Фиксируем положительный бесконечно малый элемент $\rho \in {}^{*}\mathbf{R}$ и положим: ${}^{\rho}\mathrm{fin}\,\mathbf{R} := \{r \in {}^{*}\mathbf{R}\colon \exists n \in \mathrm{N}\ \ |r| < \rho^{-n}\}$, ${}^{\rho}\mu_{\mathbf{R}}(0) := \{r \in {}^{*}\mathbf{R}\colon \forall n \in \mathrm{N}\ \ |r| < \rho^{n}\}$. Тогда ${}^{\rho}\mathrm{fin}\,\mathbf{R}$ – (выпуклое) подкольцо поля ${}^{*}\mathbf{R}$, а ${}^{\rho}\mu_{\mathbf{R}}(0)$ – (выпуклый) максимальный идеал в ${}^\rho\mathrm{fin}\,\mathbf{R}$. Таким образом, поле ${}^\rho\mathbf{R} := {}^\rho\mathrm{fin}\,\mathbf{R}/{}^\rho\mu_{\mathbf{R}}(0)$ упорядочено. Фактор-гомоморфизм ${}^\rho\mathrm{fin}\;\mathbf{R} \to {}^\rho\mathbf{R}$ обозначим ${}^\rho\mathrm{st}$ и положим $\bar{\rho} = {}^\rho\mathrm{st}\;\rho$. Формулы $v\,({}^\rho\mathrm{st}\;x) := = \mathrm{st}\,\log_\rho x \quad (x \in {}^\rho\mathrm{fin}\,x)$ и $v\,(0) := +\infty$ определяют на ${}^\rho\mathbf{R}$ неархимедово (аддитивное) нормирование; можно перейти к норме (мультипликативному нормированию) $|\cdot|_\rho := \exp\,(-v\,(\cdot))$. Поле ${}^\rho\mathbf{R}$ сферически полно [3].

1.2. З а м е ч а н и е. Нормирование поля ${}^\rho\mathbf{R}$ согласовано с его порядком, т.е. $0 < x < y$ влечет $v\,(x) \geqslant v\,(y)$. Поэтому поле классов вычетов ${}^{(\rho}\mathbf{R}$ – упорядоченное поле.

1.3. Для упорядоченного поля K через $K\,\langle\langle\, t\,\rangle\rangle$ обозначим поле Хана всех формальных степенных рядов вида $\Sigma\, k_\tau\, t^{\alpha_\tau}$, где $\{\,\alpha_\tau\}$ – произвольное вполне упорядоченное подмножество $\mathbf{R}$, а $k_\tau \in K$. Это поле неархимедово нормировано условиями $v\,(k_0 t^{\alpha_0} + \ldots) := \alpha_0\;(k_0 \neq 0),\, v\,(0) := +\infty$, и упорядочено так, что t – положительный элемент, бесконечно малый относительно всех элементов K_+. В более общем контексте такие поля рассматривались в [6]; см. также [7, 8].

1.4. Т е о р е м а. *Поле ${}^\rho\mathbf{R}$ изоморфно, как нормированное и упорядоченное поле, полю Хана ${}^{(\rho}\mathbf{R}\langle\langle\, t\,\rangle\rangle$, причем $t \longleftrightarrow \bar{\rho}$.*

Вся техника, нужная для доказательства, есть в [2, 8]. В несколько менее общей ситуации эта теорема доказана в [9].

1.5. А. Робинсон показал [1], что нормированное и упорядоченное поле $\mathbf{L} = = \mathbf{R}\langle\, t\,\rangle$ (поле Леви–Чивита всех формальных степенных рядов с вещественными коэффициентами, показатели степени формальной переменной у которых образуют неограниченно возрастающие последовательности вещественных чисел) вкладывается в ${}^\rho\mathbf{R}$ при соответствии $t \longleftrightarrow \bar{\rho}$. Верен более сильный результат:

1.6. С л е д с т в и е. *Поле ${}^\rho\mathbf{R}$ содержит подполе изоморфное (порядково и нормированно) полю Хана $\mathbf{R}\langle\langle\, t\,\rangle\rangle$, причем $t \longleftrightarrow \bar{\rho}$.*

1.7. З а м е ч а н и е. В [3] Люксембург утверждает без доказательства, что поле $\mathbf{L}$ сферически полно. Это, однако, не так: примером строго убывающей последовательности замкнутых шаров, имеющей пустое пересечение, может служить

$$\left\{ B\left(\sum_{k=1}^{n} t^{-1/k};\; -1/n \right) \right\}_{n=1}^{\infty},$$

где $B(x;\;\epsilon) := \{\, y \in \mathbf{L}\colon\; v\,(x-y) \geqslant \epsilon\,\}$. На самом деле, минимальным сферически полным расширением поля $\mathbf{L}$ является поле Хана $\mathbf{R}\langle\langle\, t\,\rangle\rangle$.

1.8. Поле ${}^\rho\mathbf{R}$, разумеется, вещественно замкнуто [1, 2], но не является экспоненциально замкнутым полем в смысле [10]; в этом корень неудобств, возникающих при определении ρ-неархимедовой оболочки группы Ли (3.3). Также ${}^\rho\mathbf{R}$ не обладает свойством Больцано–Вейерштрасса BW (см. [11]). Однако в ${}^\rho\mathbf{R}$ имеется множество целых (integer set) в смысле Кейслера (определение см. в [11]), являющееся мультипликативной полугруппой: это ${}^\rho\mathbf{N}$, образ $({}^\rho\mathrm{fin}\;\mathbf{R}) \cap {}^*\mathbf{N}$ при отображении ${}^\rho\mathrm{st}$. Наконец, очевидным образом можно определить поле ${}^\rho\mathbf{C}$ и показать, что ${}^\rho\mathbf{C} \cong {}^\rho\mathbf{R}(i)$.

2. Б а н а х о в ы п р о с т р а н с т в а и а л г е б р ы н а д ${}^\rho\mathbf{R}$.

2.1. Если E – внутреннее вещественное нормированное пространство, то положим ${}^\rho\mathrm{fin}\;E := \{\, x \in E\colon\; \|x\| \in {}^\rho\mathrm{fin}\;\mathbf{R}\,\}$, ${}^\rho\mu_E(0) := \{\, x \in E\colon\; \|x\| \in {}^\rho\mu_{\mathbf{R}}(0)\}$; фактор-пространство ${}^\rho E := {}^\rho\mathrm{fin}\;E/{}^\rho\mu_E(0)$ снабжается неархимедовой нормой правилом: $\|\,{}^\rho\mathrm{st}\;x\|_\rho := |\,{}^\rho\mathrm{st}\;\|x\|\,|_\rho$ (здесь $x \in {}^\rho\mathrm{fin}\;E$, а ${}^\rho\mathrm{st}$ имеет ясный в обоих случаях смысл), и оказывается сферически полным банаховым пространством над ${}^\rho\mathbf{R}$, именующимся ρ-неархимедовой оболочкой пространства E [3].

2.2. Если A – внутренняя нормированная алгебра (вообще говоря, неассоциативная) и $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ при $x,\, y \in A$, то ρ-неархимедова оболочка ${}^\rho A$ оказывается алгеброй над полем ${}^{\rho}\mathbf{R}$ со свойством $\|xy\|_\rho \leqslant \|x\|_\rho \cdot \|y\|_\rho$ и удовлетворяющей всем тем же стандартным тождествам, что и A. Отметим, что если алгебра A стандартна, то алгебра ${}^{\rho}A$ не зависит от выбора стандартной нормы на A.

2.3. Пусть A – алгебра над полем K; совокупность всех формальных рядов Хана (1.3) с коэффициентами из A образует неархимедовски нормированную алгебру $A\langle\langle t\rangle\rangle$ над полем Хана $K\langle\langle t\rangle\rangle$.

Для внутренней нормированной алгебры A пусть ${}^{(\rho}A$ – алгебра над полем ${}^{(\rho}\mathbf{R}$ классов вычетов нормы $\|\cdot\|_\rho$.

2.4. Для вещественной нормированной алгебры A неясно, изоморфны ли алгебры ${}^{\rho}A$ и ${}^{(\rho}A\langle\langle t\rangle\rangle$ над полем ${}^{\rho}\mathbf{R} \cong {}^{(\rho}\mathbf{R}\langle\langle t\rangle\rangle$. Однако справедливы такие результаты:

2.5. Предложение. *Если E – нормированное пространство, то пространства ${}^{\rho}E$ и ${}^{(\rho}E\langle\langle t\rangle\rangle$ изометричны.*

2.6. Предложение. *Алгебра $A\langle t\rangle$ формальных степенных рядов Леви–Чивита* (1.5) *с коэффициентами из A вкладывается в ${}^{\rho}A$ как нормированная подалгебра над полем $\mathbf{L} \hookrightarrow {}^{\rho}\mathbf{R}$, $t \to \overline{\rho}$.*

2.7. В нестандартной теории банаховых пространств важное место занимает проблема: когда два бесконечномерных номированных пространства обладают изоморфными нестандартными оболочками [12]? Ее аналог для ρ-неархимедовых оболочек с учетом 2.5 решается просто.

2.8. Теорема. *Для любых двух бесконечномерных нормированных пространств E и F над полем $\mathbf{R}$ существует нестандартное расширение ${}^{*}\mathfrak{M}$ структуры, содержащей эти пространства, такое, что ρ-неархимедовы оболочки ${}^{\rho}E$ и ${}^{\rho}F$ изометрически изоморфны.*

3. Алгебры и группы Ли над ${}^{\rho}\mathbf{R}$.

3.1. Для внутренней нормированной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ алгебра Ли ${}^{\rho}\mathfrak{g}$ над полем ${}^{\rho}\mathbf{R}$ неархимедовски нормирована, поэтому ей соответствует группа Ли над тем же полем, $J({}^{\rho}\mathfrak{g}) := \{x \in {}^{\rho}\mathfrak{g} : \|x\|_\rho < 1\}$ с операцией, определяемой рядом Хаусдорфа (см. [13, гл. III, § 4, лемма 3]). Ее алгебра Ли изоморфна ${}^{\rho}\mathfrak{g}$.

3.2. Для банаховых алгебр Ли $\mathfrak{g}$ соответствие $\mathfrak{g} \mapsto J({}^{\rho}\mathfrak{g})$ функториально, и определяет вложение категории конечномерных вещественных алгебр Ли в категорию групп Ли над полем ${}^{\rho}\mathbf{R}$; как видно из 2.8, на бесконечномерных алгебрах Ли функтор $J({}^{\rho}\mathfrak{g})$ не инъективен.

3.3. Распространим понятие ρ-неархимедовой оболочки на банаховы группы Ли. Пусть G – внутренняя банахова группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, нормированная, как в (2.2). Пусть ${}^{\rho}\mathrm{fin}\ G$ – подгруппа G, порожденная множеством $\exp_G {}^{\rho}\mathrm{fin}\ \mathfrak{g}$, и ${}^{\rho}\mu_G(e) := \exp_G {}^{\rho}\mu_{\mathfrak{g}}(0)$. Подгруппа ${}^{\rho}\mu_G(e)$ может не быть нормальной в ${}^{\rho}\mathrm{fin}\ G$ (уже для $G = {}^{*}GL_2(\mathbf{R})$), поэтому определим ρ-неархимедову оболочку ${}^{\rho}G$ как фактор-группу по подгруппе ${}^{\rho}\mu_G(e)$ ее нормализатора в ${}^{\rho}\mathrm{fin}\ G$. Правило ${}^{\rho}\exp\ {}^{\rho}\mathrm{st}_{\mathfrak{g}}\, x :=$ $:= {}^{\rho}\mathrm{st}_G \exp_G x$ задает частично (в том числе, на всех конечных элемента) определенное отображение ${}^{\rho}\exp: {}^{\rho}\mathfrak{g} \dashrightarrow {}^{\rho}G$.

3.4. Предложение. *Если группа Ли G и норма на ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$ стандартны, то ρ-неархимедова оболочка ${}^{\rho}G$ наделяется единственной структурой группы Ли над полем ${}^{\rho}\mathbf{R}$ такой, что ${}^{\rho}\exp$ есть экспоненциальное отображение.*

3.5. Предложение. *Если A – ассоциативная полная нормированная алгебра с единицей, причем $\|1\| = 1$, то группа Ли $({}^{\rho}A)^{\times}$ канонически изоморфна собственной отркытой подгруппе Ли группы Ли ${}^{\rho}(A^{\times})$.*

3.6. Простейший пример – это группа ${}^{\rho}U(1)$, изоморфная фактор-группе ${}^{\rho}\mathbf{R}/{}^{\rho}\mathbf{Z}$, где ${}^{\rho}\mathbf{Z} = {}^{\rho}\mathbf{N} \cup (-{}^{\rho}\mathbf{N})$. Группа ${}^{\rho}U(1)$ несет естественный циклический порядок (определение см. в [7]), согласованный с топологией.

3.7. Замечание. Общепринятый подход к "структуризации" бесконечномерных алгебр и групп Ли состоит в превращении их самих или их расширений в алгебры и группы Фреше–Ли (см., например, [14]). Другой подход намечен в [15]: вкладывать их в алгебры и группы Ли над неархимедовыми полями. В этой связи отметим, что для любой банаховой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ее "алгебра формальных токов" $\mathfrak{g}((t))$ является подалгеброй (над полем $\mathbf{R}((t))$) алгебры Ли $^{\rho}\mathfrak{g}$ (следует из 2.6), а для любой ассоциативной банаховой алгебры с единицей A соответствующая "группа формальных токов" $A((t))^{\times}$ является подгруппой Ли группы Ли, полученной из $^{\rho}(A^{\times})$ сужением поля скаляров до $\mathbf{R}((t))$ (следует из 3.5).

Автор признателен своему отцу Г.Г. Пестову, в частности, привлекшему его внимание еще 11 лет назад к статье [1], и проф. С.С. Кутателадзе за внимание к настоящей работе.

Томский государственный университет им. В.В. Куйбышева

Поступило 16 V 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Robinson A.* – Amer. Math. Monthly, 1973, vol. 80, p. 87–109. 2. *Lightstone A.H., Robinson A.* Nonarchimedean fields and asymptotic expansions. Amsterdam: North-Holland, 1975. 3. *Luxemburg W.A.J.* – Israel J. Math., 1976, vol. 25, p. 189–201. 4. *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980. 5. *Кутателадзе С.С.* – Сиб. матем. журн., 1986, т. 27, № 1, с. 100–110. 6. *Hahn H.-S.* – Ber. König. Akad. Wiss. Vienna, 1907, Bd. 116, S. 601–653. 7. *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965. 8. *Kaplansky I.* – Duke Math. J., 1942, vol. 9, p. 303–321. 9. *Diarra B.* – Ann. Sci. Univ. Clermont II. Sér. Math., 1984, Fasc. 22, p. 1–37. 10. *Alling N.L.* – Proc. Amer. Math. Soc., 1962, vol. 13, № 5, p. 706–711. 11. *Schmerl J.H.* – Israel J. Math., 1985, vol. 50, № 1/2, p. 145–159. 12. *Henson C.W., Moore L.C.* – Lect. Notes Math., 1983, vol. 983, p. 27–112. 13. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1976, гл. I–III. 14. *Adams M., Ratin T., Schmid R.* In: Infinite-dimensional groups with appl. N.Y., 1985, p. 1–69. 15. *Van Eck H.N.* – Lett. Math. Phys., 1986, vol. 12, № 3, p. 231–239.

УДК 519.2 МАТЕМАТИКА

© **Г.М. ФЕЛЬДМАН**

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОШИ НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ И ЕГО ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ

(Представлено академиком Ю.В. Прохоровым 18 V 1988)

Задачам характеризации гауссовского распределения, распределения Коши и других типов устойчивых распределений на вещественной прямой одинаковой распределенностью линейных статистик посвящен ряд исследований (см. [1]). В списке нерешенных задач в [1] сформулирована задача построения теории равнораспределенности форм на алгебраических структурах. В настоящей работе мы определяем распределение Коши на локально-компактной абелевой группе и рассматриваем для него некоторые характеризационные задачи.

Пусть X – локально-компактная абелева сепарабельная метрическая группа (в дальнейшем просто группа), $Y = X^*$ – ее группа характеров, (x, y) – значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Компоненту нуля группы X обозначим C_X. Если X – связная группа, то через $\dim X$ обозначим ее размерность. Через R и T будем обозначать соответственно группу вещественных чисел и группу вращений окружности.