А. Я. Дороговцев, Устойчивость p-периодических решений вырождающегося уравнения,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 4, 435–440

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 435–440

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.937

УСТОЙЧИВОСТЬ p-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ

 А. Я. Дороговцев

В работе [1] получено асимптотическое разложение по степеням ε для стационарного решения x_ε абстрактного уравнения

$$\varepsilon x_\varepsilon''(t) + x_\varepsilon'(t) = Ax_\varepsilon(t) + \xi(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

с ограниченным линейным оператором A и гладким входным случайным стационарным процессом ξ при стремлении к нулю положительного действительного параметра ε. Существование такого асимптотического разложения обеспечивается гладкостью входного процесса. Аналогичный результат для абстрактного интегро-дифференциального уравнения содержится в работе [2]. В работах [1, 2] имеются также дополнительные ссылки. В настоящей работе изучается поведение периодического по распределению решения вырождающегося уравнения (1) в гильбертовом пространстве без предположения о гладкости входного процесса. Приведены условия устойчивости периодических по распределению решений. Устойчивость здесь понимается в следующем смысле: существование периодического по распределению решения уравнения (1) является при указанных ниже условиях свойством, которое сохраняется при вырождении уравнения. Получена также оценка для расхождения между решением уравнения (1) и решением предельного уравнения.

1. Введение. Пусть $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ – комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $\overline{0}$ – нулевой элемент в H, $\mathcal{L}(H)$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих в H, с операторной нормой, а Θ и I – нулевой и единичный операторы, действующие в H, соответственно.

Для H-значной функции непрерывность и дифференцируемость означают соответственно непрерывность и дифференцируемость относительно нормы в H.

Рассматриваемые ниже случайные элементы предполагаются определенными на некотором полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Математическое ожидание обозначается символом $\mathbf{E}$. Предполагается, что: единственность случайной функции, удовлетворяющей некоторому уравнению, означает ее единственность с точностью до стохастической эквивалентности; все используемые ниже H-значные случайные функции непрерывны с вероятностью 1 и все соотношения со случайными элементами выполнены с вероятностью 1.

Пусть $p > 0$ – фиксированное число. H-значный процесс $\{\xi(t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ называется периодическим по распределению или p-периодическим, если все его конечномерные распределения периодичны с периодом p по сдвигу времени (свойства таких процессов приведены в [3]). Обозначим через $\mathcal{P}_1$ класс всех p-периодических процессов ξ, таких, что $\sup\limits_{0 \le t \le p} \mathbf{E}\|\xi(t)\| < +\infty$.

Далее уравнение (1) рассматривается в пространстве H и оператор $A \in \mathcal{L}(H)$. Наряду с уравнением (1) рассмотрим предельное уравнение

$$x'(t) = Ax(t) + \xi(t), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Дальнейшие рассуждения опираются на утверждение из [3, теорема 1, п. 7.1.1] относительно уравнения (2), которое имеет место в банаховом пространстве B и состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathcal{L}(B)$. Для того чтобы для каждого стационарного процесса $\xi \in \mathcal{P}_1$ уравнение (2) имело единственное стационарное решение $x \in \mathcal{P}_1$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sigma(A) \cap i\mathbf{R} = \emptyset. \tag{3}$$

Если условие (3) выполнено, то для каждого процесса $\xi \in \mathcal{P}_1$ уравнение (2) имеет единственное решение $x \in \mathcal{P}_1$.

Здесь $\sigma(A)$ – спектр оператора A.

Далее A – ограниченный самосопряженный оператор, для которого число нуль принадлежит резольвентному множеству. Тогда существуют проекционные операторы P_+ и P_- такие, что $P_-P_+ = P_+P_- = \Theta$, $P_- + P_+ = I$, положительный оператор $A_+ := P_+A$, называемый положительной частью оператора A, действует из $H_+ := P_+H$ в H_+ и имеет своим спектром лежащую правее нуля часть спектра оператора A, а отрицательный оператор $A_- := P_-A$, называемый отрицательной частью оператора A, действует из $H_- := P_-H$ в H_- и имеет своим спектром лежащую левее нуля часть спектра оператора A. Возможно, что $P_+ = I$ (часть спектра, лежащая левее нуля, отсутствует), тогда $P_- = \Theta$ и все слагаемые в последующих рассуждениях, относящиеся к H_-, следует опустить. Аналогично возможно, что $P_- = I$, тогда нужно поступить, как и выше. Ниже все формулы будем записывать для общего случая, когда оба спектральных множества не пусты. Подпространства H_- и H_+ ортогональны, инвариантны относительно оператора A и $A = A_- + A_+$, $H = H_- \dot{+} H_+$. (Используемые факты из спектральной теории самосопряженных операторов можно найти, например, в [4, гл. 7, § 5]). Далее для элемента $z \in H$ положим $z_- := P_-z$, $z_+ := P_+z$. Пусть $I_\pm$ и $\Theta_\pm$ – единичный и нулевой операторы в $H_\pm$ соответственно. Нам понадобится также пространство H^2, представляющее собой множество векторов-столбцов с двумя координатами из H с покоординатными линейными операциями и скалярным произведением, равным сумме скалярных произведений соответствующих координат. Аналогично определяются пространства H_-^2 и H_+^2.

При доказательстве теоремы 1 для решения $x \in \mathcal{P}_1$ уравнения (2) получено следующее представление [3, п. 7.1.1]:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp(A_-(t-s))\xi_-(s)\,ds - \int_{t}^{+\infty} \exp(A_+(t-s))\xi_+(s)\,ds, \quad t \in \mathbf{R},$$

где $\xi \in \mathcal{P}_1$. Это представление будем использовать в дальнейшем.

2. Формулировка основного результата и вспомогательные утверждения. Основным результатом настоящей работы является

Теорема 2. *Пусть A – ограниченный самосопряженный оператор, для которого число нуль принадлежит резольвентному множеству, и процесс $\xi \in \mathcal{P}_1$. Тогда уравнение (2) имеет единственное решение $x \in \mathcal{P}_1$ и для всех значений ε, меньших некоторого положительного числа ε_1, уравнение (1) имеет единственное решение $x_\varepsilon \in \mathcal{P}_1$, при этом справедливо следующее соотношение: $\sup\limits_{0 \le t \le p} \mathbf{E}\|x_\varepsilon(t) - x(t)\| \le C\varepsilon$ с некоторым числом C.*

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Уравнение (1) в H равносильно системе двух уравнений*

$$\varepsilon x''_{\mp,\varepsilon}(t) + x'_{\mp,\varepsilon}(t) = A_\mp x_{\mp,\varepsilon}(t) + \xi_\mp(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad \textit{в пространстве } H_\mp. \tag{$4_\mp$}$$

Доказательство следует из приведенных выше фактов о проекционных операторах и инвариантности подпространств H_- и H_+.

Обозначим через $[-m, -a_-]$, $m > 0$, $a_- > 0$, отрезок, содержащий множество $\sigma(A_-)$, если $\sigma(A_-) \ne \emptyset$. Далее предполагаем, что $\sigma(A_-) \ne \emptyset$. Если же $\sigma(A_-) = \emptyset$, то уравнение (4_-) отсутствует. Пусть $a_+ > 0$ – точная нижняя грань оператора A_+, если $\sigma(A_+) \ne \emptyset$. Далее считаем, что $\sigma(A_+) \ne \emptyset$, в противном случае уравнение (4_+) отсутствует.

Пусть $\vec{z}_{-,\varepsilon}(t)$ – вектор-столбец с координатами $x'_{-,\varepsilon}(t)$ и $x_{-,\varepsilon}(t)$ для $t \in \mathbf{R}$.

Лемма 2. *Уравнение (4_-) в H_- равносильно уравнению в H_-^2*

$$\vec{z}\,'_{-,\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{-1}I_- & \varepsilon^{-1}A_- \\ I_- & \Theta_- \end{pmatrix} \vec{z}_{-,\varepsilon}(t) + \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}I_- & -\varepsilon^{-1}I_- \\ \Theta_- & I_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_-(t) \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Если $\varepsilon < \varepsilon_0 := (8m)^{-1}$, то самосопряженный и положительный оператор $I_- + 4\varepsilon A_-$ имеет единственный положительный квадратный корень, который, как обычно, обозначаем $\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}$. Далее предполагаем, что $\varepsilon < \varepsilon_0$. При этом операторное уравнение

$$\Lambda^2 + \varepsilon^{-1}\Lambda - \varepsilon^{-1}A_- = \Theta_-$$

имеет в $\mathcal{L}(H_-)$ два решения $\Lambda_{1,2} = -(2\varepsilon)^{-1}(I_- \pm \sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-})$. Легко проверить, что операторы Λ_1 и Λ_2 отрицательны при любом $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и имеют следующие точные верхние грани: $-(2\varepsilon)^{-1}(1 + \sqrt{1 - 4m\varepsilon}) < -\varepsilon^{-1}$, $-(2\varepsilon)^{-1}(1 - \sqrt{1 - 4a_-\varepsilon}) < -a_-$ соответственно. Согласно спектральной теореме, операторы Λ_1, Λ_2 и A_- коммутируют между собой, а оператор $\Lambda_1 - \Lambda_2 = -\varepsilon^{-1}\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}$ имеет ограниченный обратный. Рассмотрим матрицу

$$W := \begin{pmatrix} I_- & \Lambda_2 \\ \Lambda_1^{-1} & I_- \end{pmatrix}, \quad W^{-1} = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & -\Lambda_1\Lambda_2 \\ -1 & \Lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Положим $\vec{u}_{-,\varepsilon} := W^{-1}\vec{z}_{-,\varepsilon}$, $\vec{z}_{-,\varepsilon} := W\vec{u}_{-,\varepsilon}$. Непосредственным подсчетом доказывается

Лемма 3. *Уравнение (5) в H_-^2 равносильно уравнению*

$$\vec{u}\,'_{-,\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Theta_- \\ \Theta_- & \Lambda_2 \end{pmatrix} \vec{u}_{-,\varepsilon}(t) + (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\xi_-(t) \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}\Lambda_1 \\ -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

Уравнение (6) распадается на два уравнения в пространстве H_-, к каждому из которых можно применить теорему 1. В результате получим следующее утверждение.

Лемма 4. *Уравнение (6) в H_-^2 имеет единственное p-периодическое решение*

$$\vec{u}_{-,\varepsilon}(t) = (\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\,)^{-1} \begin{pmatrix} -\Lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{t} \exp(\Lambda_1(t-s))\xi_-(s)\,ds \\ \int\limits_{-\infty}^{t} \exp(\Lambda_2(t-s))\xi_-(s)\,ds \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Лемма 5. *Уравнения $x'_\pm(t) = A_\pm x_\pm(t) + \xi_\pm(t)$, $t \in \mathbf{R}$, в $H_\pm$ имеют единственные p-периодические решения $x_\pm(t) = -\int_t^{\pm\infty} \exp(A_\pm(t-s))\xi_\pm(s)\,ds$, $t \in \mathbf{R}$, соответственно. Сумма $x := x_- + x_+$ есть единственное p-периодическое решение уравнения (2).*

Справедливость утверждения устанавливается с помощью теоремы 1 и утверждения, аналогичного лемме 1, для уравнения (2).

Следствием леммы 4 и прямого подсчета является

Лемма 6. *Уравнение (4_-) в H_- имеет единственное p-периодическое решение*

$$\vec{x}_{-,\varepsilon} = -(\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\,)^{-1}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t} \exp(\Lambda_1(t-s))\xi_-(s)\,ds - \int\limits_{-\infty}^{t} \exp(\Lambda_2(t-s))\xi_-(s)\,ds \Bigg), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения (4_+). Положительный при $\varepsilon > 0$ оператор $I_+ + 4\varepsilon A_+$ имеет единственный положительный квадратный корень $\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}$. Операторное уравнение $\tilde\Lambda^2 + \varepsilon^{-1}\tilde\Lambda - \varepsilon^{-1}A_+ = \Theta_+$ имеет два решения $\tilde\Lambda_{1,2} = -(2\varepsilon)^{-1}(I_+ \pm \sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+})$. Легко проверить, что при любом $\varepsilon > 0$ оператор $\tilde\Lambda_1$ отрицателен и имеет точную верхнюю грань $-(2\varepsilon)^{-1}(1 + \sqrt{1 + 4a_+\varepsilon}) < -\varepsilon^{-1}$, а оператор $\tilde\Lambda_2$ положителен и имеет точную нижнюю грань $c := (2\varepsilon)^{-1}(\sqrt{1 + 4a_+\varepsilon} - 1)$, $c > a_+/2$, $\varepsilon < 2/a_+$. Операторы $\tilde\Lambda_1$, $\tilde\Lambda_2$ и A_+ коммутируют между собой, а оператор $\tilde\Lambda_1 - \tilde\Lambda_2 = -\varepsilon^{-1}\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}$ имеет ограниченный обратный. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, приводят к следующему аналогу леммы 6.

Лемма 7. *Уравнение* (4_+) *в* H_+ *имеет единственное* p*-периодическое решение*

$$\vec{x}_{+,\varepsilon} = -(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\,)^{-1}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t} \exp(\tilde\Lambda_1(t-s))\xi_+(s)\,ds + \int\limits_{t}^{+\infty} \exp(\tilde\Lambda_2(t-s))\xi_+(s)\,ds\Bigg), \quad t \in \mathbf{R}.$$

3. Доказательство теоремы 2. Из лемм 1, 6 и 7 вытекает, что уравнение (1) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1 := \min(\varepsilon_0, 2/a_+)$ имеет единственное p-периодическое решение $x_\varepsilon := x_{-,\varepsilon} + x_{+,\varepsilon}$.

Для фиксированного $t \in [0,p]$ рассмотрим теперь оценку величины $\mathbf{E}\|x_\varepsilon(t) - x(t)\|$. Сначала, используя леммы 5–7, получаем неравенство $\mathbf{E}\|x_\varepsilon(t) - x(t)\| \le \sum_{k=1}^4 r_k$, в котором

$$r_1 := \|(\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\,)^{-1}\|\,\Bigg\|\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\Lambda_1(t-s)}\xi_-(s)\,ds\Bigg\|,$$

$$r_2 := \Bigg\|\int\limits_{-\infty}^{t} [(\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\,)^{-1}e^{\Lambda_2(t-s)} - e^{A_-(t-s)}]\xi_-(s)\,ds\Bigg\|,$$

$$r_3 := \|(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\,)^{-1}\|\,\Bigg\|\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\tilde\Lambda_1(t-s)}\xi_+(s)\,ds\Bigg\|,$$

$$r_4 := \Bigg\|\int\limits_{t}^{+\infty} [(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\,)^{-1}e^{\tilde\Lambda_2(t-s)} - e^{A_+(t-s)}]\xi_+(s)\,ds\Bigg\|.$$

Для оценки величин $\{r_k\}$ сначала докажем несколько простых неравенств. Заметим, что

$$\|(\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\,)^{-1}\| \le \sqrt{2}, \quad \|(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\,)^{-1}\| \le 1. \tag{7}$$

С некоторым числом $C_1 \ge 0$ имеем оценку

$$\|e^{\Lambda_1 t}\| \le C_1 e^{-t/\varepsilon}, \quad t \ge 0. \tag{8}$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\|\Lambda_2 - A_-\| \le 2m^2\varepsilon. \tag{9}$$

Легко проверить справедливость равенства

$$\int\limits_0^s e^{A_-(s-u)}(\Lambda_2 - A_-)e^{\Lambda_2 u}\,du = e^{\Lambda_2 s} - e^{A_- s}, \quad s \ge 0, \tag{10}$$

откуда, учитывая неравенство (9) и неравенства $\|e^{A_- t}\| \le C_2 e^{-a_- t}$, $\|e^{\Lambda_2 t}\| \le C_2 e^{-a_- t}$, $t \ge 0$, справедливые с некоторым числом $C_2 > 0$, получаем, что

$$\|e^{\Lambda_2 s} - e^{A_- s}\| \le \int\limits_0^s e^{-a_-(s-u)}\|\Lambda_2 - A_-\|e^{-a_- u}\,du \le 2C_2^2 m^2 s e^{-a_- s}\varepsilon, \quad s \ge 0. \tag{11}$$

Легко проверить, что

$$\|(\sqrt{I_- + 4\varepsilon A_-}\,)^{-1} - I_-\| \le 4\sqrt{2}m\varepsilon, \quad \|(\sqrt{I_+ + 4\varepsilon A_+}\,)^{-1} - I_+\| \le 4\|A_+\|\varepsilon, \tag{12}$$

$$\|\tilde{\Lambda}_2 - A_+\| \leq 2\|A_+\|^2\varepsilon. \tag{13}$$

Заметим также, что с некоторым числом $C_3 > 0$ выполняются неравенства

$$\|e^{\tilde{\Lambda}_1 t}\| \leq C_3 e^{-t/\varepsilon}, \quad \|e^{-\tilde{\Lambda}_2 t}\| \leq C_3 e^{-a_+ t/2}, \quad \|e^{-A_+ t}\| \leq C_3 e^{-a_+ t}, \quad t \geq 0. \tag{14}$$

Из формулы, аналогичной (10), оценок (13) и (14) получим

$$\|e^{-\tilde{\Lambda}_2(s-t)} - e^{-A_+(s-t)}\| \leq \left\| \int\limits_0^{s-t} e^{-A_+(s-t-u)}(\tilde{\Lambda}_2 - A_+)e^{-\tilde{\Lambda}_2 u}\, du \right\| \leq$$

$$\leq 4\|A_+\|^2 C_3^2 a_+^{-1}(e^{-a_+(s-t)/2} - e^{-a_+(s-t)})\varepsilon, \quad s > t. \tag{15}$$

Положим $b := \sup\limits_{0 \leq t \leq p} \mathbf{E}\|\xi(t)\|$. Для величины r_1 из неравенств (7) и (8) имеем

$$r_1 \leq \sqrt{2} C_1 b \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)/\varepsilon}\, ds = \sqrt{2} C_1 b \varepsilon. \tag{16}$$

Оценим r_2 с помощью неравенств (12) и (11):

$$r_2 \leq 4\sqrt{2}\varepsilon C_2 b \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-a_-(t-s)}\, ds + b \int\limits_{-\infty}^{t} \|e^{\Lambda_2(t-s)} - e^{A_-(t-s)}\|\, ds \leq$$

$$\leq 4\sqrt{2} C_2 b a_-^{-1}\varepsilon + b \cdot 2C_2^2 m^2 \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{t} (t-s)e^{-a_-(t-s)}\, ds \leq 4\sqrt{2} C_2 b a_-^{-1}\varepsilon + b \cdot 2C_2^2 m^2 \varepsilon a_-^{-2} =$$

$$= 2C_2 b a_-^{-1}(2\sqrt{2} + C_2 m^2 a_-^{-1})\varepsilon. \tag{17}$$

Для оценки величины r_3 используем неравенства (7) и (14):

$$r_3 \leq C_3 b \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)/\varepsilon}\, ds = C_3 b \varepsilon. \tag{18}$$

Величина r_4 оценивается аналогично r_2 с помощью неравенств (12), (14) и (15):

$$r_4 \leq 4\|A_+\|\varepsilon C_3 b \int\limits_{t}^{+\infty} e^{-a_+(s-t)/2}\, ds + b \int\limits_{t}^{+\infty} \|e^{-\tilde{\Lambda}_2(s-t)} - e^{-A_+(s-t)}\|\, ds \leq$$

$$\leq 8\|A_+\| C_3 b a_+^{-1}\varepsilon + 4\|A_+\|^2 C_3^2 b a_+^{-1} \int\limits_{t}^{+\infty} (e^{-a_+(s-t)/2} - e^{-a_+(s-t)})\, ds\, \varepsilon \leq$$

$$\leq 8\|A_+\| C_3 b a_+^{-1}\varepsilon + 4\|A_+\|^2 C_3^2 b a_+^{-2}\varepsilon = 4\|A_+\| C_3 b a_+^{-1}(2 + \|A_+\| C_3 a_+^{-1})\varepsilon. \tag{19}$$

Таким образом, согласно (16)–(19), справедливо неравенство $\sup\limits_{0 \leq t \leq p} \mathbf{E}\|x_\varepsilon(t) - x(t)\| \leq C\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, где $C := \sqrt{2} C_1 b + 2C_2 b a_-^{-1}(2\sqrt{2} + C_2 m^2 a_-^{-1}) + C_3 b + 4\|A_+\| C_3 b a_+^{-1}(2 + \|A_+\| C_3 a_+^{-1})$.

4. Пример. Рассмотрим в качестве пространства H пространство

$$\mathbf{l}_2 = \left\{ x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) \,|\, x_k \in \mathbf{C}, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2 < +\infty \right\}$$

со скалярным произведением $(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \overline{y}_k$, $\{x,y\} \subset \mathbf{l}_2$, и соответствующей этому произведению нормой $\|\cdot\|$. Пусть оператор A в матричной форме имеет вид $A = (a_{j,k})_{\{j,k\}\subset\mathbf{Z}}$, $a_{n,n} = 3$, $a_{n-1,n} = a_{n,n+1} = 1$, $a_{j,k} = 0$, $|j-k| > 1$. Легко проверить, что оператор A имеет обратный

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 U^{-1})^k + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_2^{-1} U)^k,$$

где $\lambda_1 = (-3+\sqrt{5})/2$, $\lambda_2 = (-3-\sqrt{5})/2$ и U – оператор сдвига вправо. Таким образом, оператор A удовлетворяет условиям теоремы 2.

Теорема 2 в этом случае утверждает, что для процесса $\xi = (\xi_n) \in \mathcal{P}_1$ бесконечная система дифференциальных уравнений первого порядка

$$x_n'(t) = x_{n-1}(t) + 3x_n(t) + x_{n+1}(t) + \xi_n(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

имеет единственное решение – последовательность $x = (\ldots, x_1, x_0, x_1, \ldots)$, компоненты которой p-периодически связанные процессы, для каждого $t \in \mathbf{R}$ удовлетворяющие условию $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |x_n(t)|^2 < +\infty$ с вероятностью 1. Кроме того, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ аналогичное решение $x(t;\varepsilon) = (\ldots, x_{-1}(t;\varepsilon), x_0(t;\varepsilon), x_1(t;\varepsilon), \ldots)$, $t \in \mathbf{R}$, имеет также следующая бесконечная система дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\varepsilon x_n''(t) + x_n'(t) = x_{n-1}(t) + 3x_n(t) + x_{n+1}(t) + \xi_n(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Согласно теореме 2, справедлива оценка

$$\sup_{0\le t\le p} \mathbf{E}\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}} |x_n(t;\varepsilon) - x_n(t)|^2 \right)^{1/2} \le C\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дороговцев А.Я.* // Докл. РАН. 1999. Т. 369. № 3. С. 309–310.
2. *Dorogovtsev A.Ya., Trofimchuk O.Yu.* // J. of Appl. Math. and Stoch. Anal. 2001. V. 14. № 2. P. 139–150.
3. *Дороговцев А.Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. Киев, 1992.
4. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. М., 1982.

г. Киев

Поступила в редакцию
14.06.2002 г.