Ф. Гетце, М. И. Гордин, А. Левина, Предельное поведение в нуле корреляционных функций случайных матриц с фиксированным следом, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2007, том 341, 68–80

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 341, 2007 г.

Ф. Гётце[1], **М. И. Гордин**[1,2], **А. Левина**[3]

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ В НУЛЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ С ФИКСИРОВАННЫМ СЛЕДОМ

1. Введение

Пусть $\mathcal{H}_N$ – множество всех (комплексных) эрмитовых матриц размера $N \times N$. $\mathcal{H}_N$ – вещественное гильбертово пространство размерности N^2 относительно скалярного произведения $(A, B) \mapsto \operatorname{tr} AB$. Здесь $\operatorname{tr} A$ обозначает след квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$, так что $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^N a_{ii}$. Структура гильбертова пространства определяет нормализованную меру Лебега l_N на $\mathcal{H}_N$, удовлетворяющую соотношению $l_N(Q) = 1$ для произвольного куба $Q \subset \mathcal{H}_N$ с ребрами длины 1. По определению, стандартная гауссовская вероятностная мера μ_N на $\mathcal{H}_N$ задается своей плотностью

$$g_N(A) = \frac{1}{(2\pi)^{N^2/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{tr} A^2\right) \tag{1.1}$$

относительно меры l_N. Множество $\mathcal{H}_N$, снабженное мерой μ_N, известно как гауссовский унитарный ансамбль (GUE).

Пусть X – эрмитова случайная матрица размера $N \times N$ (т.е. случайная величина, принимающая значения в $\mathcal{H}_N$). Мы рассматриваем собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ случайной матрицы X как перестановочные случайные величины, совместное распределение P_N^X которых является вероятностной мерой на $\mathbb{R}^N$, инвариантной относительно всех перестановок координатных осей. Для

---

[1]Работа частично поддерживалась SFB 701 Spektrale Strukturen und Topologische Methoden in der Mathematik (Билефельдский университет).

[2]Работа частично поддерживалась грантами РФФИ 04-01-04000, РФФИ-ННИО 05-01-00911 и НШ 4222.2006.1.

[3]Работа поддерживалась докторантской программой Identification in Mathematical Models (Институт динамики и самоорганизации им. Макса Планка, Гёттинген).

любого $n, 1 \leqslant n \leqslant N$, обозначим через $P_{n,N}^X$ проекцию меры P_N^X в $\mathbb{R}^n$, индуцированную ортогональной проекцией пространства $\mathbb{R}^N$ на его подпроостранство, натянутое на какие-то n координатных осей $\mathbb{R}^N$. Вероятностная мера $P_{n,N}^X$ на $\mathbb{R}^n$ также инвариантна относительно перестановок координатных осей и представляет собой совместное распределение n собственных чисел, произвольным образом выбранных из всех N собственных чисел матрицы X. В частности, мера $P_{1,N}^X$ описывает распределение отдельного собственного значения. По определению, *n-точечная корреляционная мера* $\rho_{n,N}^X$ случайной матрицы X – это ненормированная конечная мера, определенная соотношением

$$\rho_{n,N}^X = \frac{N!}{(N-n)!} P_{n,N}^X. \tag{1.2}$$

Если мера $\rho_{n,N}^X$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^n$, то ее производная Радона–Никодима $R_{n,N}^X$ называется *n-точечной корреляционной функцией* случайной матрицы X. В частности, мера $\rho_{1,N}^X$ имеет общую массу N. Для произвольного измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^1$ величина $\rho_{1,N}^X(E)$ равна ожидаемому числу собственных чисел, принадлежащих E. Соответствующая плотность $R_{n,N}^X$, (если она существует) относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^1$ называется *плотностью собственных чисел* или *плотностью состояний* (иногда эти названия применяются к *нормированной* плотности собственных чисел, интеграл которой по всей прямой равен 1).

Пусть теперь X_N – случайная $N \times N$ матрица с распределением из GUE. Классический результат для GUE (справедливый также для многих других ансамблей) гласит, что для $Y_N = \frac{1}{\sqrt{N}} X_N$ верно соотношение

$$P_{1,N}^{Y_N} \underset{N \to \infty}{\to} W, \tag{1.3}$$

где сходимость мер слабая, а W – стандартная мера Вигнера на $[-2, 2]$, определемая плотностью

$$w(x) = (2\pi)^{-1} \sqrt{(4 - x^2)_+}, x \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

В терминах корреляционных мер можно написать эквивалентное соотношение

$$\frac{1}{N} \rho_{1,N}^{Y_N} \underset{N \to \infty}{\to} W. \tag{1.5}$$

Для n-точечных корреляционных мер имеет место аналогичное соотношение

$$\frac{1}{N^n}\rho_{n,N}^{Y_N} \underset{N\to\infty}{\to} \underbrace{W \times \cdots \times W}_{n\text{ раз}}, \tag{1.6}$$

означающее, что собственные числа становятся независимыми в пределе. Однако исследование при $n \geqslant 2$ более тонкой асимптотики около произвольной точки диагонали куба $(-2,2)^n$ показывает, что здесь зависимость принимает в пределе своеобразную форму, известную как *детерминантный точечный процесс* [8]. Заметим, что для корреляционной функции случайной матрицы с GUE-распределением известна точная формула детерминантного типа, справедливая при любом $n \leqslant N$. Эта формула вместе с классическими результатами об асимптотических свойствах функций Эрмита дает возможность определить предельное поведение n-точечной корреляционной функции в соответствующим образом сжимающейся окрестности точки вида $(u,\dots,u) \in (-2,2)^n$. Имеет место следующий результат о поведении $R_{n,N}^{Y_N}$ ([5, 4]): для всех $t_1,\dots,t_n \in \mathbb{R}^1$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{(Nw(u))^n} R_{n,N}^{Y_N}\left(u+\frac{t_1}{Nw(u)},\dots,u+\frac{t_n}{Nw(u)}\right)$$
$$= \det\left(\frac{\sin\pi(t_i-t_j)}{\pi(t_i-t_j)}\right)_{i.j=1}^n.$$

Отметим, что правая часть последнего равенства представляет собой пример корреляционной функции детерминантного (или фермионного) точечного процесса [8], определенного в данном специальном случае синус-ядром $(t_1,t_2) \mapsto (\sin\pi(t_1-t_2))/(\pi(t_1-t_2))$. В настоящей работе мы исследуем один недетерминантый ансамбль случайных эрмитовых матриц. Пусть

$$S_N^r = \{A \in \mathcal{H}_N : \operatorname{tr} A^2 = r^2\} \tag{1.8}$$

– сфера радиуса $r>0$ с центром в 0 в $\mathcal{H}_N$. На сфере S_N^r существует единственная вероятностная мера ν_N^r, инвариантная относительно всех ортогональных линейных преобразований пространства $\mathcal{H}_N$. Будем называть эту меру ансамблем с фиксированной нормой Гильберта–Шмидта (она также известна как ансамбль с фиксированным следом). Согласно хорошо известному результату [7, 5], для случайной матрицы $(Z_N)_{(N\geqslant 1)}$, распределенной в соответствии с $\nu_N^{\sqrt{N}}$, справедливо соотношение

$$\frac{1}{N}\rho_{1,N}^{Z_N} \underset{N\to\infty}{\to} W. \tag{1.9}$$

Мы покажем, что при $u = 0$ корреляционные функции $R_{n,N}^{Z_N}$ имеют тот же детерминантный предел, порождаемый ядром $(t_i, t_j) \mapsto \sin\pi(t_i - t_j)/\pi(t_i - t_j)$, что и корреляционные функции GUE. Этот результат можно рассматривать как пример феномена концентрации меры (близкие явления известны физикам [5] как эквивалентность различных типов канонических ансамблей Гиббса). Однако, чтобы вывести (1.7) для произвольной точки $u \in (-2, 2)$ из соображений концентрации, нужно их существенно уточнить, придав им локальную форму и доказав результат типа тауберовой теоремы. При этом приходится использовать сведения об асимптотическом поведении воспроизводящих ядер, связанных с функциями Эрмита, в различных областях комплексной плоскости. Такое доказательство является предметом работы [3] двух первых авторов настоящей заметки (см. также [2], где близкая схема применена для доказательства, осуществленного на физическом уровне строгости). Довольно любопытно, что метод, использованный в [3], применим ко всем $u \in (-2, 2)$, кроме нуля, в то время как при $u = 0$ применим гораздо более элементарный метод (дающий более слабое заключение, обсуждаемое ниже). Именно этот элементарный случай и является предметом данной работы.

Асимптотическое поведение в стягивающихся окрестностях нуля, определяемое синус-ядром, мы устанавливаем в настоящей заметке, комбинируя идею концентрации в форме хорошо известных оценок для вероятностей больших уклонений с применением масштабных преобразований. Заметим, что мы имеем здесь дело с последовательностью конечных мер, общая масса которых стремится к бесконечности. Эти меры сходятся к локально конечной мере на $\mathbb{R}^n$. В работе [3] для всех $u \in (-2, 2), u \neq 0$, доказывается равномерная сходимость плотностей таких мер на компактных подмножествах $\mathbb{R}^n$. В настоящей работе мы имеем дело со значительно более слабой топологией, базис которой определяется интегралами от непрерывных функций с компактными носителями. Мы предполагаем, что и в окрестности нуля имеет место равномерная сходимость плотностей, а затруднения в установлении этого факта связаны с применяемыми методами. В то же время в литературе имеются результаты, указывающие на то, что именно около нуля спектр более доступен для изучения. Отсюда ясно, что проблема требует дальнейшего исследования.

Итак, мы доказываем в настоящей работе следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}$ *– n-точечная корреляционная мера собственных чисел случайной матрицы, равномерно распределенной на сфере* $S_N^{\sqrt{N}}$. *Тогда для произвольной определенной на* $\mathbb{R}^n$ *непрерывной функции f с компактным носителем мы имеем*

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Nt_1/\pi,\ldots,Nt_n/\pi)\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}(dt_1\times\cdots\times dt_n)$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t_1,\ldots,t_n)\det\left(\frac{\sin\pi(t_i-t_j)}{\pi(t_i-t_j)}\right)_{i,j=1}^n dt_1\cdots dt_n.$$

Замечание 1. Соотношение (1.10) является специализацией для случая $u=0$ более общего соотношения

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Nw(u)(t_1-u),\ldots,Nw(u)(t_n-u))\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}(dt_1\times\cdots\times dt_n)$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t_1,\ldots,t_n)\det\left(\frac{\sin\pi(t_i-t_j)}{\pi(t_i-t_j)}\right)_{i,j=1}^n dt_1\cdots dt_n,$$

которое имеет место для всех $u\in(-2,2)$. Это последнее заключение следует из результатов, содержащихся в настоящей работе и в [3]. Для совершенно иного класса недетерминантных матричных ансамблей подобный результат установлен в [4].

Замечание 2. Отметим, что корреляционная мера $\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, если $n<N$ (это следует из явной формулы для $\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}$: см., например, [1]). Обозначим через $R_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}$ соответствующую корреляционную функцию. Соотношение (1.10) может быть переписано в терминах $R_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}$

и после замены переменных интегрирования принимает следующую форму:

$$\left(\pi/N\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t_1,\ldots,t_n) R_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}\left(\pi t_1/N,\ldots,\pi t_n/N\right) dt_1,\cdots dt_n$$

$$\underset{N\to\infty}{\to} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t_1,\ldots,t_n) \det\left(\frac{\sin\pi(t_i-t_j)}{\pi(t_i-t_j)}\right)_{i.j=1}^n dt_1\cdots dt_n.$$

2. Доказательства

Пусть X_N обозначет, как и выше, случайную матрицу со стандартным гауссовским вероятностным распределением μ_N (GUE) на $\mathcal{H}_N$. Положим $T_N = trX_N^2$ и обозначим через $\alpha_N(\cdot)$ плотность распределения величины T_N. Стандартная гауссовская мера μ_N на $\mathcal{H}_N$ допускает интегральное представление

$$\mu_N = \int\limits_0^\infty \nu_N^{\sqrt{s}} \alpha_N(s) ds, \tag{2.1}$$

где для любого $r > 0$ ν_N^r это (единственная) ортогонально инвариантная вероятностная мера на сфере S_n^r, а $\alpha_N(\cdot)$ – плотность, определенная выше. Случайная величина T_N может быть представлена как сумма N^2 независимых стандартных гауссовских случайных величин. Таким образом, T_N имеет известное χ_k^2–распределение с $k = N^2$. Заметим, что

$$ET_N = N^2,\ DT_N^2 = E(T_N - ET_N)^2 = 3N^2.$$

Лемма 1. *Пусть ξ – стандартная гауссовская случайная величина, $q \in [0,1)$ – вещественное число. Тогда для любого вещественного $t \in [-q/2, q/2]$*

$$E\exp\left(t(\xi^2-1)\right) \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}\frac{2}{1-q}t^2\right). \tag{2.2}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что для любого вещественного $t < 1/2$

$$E\exp\left(t\xi^2\right) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}. \tag{2.3}$$

Имеем

$$\log E \exp\left(t(\xi^2 - 1)\right) = -t - \frac{1}{2}\log(1 - 2t). \tag{2.4}$$

Предполагая, что $t \in [0, q/2]$, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(-t - \frac{1}{2}\log(1-2t)\right) = -1 - \frac{-2}{2(1-2t)} = \frac{2t}{1-2t} \leqslant \frac{2t}{1-q},$$

откуда при $t \in [0, q/2]$ вытекает оценка

$$-t - \frac{1}{2}\log(1-2t) \leqslant \frac{t^2}{1-q}.$$

Комбинируя это неравенство с (2.4), мы заключаем, что

$$E \exp\left(t(\xi^2 - 1)\right) \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}\frac{2}{1-q}t^2\right) \tag{2.5}$$

для $t \in [0, q/2]$.

Аналогично, рассматривая $t = -u$ для $u \in [-q/2, 0]$, получаем

$$\log E \exp\left(u(\xi^2 - 1)\right) = \log E \exp\left(t(1 - \xi^2)\right)$$

$$= t - \frac{1}{2}\log(1+2t) \leqslant t^2 < \frac{t^2}{1-q},$$

что завершает доказательство. □

В дальнейшем нам потребуется один результат В. В. Петрова (часть Теоремы 15 главы 5 в [6]), усиливающий неравенство С. Н. Бернштейна.

Лемма 2. *Пусть для независимых случайных величин* $\eta_1, \dots, \eta_m$ *существуют такие положительные константы* $g_1, \dots, g_m, T$, *что*

$$E \exp t(\eta_k) \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}g_k t^2\right) \quad (k = 1, \dots, m)$$

для $0 \leqslant t \leqslant T$. *Положим* $S = \sum_{k=1}^{m} \eta_k$ *и* $G = \sum_{k=1}^{m} g_k$. *Тогда*

$$P(S \geqslant x) \leqslant \exp\left(-x^2/(2G)\right)$$

при $0 \leqslant x \leqslant GT$.

Лемма 3. *Для любого $y > 0$ верно неравенство*

$$P\big(\big|{T_N}^{1/2}/N - 1\big| > y\big) \leqslant 2\exp\left(-\frac{N^2y^2}{4(1+y)}\right). \tag{2.6}$$

Доказательство. Пусть $q \in [0,1)$ – число, значение которого будет определено позже. Применим Лемму 2 к набору случайных величин $(\eta_k = \xi_k^2 - 1)_{k=1,\dots,N^2}$, где $(\xi_k)_{k=1,\dots,N^2}$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины. Для этого положим $m = N^2$, $S = T_N$ и $T = q/2$. Пусть $y \in [0, q/(1-q)]$ – вещественное число. По Лемме 1 мы можем положить $g_k = 2/(1-q)$ при $k = 1,\dots,N^2$. Тогда $G = 2N^2/(1-q)$. Наконец, положим $x = N^2y$ и заметим, что

$$x \leqslant N^2q/(1-q) = (2N^2/(1-q))(q/2) = GT.$$

Теперь по Лемме 2 получим

$$P(T_N - N^2 > N^2y) \leqslant \exp(-N^2y^2(1-q)/4)$$

и

$$P(T_N - N^2 < -N^2y) \leqslant \exp\left(-N^2y^2(1-q)/4\right).$$

Таким образом, мы установили следующее неравенство

$$P\left(\left|\frac{T_N}{N^2} - 1\right| > y\right) \leqslant 2\exp\left(-N^2y^2(1-q)/4\right). \tag{2.7}$$

Далее, выбирая в (2.7) $q = y/(1+y)$, мы видим, что

$$P\big(\big|T_N/N^2 - 1\big| > y\big) \leqslant 2\exp\left(-\frac{N^2y^2}{4(1+y)}\right)$$

или

$$P\big(\big\{{T_N}^{1/2}/N < \sqrt{(1-y)_+}\big\} \cup \big\{{T_N}^{1/2}/N > \sqrt{1+y}\big\}\big)$$
$$\leqslant 2\exp\left(-\frac{N^2y^2}{4(1+y)}\right).$$

Утверждение Леммы вытекает теперь из соотношений

$$P\big(\big|{T_N}^{1/2}/N - 1\big| > y\big)$$
$$= P\big(\big\{{T_N}^{1/2}/N < (1-y)_+\big\} \cup \big\{{T_N}^{1/2}/N > 1+y\big\}\big)$$

$$\leqslant P\big(\{{T_N}^{1/2}/N < \sqrt{(1-y)_+}\} \cup \{{T_N}^{1/2}/N > \sqrt{1+y}\}\big). \quad \square$$

Доказательство теоремы. Докажем утверждение (1.10). Напомним, что μ_N – это распределение случайной $N \times N$-матрицы X_N из GUE. Далее, пусть $X_N^\sigma = \sigma X_N$ – кратное X_N и пусть μ_N^σ – соответствующее распределение (так что $X_N = X_N^1$ и $\mu_n = \mu_N^1$). Обозначим через $\rho_{n,N}^{\mu,\sigma}$ и $\rho_{n,N}^{\nu,r}$ корреляционные меры распределений собственных чисел, соответствующих мерам μ_N^σ и ν_N^r на $\mathcal{H}_N$. Случайная матрица $X_N^{1/\sqrt{N}}$ распределена в соответствии с мерой $\mu_N^{1/\sqrt{N}}$, которая дезинтегрируется в виде

$$\mu_N^{1/\sqrt{N}} = E\nu_N^{\sqrt{T_N/N}}. \tag{2.8}$$

Соотношение (2.8) влечет аналогичное сотношение для корреляционных мер

$$\rho_{n,N}^{\mu,1/\sqrt{N}} = E\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{T_N/N}}. \tag{2.9}$$

Пусть f – непрерывная вещественная функция на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем, содержащимся в шаре B_R радиуса R с центром в 0, и пусть $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$. Зафиксируем $\epsilon > 0$. Поскольку функция f равномерно непрерывна, найдется такое $\delta' > 0$, что $|f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon$ при $|x-y| < \delta'$ (здесь $|\cdot|$ обозначает евклидову норму). Положим $\delta = \min(\delta'/(3R), 1/2)$ и пусть $\chi_{\delta,N}^{(1)}$ и $\chi_{\delta,N}^{(2)}$ – индикаторы событий $\{|\sqrt{T_N}/N - 1| > \delta\}$ и $\{|\sqrt{T_N}/N - 1| \leqslant \delta\}$, соответственно. Учитывая, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi)\rho_{n,N}^{\mu,1/\sqrt{N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n)$$

$$= E\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi)\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{T_N/N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n),$$

мы можем написать

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Nt_1/\pi, \dots, Nt_n/\pi)\rho_{n,N}^{\mu,1/\sqrt{N}}(dt_1 \times \dots \times dt_n)$$

$$= I_{1,N}^f(\delta) + I_{2,N}^f(\delta), \tag{2.10}$$

где

$$I^f_{1,N}(\delta) = E\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi^{(1)}_{\delta,N} f(Nt_1/\pi,\ldots,Nt_n/\pi)\rho^{\nu,\sqrt{T_N/N}}_{n,N}(dt_1\times\cdots\times dt_n) \tag{2.11}$$

и

$$I^f_{2,N}(\delta) = E\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi^{(2)}_{\delta,N} f(Nt_1/\pi,\ldots,Nt_n/\pi)\rho^{\nu,\sqrt{T_N/N}}_{n,N}(dt_1\times\cdots\times dt_n). \tag{2.12}$$

С учетом Леммы 3 для интеграла $I^f_{1,N}(\delta)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} I^f_{1,N}(\delta) &\leqslant M\frac{N!}{(N-n)!}P\{|\sqrt{T_N}/N-1|>\delta\} \\ &\leqslant 2M\frac{N!}{(N-n)!}\exp\left(-\frac{N^2\delta^2}{4(1+\delta)}\right), \end{aligned}$$

откуда

$$I^f_{1,N}(\delta) \underset{N\to\infty}{\to} 0. \tag{2.13}$$

Из соотношений (2.10), (2.13) и известного результата для GUE (содержащегося, например, в [4]) следует, что

$$I^f_{2,N}(\delta) \underset{N\to\infty}{\to} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t_1,\ldots,t_n)\det\left(\frac{\sin\pi(t_i-t_j)}{\pi(t_i-t_j)}\right)^n_{i.j=1} dt_1\cdots dt_n. \tag{2.14}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} I^f_{2,N}(\delta) &= E\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi^{(2)}_{\delta,N} f(Nt_1/\pi,\ldots,Nt_n/\pi)\rho^{\nu,\sqrt{T_N/N}}_{n,N}(dt_1\times\cdots\times dt_n) \\ &= P\{|\sqrt{T_N}/N-1|\leqslant\delta\}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Nt_1/\pi,\ldots,Nt_n/\pi)\rho^{\nu,\sqrt{N}}_{n,N}(dt_1\times\cdots\times dt_n) \\ &+E\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi^{(2)}_{\delta,N} f(Nt_1/\pi,\ldots,Nt_n/\pi)\rho^{\nu,\sqrt{T_N/N}}_{n,N}(dt_1\times\cdots\times dt_n) \\ &-\chi^{(2)}_{\delta,N}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Nt_1/\pi,\ldots,Nt_n/\pi)\rho^{\nu,\sqrt{N}}_{n,N}(dt_1\times\cdots\times dt_n)\Bigg), \end{aligned}$$

где $P(|\sqrt{T_N}/N-1|\leqslant\delta)\underset{n\to\infty}{\to}1$ по Лемме 3. Сравнивая полученные выражения с (2.14), мы видим, что заключение Теоремы справедливо, если имеет место соотноошение

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty}\left|E\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\chi_{\delta,N}^{(2)}f(Nt_1/\pi,\ldots,Nt_n/\pi)\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{T_N/N}}(dt_1\times\cdots\times dt_n)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\chi_{\delta,N}^{(2)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(Nt_1/\pi,\ldots,Nt_n/\pi)\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}(dt_1\times\cdots\times dt_n)\right)\right|=0.$$

Для проверки этого соотношения (и, следовательно, для завершения доказательства Теоремы) нам понадобится еще одна лемма. Напомним, что B_R – это шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центром в нуле.

Лемма 4. *Для любого $R>0$ последовательность*

$$(\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}(B_{R/N}))_{N=1.2,\ldots}$$

ограничена.

Доказательство. Пусть $\delta\in(0,1)$ – вещественное число и пусть γ – гладкая убывающая функция на $[0,\infty)$, такая что $\gamma(v)=1$ при $v\in[0,R)$ и $\gamma(v)=0$ при $v\geqslant(1+\delta)R$. Положим $\varphi(x)=\gamma(|x|)$ для $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Из (2.14) и определения $I_{2,N}^f(\delta)$ следует, что для любых $\delta\in(0,1)$ и $k>0$

$$\limsup_{N\to\infty}E\int\limits_{\mathbb{R}^n}\chi_{\delta,N}^{(2)}\varphi(kNt_1,\ldots,kNt_n)\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{T_N/N}}(dt_1\times\cdots\times dt_n)<\infty \tag{2.16}$$

Теперь, используя тот факт, что функция $\alpha\mapsto\varphi(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)$ убывает для любого $\alpha>0$, мы получаем, что

$$\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}(B_{R/N})\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^N}\varphi(Nt_1,\ldots,Nt_n)\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}(dt_1,\times\cdots\times dt_n)$$

$$\leqslant\frac{E\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{\delta,N}^{(2)}\varphi(\frac{\sqrt{T_N}}{N(1+\delta)}Nt_1,\ldots,\frac{\sqrt{T_N}}{N(1+\delta)}Nt_n)\rho_{n,N}^{\nu,\sqrt{N}}(dt_1\times\cdots\times dt_n)}{P(\{|\frac{\sqrt{T_N}}{N}-1|\leqslant\delta\})}$$

$$= \frac{E\int_{\mathbb{R}^n} \chi^{(2)}_{\delta,N}\varphi(Nt_1/(1+\delta),\dots,Nt_n/(1+\delta))\rho^{\nu,\sqrt{T_N/N}}_{n,N}(dt_1\times\cdots\times dt_n)}{P(\{|\sqrt{T_N}/N-1|\leqslant\delta\})}.$$

Числитель последней дроби ограничен по (2.16), тогда как по Лемме 3 знаменатель стремится к 1. □

Продолжим доказательство Теоремы. Учитывая, что f непрерывна и имеет компактный носитель, содержащийся в B_R, получаем, что для любого $\alpha\in[1-\delta,1+\delta]$ и $x\in\mathbb{R}^n$ выполнено

$$|f(\alpha Nx)-f(Nx)|\leqslant\epsilon. \tag{2.17}$$

Действительно, обе функции $f(N\cdot)$, $f(\alpha N\cdot)$ обращаются в нуль вне шара $B_{(1-\delta)^{-1}R/N}$. С другой стороны, если выполнено хотя бы одно из соотношений $f(x)\neq 0$ и $f(\alpha x)\neq 0$, то $|x|\leqslant(1+\delta)(1-\delta)^{-1}R$. В первом случае $f(\alpha x)=f(x)=0$, в то время как во втором случае $|\alpha x-x|=|1-\alpha||x|\leqslant\delta(1+\delta)(1-\delta)^{-1}R\leqslant 3\delta R<\delta'$. В итоге мы имеем

$$\begin{aligned}
&\Bigg|E\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\chi^{(2)}_{\delta,N}f(Nt_1/\pi,\dots,Nt_n/\pi)\rho^{\nu,\sqrt{T_N/N}}_{n,N}(dt_1\times\cdots\times dt_n)\\
&-\chi^{(2)}_{\delta,N}\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(Nt_1/\pi,\dots,Nt_n/\pi)\rho^{\nu,\sqrt{N}}_{n,N}(dt_1\times\cdots\times dt_n)\bigg)\Bigg| \qquad (2.19)\\
&\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}E\chi^{(2)}_{\delta,N}\big|f((\sqrt{T_N}/N)Nt_1/\pi,\dots,(\sqrt{T_N}/N)Nt_n/\pi)\\
&\quad -f(Nt_1/\pi,\dots,Nt_n/\pi)\big|\rho^{\nu,\sqrt{N}}_{n,N}(dt_1\times\cdots\times dt_n)\\
&\quad\leqslant\epsilon\rho^{\nu,\sqrt{N}}_{n,N}(B_{(1-\delta)^{-1}R/N})\leqslant\epsilon\ \rho^{\nu,\sqrt{N}}_{n,N}(B_{2R/N}).
\end{aligned}$$

В силу Леммы 4, этим устанавлено (2.15), что и завершает доказательство. □

Литература

1. G. Akemann, G. M. Cicuta, L. Molinari, and G. Vernizzi, *Compact support probability distributions in random matrix theory.* — Phys. Rev. E (3) **59**, No. 2, part A (1999), 489–1497.
2. G. Akemann and G. Vernizzi, *Macroscopic and microscopic (non-)universality of compact support random matrix theory.* — Nuclear Phys. B **583**, No. 3 (2000), 739–757.

3. F. Götze and M. Gordin, *Limit correlation functions for Hilbert-Schmidt random matrix ensembles.* — University of Bielefeld. SFB 701. Preprint 06-042 (2006).
4. K. Johansson K. *Universality of the local spacing distribution in certain ensembles of Hermitian Wigner matrices.* — Comm. Math. Phys. **215**, No. 3 (2001), 683–705.
5. M. L. Mehta, *Random matrices.* Academic Press Inc., Boston, MA (1991).
6. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М. (1972).
7. N. Rosenzweig, *Statistical mechanics of equally likely quantum systems.* In: Statistical physics (Brandeis Summer Institute, 1962, Vol. 3), 91–158, W. A. Benjamin, N. Y.(1963).
8. А. Б. Сошников, *Детерминантные точечные случайные поля.* — Успехи мат. наук **55**, No. 5(335) (2000), 107–160.
9. C. A. Tracy and H. Widom, *Correlation functions, cluster functions, and spacing distributions for random matrices.* — J. Statist. Phys. **92** No. 5–6 (1998), 809–835.

Götze F., Gordin M. I., Levina A. Limit correlation functions at zero for fixed trace random matrix ensembles.

The large-N limit of the eigenvalue correlation functions is examined in a neighborhood of zero for the spectra of $N \times N-$Hermitian matrices chosen at random from the Hilbert-Schmidt sphere of appropriate radius. Dyson's famous $\sin \pi(t_1 - t_2)/\pi(t_1 - t_2)$-kernel asymptotics is extended to this class of random matrix ensembles.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Germany

E-mail: goetze@mathematik.uni-bielefeld.de

Поступило 29 марта 2007 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: gordin@pdmi.ras.ru

Max Planck Insitut für Dynamik
und Selbstorganisation
Göttingen, Germany

E-mail: anna@chaos.gwdg.de