М. Л. Аграновский, Инвариантные алгебры функций на однородных пространствах полупростых групп Ли,
Матем. заметки, 1980, том 28, выпуск 5, 645–653

Обозначим через $\boldsymbol{H}$ преобразование Хариш — Чандры:

$$\boldsymbol{H}f = \rho^{1/2} S_Z f.$$

Оператор $\boldsymbol{H}$ отображает $L^1(X)$ в $L^1(H, \rho^{1/2}\,\mathrm{d}h)$ и сужение его на $L^1_K(X)$ является гомоморфизмом сверточных алгебр. Функции из $\boldsymbol{H}(L^1_K(X))$ симметричны относительно группы Вейля W.

ЛЕММА 1. $\boldsymbol{H}(j_G[L^1_K(X)]) \subset L^1(H)$.

Доказательство. Пусть $f \in j_G[L^1_K(X)]$. Поскольку $\boldsymbol{H}f \in L^1(H, \rho^{1/2}\,\mathrm{d}h)$, то достаточно установить включение $\boldsymbol{H}f \in L^1(H, \rho^{-1/2}\,\mathrm{d}h)$ или, что эквивалентно, $S_Z f \in L^1(H)$.

Предположим сначала, что $f \in L^1_K(X)$. Определим на G функцию $\tilde{f}(g) = f(g^{-1}x_0)$. Тогда $\tilde{f}$ постоянна на двусторонних классах смежности по подгруппе K и из компактности группы K и унимодулярности группы G следует, что $\tilde{f} \in L^1(G)$ (по мере Хаара $\mathrm{d}g$). Учитывая определение функции ρ и то, что H лежит в нормализаторе группы Z, запишем цепочку равенств:

$$\int_{Z\times H} |f(zhx_0)|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}h = \int_{H\times Z} |\tilde{f}(hz)|\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{Z\times H} |\tilde{f}(zh)|\,\rho(h)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}h = \int_G |\tilde{f}(g)|\,\mathrm{d}g,$$

из которой вытекает, что $S_Z f \in L^1(H)$.

Если же функция f есть сдвиг некоторой K-инвариантной функции, то включение $S_Z f \in L^1(H)$ следует из соотношения между операторами сдвига и S_Z:

$$S_Z l_g = \rho(h^{-1}) l_h S_Z l_k, \tag{3}$$

где $g = zhk$— разложение Ивасавы. Отметим также эквивалентную формулу

$$\boldsymbol{H} l_g = \rho^{-1/2}(h)\, l_h \boldsymbol{H} l_k. \tag{3'}$$

Пусть теперь A — ненулевая замкнутая подалгебра $C_0(X)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1.

ЛЕММА 2. *Пусть* $f \in A \cap L^1(X)$. *Допустим, что функция* $S_Z(|f|)$ *ограничена на* H. *Тогда для любой функции* $g \in A$ *функция* $h = (\gamma^* S_Z f)\cdot g$ *принадлежит* A.

Доказательство. Пусть $\{Z_n\}$ — компактное исчерпывание группы Z. Положим

$$f_n = \int_{Z_n} l_z f \, \mathrm{d}z.$$

Тогда $f_n \in A$ и, следовательно, $f_n g \in A$. Последовательность $f_n g$ поточечно сходится к h и равномерно ограничена. Последнее вытекает из неравенства

$$\| f_n g \|_{C_0(X)} \leqslant \| \gamma^* S_Z (|f|) \|_{C_0(X)} \cdot \| g \|_{C_0(X)}$$

и условия леммы. В силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости функция h аннулируется любой мерой из сопряженного к $C_0(X)$ пространства, принадлежащей аннулятору A. Так как $h \in C_0(X)$, то $h \in A$.

Положим $A^0 = \{f \in A \cap L^1(X)\colon\ S_Z(|f|) \in L^1(H)\}$. Пусть $f \in A^0$. Из $\boldsymbol{H} f \in L^1(H, \rho^{1/2}\mathrm{d}h)$ и $S_Z f \in L^1(H)$ следует $\boldsymbol{H} f \in L^1(H)$. Кроме того, из (3) и (3′) вытекает, что $\boldsymbol{H}(A^0)$ — инвариантное относительно сдвигов подпространство $L^1(H)$. Обозначим через A^H равномерное замыкание $C_0(H) \cap \boldsymbol{H}(A^0)$.

ЛЕММА 3. *Пусть $M(A^H)$— алгебра мультипликаторов A^H в $C_0(H)$. Тогда $M(A^H) \cap L^1(H) \neq \{0\}$.*

Доказательство. Найдется $f_1 \in A^0$ такая, что $S_Z f_1 \not\equiv 0$. Действительно, как показано в лемме 1, $A \cap L^1_K(X) \subset A^0$. Если $S_Z(A^0) = \{0\}$, то $\boldsymbol{H}(A \cap L^1_K(X)) = \{0\}$ и из формулы Хариш — Чандры (5), приведенной ниже, следовало бы $A \cap L^1_K(X) = \{0\}$, откуда в силу условий теоремы $A = \{0\}$, что противоречит предположению. Выберем непрерывную финитную функцию χ на H так, чтобы $(\rho^{-1}\chi) * S_Z f_1 \not\equiv 0$. Из (3) вытекает

$$S_Z(\chi * f_1) = (\rho^{-1}\chi) * S_Z f_1, \tag{4}$$

где $\chi * f_1 = \int_H \chi(h) l_h f_1 \, \mathrm{d}h$.

Положим $f = \chi * f_1$. Тогда в силу (4) $S_Z f \in C_0(H) \cap \cap L^1(H)$ и $S_Z(|f|)$ ограничена, поскольку

$$\| S_Z(|f|) \|_{C_0 H} \leqslant \| \rho^{-1}\chi \|_{C_0(H)} \cdot \| S_Z(|f_1|) \|_{L^1(H)}.$$

По лемме 2 $\gamma^* S_Z f$ — мультипликатор для A, тогда $S_Z f$ — мультипликатор для A^H.

Следствие. *Пусть $\sigma(A^H)$— спектр (в смысле обобщенного преобразования Фурье) пространства A^H.*

Существует подполугруппа P двойственной группы $\hat{H}$, обладающая непустой внутренностью и такая, что

$$\sigma(A^H) + P \subset \sigma(A^H).$$

Доказательство. Поскольку $M(A^H)$ инвариантная относительно сдвигов замкнутая подалгебра $C_0(H)$, то $P = \sigma(M(A^H))$— полугруппа в $\hat{H}$. Так как $M(A^H) \cap L^1(H) \neq \{0\}$, то $\operatorname{int} P \neq \emptyset$.

Рассмотрим преобразование Фурье на симметрическом пространстве X:

$$\hat{f}(\lambda) = \int_X f(x)\,\varphi_\lambda(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f \in L^1_K(X) \cap L^2_K(X).$$

Здесь λ принадлежит алгебре Ли $\mathfrak{H}$ группы H, φ_λ — K-сферические функции,

$$\varphi_\lambda(x) = \int_K e^{i\langle\lambda,\, \ln\gamma(gk)\rangle}\,\rho^{-1/2}(\gamma(gk))\,\mathrm{d}k, \qquad x = \pi(g).$$

В силу (2) преобразование Фурье на X связано с преобразованием Фурье на H следующим образом:

$$\hat{f}(\lambda) = \widehat{Hf}(\exp\lambda). \tag{5}$$

Функции $\hat{f}$ инвариантны относительно группы Вейля W. Преобразование Фурье продолжается до изометрии $L^2_K(X)$ и $L^2(\mathfrak{H}/W, \mathrm{d}\lambda)$, где $\mathrm{d}\lambda$ — мера Планшереля.

Обозначим через $L^2_{K,\xi}(X)$ — прообраз Фурье пространства $\chi_\xi L^2(\mathfrak{H}/W, \mathrm{d}\lambda)$, где χ_ξ — характеристическая функция измеримого множества $\xi \subset \mathfrak{H}/W$.

ЛЕММА 4. *Всякое замкнутое подпространство $E \subset L^2_K(X)$, инвариантное относительно сверток с функциями из $L^1_K(X)$, совпадает с $L^2_{K,\xi}(X)$ для некоторого $\xi \subset \mathfrak{H}/W$.*

Доказательство. Образ Фурье $\hat{E}$ выдерживает умножение на функции из $\widehat{L^1_K(X)}$. Вследствие плотности $\widehat{L^1(X)}$ в $L^\infty(\mathfrak{H}/W, \mathrm{d}\lambda)$ имеем $\hat{E} = \chi_\xi L^2(\mathfrak{H}/W, \mathrm{d}\lambda)$.

Следствие. *Пусть $p \in E$. Положим $p^*(x) = p(g^{-1}x_0)$, где $gx_0 = x$, $g \in G$ (определение корректно, так как p K-инвариантна). Тогда $p^* \in E$.*

Доказательство. Сферические функции на G положительно определены, поэтому $\varphi_\lambda(g^{-1}x_0) = \overline{\varphi_\lambda(gx_0)}$. Отсюда $\hat{p}^* = \bar{p}$, и требуемое следует из леммы 4.

ЛЕММА 5. *Пусть A_K^H — равномерное замыкание $C_0(H) \cap \cap j_H[\boldsymbol{H}(A \cap L_K^1(X))]$. Тогда спектры $\sigma(A_K^H)$ и $\sigma(A^H)$ совпадают.*

Доказательство. Из (3′) следует, что A_K^H совпадает с равномерным замыканием $\boldsymbol{H}$ (j_G $[A \cap L_K^1(X)]$). Так как по лемме 1 последнее содержится в A^H, то $A_K^H \subset A^H$ и $\sigma(A_K^H) \subset \sigma(A^H)$.

Допустим, что включение спектров строгое. Тогда найдется $f_0 \in A^0$ такая, что $\boldsymbol{H} f_0 \not\equiv 0$ и

$$\boldsymbol{H} f_0 * g = 0 \text{ для всех } g \in A_K^H. \tag{6}$$

Пусть $p \in A \cap L_K^1(X)$. Применяя следствие из леммы 4, получим $p^* \in A \cap L_K^1(X)$. Подставим в (6) $g = \boldsymbol{H} p^*$. Тогда, учитывая (3′) и полагая аргумент в свертке (6) равным единице e_H группы H, можно записать

$$\int_H (\boldsymbol{H} f_0)(h)\, \overline{\boldsymbol{H} p(h)}\, \mathrm{d}h =$$
$$= \int_H (\boldsymbol{H} f_0)(h)\, \rho^{1/2}(h)\, (\boldsymbol{H} l_h p^*)(e_H)\, \mathrm{d}h = 0. \tag{7}$$

В (7) вместо f_0 можно взять произвольный сдвиг $l_h f_0$, $h \in H$. Поэтому в силу (3′) равенство нулю интегралов в (7) не изменится, если заменить p на $l_g p$, $g \in G$. Используя это замечание и преобразуя левое выражение в (7) на основании формулы (2) в интеграл по X, получим

$$\int_X (\gamma^* S_Z f_0)\, \overline{l_g p}\, \mathrm{d}x = 0. \tag{8}$$

Взяв с самого начала вместо f_0 свертку $\chi * f_0$ с непрерывной финитной функцией на H, можно считать, как следует из (4), что $\gamma^* S_Z f_0$ ограничена на X. Поэтому, так как, согласно условию ii) теоремы 1, линейные комбинации функций $l_g p$ плотны в $A \cap L^1(X)$ в смысле L^1-нормы, в качестве второго сомножителя под интегралом в (8) можно подставить произвольную функцию $f \in A \cap L^1(X)$. Положив $f = f_0$, получим на основании (2)

$$\int_H |S_Z f|^2 \rho\, \mathrm{d}h = \int_X (\gamma^* S_Z f_0)\, \bar{f}_0\, \mathrm{d}x = 0.$$

Отсюда, поскольку $\rho > 0$, следует, что $S_Z f_0 = 0$, что противоречит выбору функции f_0.

ЛЕММА 6. *Пусть* $\widehat{\exp}\colon \hat{H} \to \hat{\mathfrak{H}} \cong \mathfrak{H}$ — *гомоморфизм групп характеров, двойственный к экспоненциальному отображению* $\exp\colon \mathfrak{H} \to H$. *Тогда* $\widehat{\exp}\ \sigma(A_K^H) = \mathfrak{H}$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathfrak{H}$ — линейно независимая система корней алгебры Ли группы G относительно подалгебры $\mathfrak{H}$. Группа Вейля W содержит отражения $\mathfrak{H}$ относительно гиперплоскостей $\Pi_i = \{\lambda \in \mathfrak{H}\colon \langle\lambda, \lambda_i\rangle = 0\}$. Множество $\widehat{\exp}\,\sigma(A_K^H)$ инвариантно относительно W и, с другой стороны, в силу леммы 5 и следствия из леммы 3 оно выдерживает сложение с некоторой открытой полугруппой S в $\mathfrak{H}$. Всякая открытая полугруппа в конечномерном пространстве $\mathfrak{H}$ содержит множество $a + V$, где $a \in \mathfrak{H}$, V — открытый конус в $\mathfrak{H}$. Поскольку векторы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ образуют базис в $\mathfrak{H}$, то

$$\sum\nolimits_{w \in W} w(V) = \mathfrak{H}.$$

Следующая цепочка включений завершает доказательство:

$$\mathfrak{H} = \sum\nolimits_{w \in W} w(a + V) + \widehat{\exp}\,\sigma(A_K^H) \subset$$
$$\subset \sum\nolimits_{w \in W} w(S) + \widehat{\exp}\,\sigma(A_K^H) \subset \widehat{\exp}\,\sigma(A_K^H) \subset \mathfrak{H}.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть E — замыкание $A \cap L_K^2(X)$ в $L^2(X)$. Тогда пространство E удовлетворяет условиям леммы 4 и, следовательно, $E = L_{K,\xi}^2(X)$ для некоторого $\xi \subset \mathfrak{H}/W$. Из определения пространства A_K^H следует, что объединение η носителей преобразований Фурье (на H) функций $Hf, f \in A \cap L_K^1(X)$, плотно в $\sigma(A_K^H)$. По лемме 6 множество $\widehat{\exp}\,\eta$ плотно в $\mathfrak{H}$. С другой стороны, в силу (5) фактор-множество $\widehat{\exp}\,\eta/W$ содержится в ξ, и, следовательно, ξ плотно в $\mathfrak{H}/W$.

Рассмотрим аннулятор $A^\perp$ алгебры A в сопряженном к $C_0(X)$ пространстве. Используя свертки мер с δ-последовательностью непрерывных функций на G с компактными носителями, нетрудно показать, что меры вида νdx, где $\nu \in L^1(X) \cap L^\infty(X)$, ν непрерывна, аннулирующие A, образуют слабо плотное подмножество пространства $A^\perp$.

Обозначим через S_K оператор проектирования пространства $L^2(X)$ на пространство $L_K^2(X)$, действующий по формуле

$$S_K f = \int_K l_k f \,\mathrm{d}k.$$

Пусть мера $\nu\,\mathrm{d}x \in A^{\perp}$ обладает указанными выше свойствами. Для произвольного $g \in G$ мера $(S_K l_g \nu)\,\mathrm{d}x \in A^{\perp}$, и поэтому $f * (S_K l_g \nu) = 0$ для любой функции $f \in A \cap L_K^2(X)$. Поскольку $S_K l_g \nu \in L^2(X)$, то это равенство выполняется и для всех $f \in E = L_{K,\xi}^2(X)$. Применяя преобразование Фурье, получим, что $\hat{f} \cdot (\widehat{S_K l_g \nu}) = 0$. Так как $S_K l_g \nu \in L^1(X)$, то функция $\widehat{S_K l_g \nu}$ непрерывна на $\mathfrak{H}/W$ и, поскольку ξ плотно в $\mathfrak{H}/W$, из последнего равенства следует, что $S_K l_g \nu = 0$. В таком случае $\nu(g^{-1}x_0) = (S_K l_g \nu)(x_0) = 0$ и в силу произвольности $g \in G$ получаем $\nu = 0$. Меры $\nu\,\mathrm{d}x$ слабо плотны в $A^{\perp}$, поэтому $A^{\perp} = \{0\}$ и, следовательно, $A = C_0(X)$. Теорема доказана.

2. Применим теорему 1 к описанию двусторонне инвариантных подалгебр алгебры $C_0(G)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A — замкнутая подалгебра алгебры $C_0(G)$, инвариантная относительно правых и левых сдвигов. Допустим, что подалгебра A^K всех функций из A, K-инвариантных справа, удовлетворяет условиям* i), ii) *теоремы* 1. *Тогда, если $A^K \neq \{0\}$, то $A = C_0(G/Z_1)$, где Z_1 — некоторая подгруппа центра группы G.*

K-инвариантными справа мы называем функции f, удовлетворяющие условию: $f(gk) = f(g)$ для любых $g \in G$, $k \in K$.

Доказательство. Предположим вначале, что алгебра A разделяет точки. Пусть $A_1 = A \oplus \mathbf{C}$ — результат присоединения единицы. Рассмотрим максимальное множество антисимметрии K_e (см. [3]) алгебры A_1, содержащее единицу группы G. В силу двусторонней инвариантности алгебры A множество K_e — нормальная подгруппа G. По теореме 1 $A^K = C_0(G/K)$, поэтому $K_e \subset K$. Алгебра Ли группы K не содержит ненулевых идеалов алгебры Ли группы G (см. [2, стр. 196]), следовательно, множество K_e дискретно. Так как G связна, то K_e содержится в центре $Z(G)$ группы G и K_e конечно. Алгебра A разделяет точки на K_e, поэтому $A|_{K_e} = C(K_e)$ и, значит, $K_e = \{e\}$. Все остальные максимальные множества антисимметрии получаются из K_e сдвигами. Итак, алгебра

A замкнута относительно комплексного сопряжения и по теореме Стона — Вейерштрасса $A = C_0(G)$.

В общем случае положим $Z_1 = \{g \in G: f(g) = f(e), f \in A\}$. Из равенства $A^K = C_0(G/K)$ вытекает, что $Z_1 \subset K$. Поскольку алгебра A инвариантна, то Z_1 — нормальный делитель G. Как и выше, отсюда следует включение $Z_1 \subset Z(G)$. Алгебра A, рассматриваемая как подалгебра $C_0(G/Z_1)$, разделяет точки и, согласно доказанному, $A = C_0(G/Z_1)$.

Институт автоматики
и электрометрии СО АН СССР

Поступило
8.XII.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W o l f J. A., Translation-invariant function algebras on compact groups, Pacif. J. of Math., 15, № 3 (1965), 1093—1098.
[2] Х е л г а с о н С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., «Мир», 1964.
[3] Г а м е л и н Т., Равномерные алгебры, М., «Мир», 1973.