Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, Инварианты и перестройки фронтов на плоскости,
Тр. МИАН, 1995, том 209, 14–64

https://www.mathnet.ru/tm1167

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.89
13 декабря 2025 г., 19:16:45

Труды Математического института РАН
1995, том 209

УДК 515.164.15

В.И. Арнольд

Инварианты и перестройки фронтов на плоскости

Введение

Стандартный подход теории особенностей к задаче топологической классификации каких-либо объектов состоит в следующем. Рассматривается функциональное пространство всех — вырожденных и невырожденных — объектов данного класса. Это пространство выбирается так, чтобы его топологические свойства были возможно проще (чаще всего оно стягиваемо). Вырожденные объекты образуют подмножество в этом пространстве, обычно являющееся гиперповерхностью, т.е. имеющее коразмерность один и делящее дополнительное пространство на области, состоящие из объектов одного топологического типа.

Классификация этих типов исследуется затем при помощи стратификации гиперповерхности вырожденных объектов по типам вырождения. А именно: инварианты строятся как индексы пересечения путей, ведущих из одного стандартного объекта во все остальные, с гиперповерхностью вырожденных объектов, коориентированной надлежащим образом в своих регулярных точках. Эти коориентации в регулярных точках должны быть согласованы вблизи точек более сильного вырождения, что и приводит к необходимости внимательного анализа иерархии особенностей и их примыканий.

В другой работе автора [1] этот подход был использован для исследования инвариантов иммерсий окружности на плоскость, т.е. отображений окружности на плоскость с нигде не обращающейся в нуль производной.

В настоящей работе часть полученных в работе [1] результатов переносится на фронты лежандровых кривых на плоскости, т.е. на коориентированные плоские кривые с точками возврата.

Один из основных инвариантов, получаемых при анализе индекса пересечения с гиперповерхностью особых объектов, оказывается в этом случае обобщенным С.Л. Табачниковым [2] инвариантом Беннекена [3]. Связь этого инварианта с инвариантами, дающимися индексом пересечения, приводит к новым формулам и для инвариантов иммерсий окружности на плоскость. В частности, для инварианта, названного в [1] странностью (St), получено в принципе явное выражение в виде сумм интегралов по кривой от стандартных дифференциальных форм.

© В.И. Арнольд, 1995

Первоначальной целью всех этих исследований было доказательство следующей гипотезы (все еще не доказанной): при перестройке окружности, кооориентированной внешними нормалями, в окружность, кооориентированную внутренними нормалями, при которой не допускаются самокасания с совпадением кооориентаций, происходит не менее четырех раз перестройка рождения или смерти пары точек возврата на фронте (на кооориентированной кривой).

Это — обобщение теоремы о четырех вершинах плоской кривой (согласно которой замкнутая выпуклая плоская кривая имеет не менее четырех точек экстремума кривизны). Перестраивающиеся фронты в теореме о четырех вершинах — эквидистанты данной кривой, кооориентированные нормалями к кривой.

Хотя сформулированная выше гипотеза и не доказана, в конце настоящей работы приведено другое обобщение теоремы о четырех вершинах, превращающее ее в теорему симплектической геометрии. Речь идет о лагранжевом коллапсе, аналогичном сигма-процессу: бесконечно вырожденное лагранжево отображение, каустика которого состоит из одной точки, приводится в общее положение, после чего каустика оказывается автоматически имеющей не менее четырех точек возврата [4].

Эта теорема доставляет информацию, например, об особенностях каустик на поверхностях, близких к сфере, скажем на эллипсоидах (эти особенности обнаружил уже Якоби). Рассмотрим все геодезические, выходящие из одной точки на поверхности. Точка пересечения бесконечно близких геодезических называется сопряженной точкой для исходной точки вдоль соответствующей геодезической. Все первые (вторые,...) сопряженные точки образуют кривую на поверхности — первую (вторую,...) каустику исходной точки.

Якоби доказал, что первая каустика на выпуклой поверхности всегда имеет особую точку. Из теоремы о лагранжевом коллапсе следует, что число этих особых точек на каждой каустике не менее четырех, если метрика не слишком далека от стандартной. По-видимому, последнее условие близости метрики к стандартной излишне, но это не доказано.

Теорема о лагранжевом коллапсе, несомненно, имеет интересные обобщения: уже для инфинитезимальных возмущений стандартного коллапса (соответствующего стандартной метрике на многомерной сфере) получаются своеобразные обобщения теории Штурма на многомерный случай (теорема о четырех точках возврата соответствует теореме Табачникова [5] о нулях комбинаций собственных функций оператора второго порядка на окружности). В частности, при замене окружности двумерной сферой должны получаться симплектические обобщения теоремы об омбилических точках на выпуклых поверхностях; в случае же большей размерности неизвестны даже гипотетические ответы. Интересна задача о распаде особенностей каустики большей размерности, чем точка: аналог сигма-процесса вдоль подмногообразия.

Хотя в настоящей работе указаны обобщения части результатов работы [1] на лежандровы кривые в контактном многообразии кооориентированных контактных элементов плоскости, другие результаты остались не перенесенными на лежандров случай. Это относится, в частности, к теории инварианта St, двойственного трой-

ным точкам плоской кривой, к теории инвариантов Васильева "длинных" (некомпактных) кривых, к теориям кобордизмов, к теории фронтов на сфере и к классификации кривых с небольшим числом особенностей или с экстремальными значениями инвариантов, имеющимся в работе [1].

Я надеюсь, что соответствующие теории будут построены и что это приблизит нас к доказательству (или опровержению) сформулированных выше и других гипотез симплектической и контактной топологии каустик и волновых фронтов.

1. Пространство лежандровых кривых

Контактный элемент на многообразии — это гиперплоскость (линейное подпространство коразмерности один) в его касательном пространстве в какой-либо точке.

Рассмотрим многообразие M^3 всех трансверсально ориентированных контактных элементов на плоскости. Его естественная контактная структура — это распределение касательных плоскостей, заданное условием: скорость движения точки приложения контактного элемента принадлежит этому элементу. Пространство $M = ST^*\mathbb{R}^2$ сферизованного кокасательного расслоения плоскости диффеоморфно полноторию, так как элемент в точке определяется одним углом.

Основным предметом нашего исследования будет пространство Ω лежандровых иммерсированных кривых в M^3, т.е. таких иммерсий окружности в M^3, что производная в каждой точке лежит в плоскости контактной структуры.

Многообразие контактных элементов (тривиально) расслоено над плоскостью (со слоем-окружностью всех направлений в данной точке), так что $M^3 \approx \mathbb{R}^2 \times S^1$. Многообразие направлений в плоскостях контактной структуры в M^3 образует над M^3 расслоение E^4 со слоем-окружностью (также тривиальное, так как мы рассматриваем *коориентированные* элементы: $E^4 \approx \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$). Обе тривиализации фиксированы.

Лежандрова иммерсия $L : S^1 \to M^3$ индуцирует отображение Гаусса $g_L : S^1 \to$ $\to E^4$, сопоставляющее каждой точке прообраза направление скорости в образе (мы считаем окружность-прообраз ориентированной).

Проекции $\pi_{1,2}$ пространства E^4 на обе окружности разложения $E^4 \approx \mathbb{R}^2 \times S^1_1 \times S^1_2$ определяют в композиции с отображением Гаусса отображения $S^1 \to S^1_i$. Мы зафиксируем ориентацию на исходной плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда обе окружности S^1_i (направлений в $\mathbb{R}^2$ и направлений в контактной плоскости) получают ориентации. Степени построенных отображений окружности-прообраза на эти две окружности являются (единственными) гомотопическими инвариантами лежандровой иммерсии.

Определение. Степень отображения $\pi_1 \circ g_L : S^1 \to S^1_1$ называется *индексом* (ind) лежандровой кривой L, удвоенная степень отображения $\pi_2 \circ g_L : S^1 \to S^1_2$ — *индексом Маслова* (μ) лежандровой кривой L.

Исследование пространства Ω лежандровых иммерсий сводится к изучению составляющих его пространств $\Omega_{i,\mu}$ лежандровых иммерсий с фиксированным индек-

сом и индексом Маслова. В действительности пространства $\Omega_{i,\mu}$ являются компонентами связности пространства лежандровых иммерсий. Каждая из этих компонент (по меньшей мере слабо) гомотопически эквивалентна тору $S_1^1 \times S_2^1$. Дело в том, что отображение Гаусса определяет (слабую) гомотопическую эквивалентность пространства Ω на пространство отображений окружности в E^4 и, следовательно, на пространство отображений окружности в $S_1^1 \times S_2^1$.

Этот результат Громова [6] является обобщением теоремы Смейла [7] об иммерсиях кривых и доказывается аналогичным образом. Главную роль играет следующее соображение, доказываемое явным построением: отображение из пространства лежандровых иммерсий отрезка с фиксированной начальной скоростью в пространство направлений скорости в конечной точке отрезка является расслоением в смысле Серра, т.е. обладает свойством поднятия гомотопий.

Упомянутое поднятие строится явным образом по заданному локальному шевелению концевой скорости лежандровой иммерсии (зависящей от нескольких параметров) при помощи локальных координат Дарбу в окрестности конечного элемента — совершенно так же, как в построении Смейла деформации иммерсии отрезка на плоскость, покрывающей заданную деформацию концевой скорости обычной иммерсии.

Пространство отображений окружности на тор, принадлежащих фиксированному гомотопическому классу (i, μ), стягивается на тор. Это видно из того, что на накрывающей тор плоскости все такие пути с фиксированным началом имеют один и тот же конец и стягиваются на кратчайший путь линейной интерполяцией. Так что отображение пространства $\Omega_{i,\mu}$ на тор, осуществляющее упомянутую гомотопическую эквивалентность, сопоставляет лежандровой иммерсии с данными индексами пару, состоящую из контактного элемента и направления касательной к лежандровой кривой в нем, соответствующих какой-либо раз навсегда выбранной точке иммерсируемой окружности и раз навсегда выбранному направлению выхода окружности из этой точки.

Для построения инвариантов в виде индексов пересечения с гиперповерхностями в пространстве лежандровых иммерсий было бы желательно иметь стягиваемое полностью (или хотя бы односвязное) многообразие кривых. В теории Смейла этого можно достигнуть, зафиксировав на отображаемой окружности одну точку и потребовав, чтобы направление скорости иммерсии в этой точке было всегда одним и тем же направлением в одной и той же точке плоскости.

В случае лежандровых кривых я не сумел достичь полного уничтожения гомологий пространства $\Omega_{i,\mu}$, но прием Смейла позволяет все же уничтожить одну из двух окружностей, составляющих при умножении тор.

Определение. Лежандрово отображение $S^1 \to M^3$ называется *отмеченным*, если фиксированная раз навсегда точка из S^1 отображается в фиксированный раз навсегда контактный элемент плоскости (например, в кориентированный положительным направлением оси y элемент оси x в начале координат).

Группа $G^3 \approx \mathbb{R}^2 \times S^1$ евклидовых движений на плоскости (на которой мы фиксируем ориентацию и метрику) действует на пространстве контактных коориентированных элементов плоскости $M^3 \approx \mathbb{R}^2 \times S^1$ без неподвижных точек и транзитивно. Она действует также на пространстве лежандровых иммерсий окружности. Каждая такая иммерсия однозначно представляется в виде образа отмеченной иммерсии под действием однозначно определенного элемента группы. Поэтому мы получаем разложения в прямое произведение

$$\Omega \approx \Omega^0 \times (\mathbb{R}^2 \times S^1), \qquad \Omega_{i,\mu} \approx \Omega^0_{i,\mu} \times (\mathbb{R}^2 \times S^1),$$

где Ω^0 — пространство отмеченных лежандровых иммерсий (с данными индексами для $\Omega^0_{i,\mu}$).

Все естественные классификационные задачи достаточно решать для отмеченных иммерсий, так как все естественные классы инвариантны относительно действия группы G. Поэтому далее мы рассматриваем отмеченные лежандровы иммерсии и работаем с пространством $\Omega^0_{i,\mu}$, имеющим (слабый) гомотопический тип окружности.

Отображение на окружность, осуществляющее эту гомотопическую эквивалентность, сопоставляет лежандровой иммерсии ее направление в отмеченной раз навсегда точке прообраза. Это направление касательного вектора к M^3 в отмеченной раз навсегда в M^3 точке принадлежит окружности направлений векторов плоскости контактной структуры в этой точке пространства M^3.

Эти направления, геометрически соответствующие кривизнам фронтов (фронт лежандровой кривой — это ее проекция из $M^3 = ST^*\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$), не вполне равноправны — среди них выделяются "вертикальные" направления, касательные к слою S^1 и соответствующие бесконечной кривизне фронтов. Это обстоятельство осложняет построение инвариантов как индексов пересечения, так как нам придется проверять когомологичность нулю построенного при помощи гиперповерхности особых иммерсий коцикла (равенство нулю индекса пересечения с одной замкнутой кривой из нетривиального класса гомологий в пространстве отмеченных лежандровых кривых).

2. Определения основных инвариантов St, $J^{\pm}$

В пространстве (обычных) иммерсий окружности на плоскость выделяется гиперповерхность особых иммерсий. Иммерсия общего положения не имеет других особенностей, кроме простейших двойных точек трансверсального самопересечения. Простейшие особенности иммерсий не общего положения — это тройные точки и точки простейшего (квадратичного) самокасания.

Множество иммерсий не общего положения образует в пространстве всех иммерсий гиперповерхность, называемую *дискриминантом*. Основные инварианты — это индексы пересечения с различными частями этого дискриминанта, а именно приращение инварианта St (называемого странностью) равно индексу пересечения

с частью дискриминанта, соответствующей иммерсиям с тройными точками, а приращения инвариантов $J^{\pm}$ — (удвоенному) индексу пересечения с частями дискриминанта, образованными иммерсиями с попутными (J^+) и с противопутными (J^-) касаниями, при которых скорости обеих ветвей в точке касания направлены одинаково (J^+) или противоположно (J^-).

Чтобы сделать это определение точным, надо еще перечислить компоненты связности пространства иммерсий, указать коориентации и значения инвариантов на одной кривой каждой компоненты. При этом нужно проверить когомологичность коцикла нулю.

Единственным инвариантом, нумерующим компоненты связности пространства иммерсий ориентированной окружности на ориентированную плоскость, является индекс (число оборотов касательного вектора). Эта теорема Уитни [8] вытекает, в частности, из расслоения Серра, изученного Смейлом [7].

Это же расслоение доставляет нам стягиваемость (слабую гомотопическую эквивалентность точке) пространства отмеченных иммерсий фиксированного индекса. Поэтому о когомологичности коциклов нулю можно не заботиться, если ограничиваться отмеченными иммерсиями (что совершенно достаточно для построения инвариантов).

Коориентации выбираются следующим образом (это единственная возможность, совместная с несколькими простыми аксиомами, перечисленными в работе [1], и диктуемая в основном условием согласования коориентаций в особых точках, образующих на дискриминанте гиперповерхность коразмерности один в нем и соответствующих прохождению одной ветви иммерсированной кривой через точку касания двух других ветвей).

Случай $\mathbf{J^{\pm}}$. Положительной считается та сторона дискриминанта попутных касаний, где число двойных точек больше.

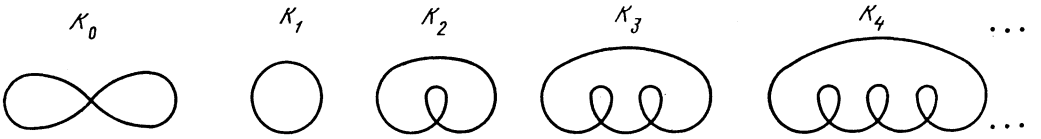
Случай St. Положительной считается та сторона дискриминанта тройных точек, где образованный тремя почти пересекающимися ветвями треугольник положителен.

Знак треугольника определяется циклическим порядком прохождения его трех сторон при обходе кривой и их направлениями. Циклический порядок определяет ориентацию треугольника. Каждая сторона получает знак ("+", если она направлена *против* ориентации, и "−", — если *по*). Знак треугольника — это произведение знаков его сторон.

О п р е д е л е н и е. Основные инварианты St, J^+ и J^- иммерсий окружности на плоскость определяются условиями:

1) При пересечениях частей дискриминанта в положительном направлении эти инварианты испытывают следующие скачки:

	Тройные точки	Попутные касания	Противопутные касания
St	1	0	0
J^+	0	2	0
J^-	0	0	−2



Р и с. 1. Простейшие кривые

2) Значения основных инвариантов на простейших кривых K_i индекса $\pm i$ (изображенных на рис. 1) с любой ориентацией даются нижеприведенной таблицей:

	K_0	K_1	K_2	K_3	K_4	...
St	0	0	1	2	3	...
J^+	0	0	-2	-4	-6	...
J^-	-1	0	-3	-6	-9	...

З а м е ч а н и е. Значения так определенных основных инвариантов не зависят ни от ориентации кривой, ни от ориентации плоскости. Они аддитивны при связном суммировании кривых (например, $K_2 + K_2 \sim K_3$). Эти условия вместе с "локальностью" коориентации, определяют инварианты однозначно с точностью до мультипликативных констант, определяемых величинами скачков при пересечении стратов дискриминанта. Выбор значений 2 и -2 для скачков $J^{\pm}$ (инвариант меняется так же, как число двойных точек, при пересечении попутного касания для J^+ и противоположно изменению числа двойных точек при пересечении противопутного касания для J^-) удобен по причинам, обсуждаемым ниже (для лежандровых кривых). Разность $J^+ - J^- = n$ — всегда число двойных точек кривой.

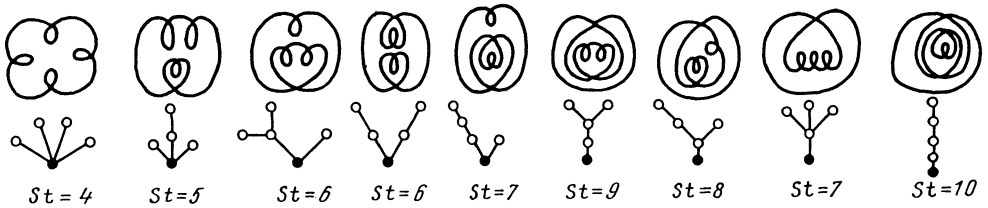
П р и м е р. Значения основных инвариантов для всех пяти кривых с двумя точками самопересечения указаны на рис. 2.

	$i = 1$	$i = 1$	$i = 1$	$i = 3$	$i = 3$
St	0	0	1	2	3
J^+	0	0	-2	-4	-6
J^-	-2	-2	-4	-6	-8

Р и с. 2. Инварианты кривых с двумя двойными точками

П р и м е р. Кривая называется *древовидной*, если каждая двойная точка делит ее на две не пересекающиеся более друг с другом петли. Все кривые рис. 1 и рис. 2 древовидны. Ф. Аикарди [9] доказала, что $\mathrm{St} + 2J^+ = 0$ для всех древовидных кривых.

П р и м е р. Кривая называется *экстремальной*, если ее индекс на 1 больше числа n двойных точек (больше он быть не может по теореме Уитни [8]). Экстремальные кривые классифицируются плоскими корневыми деревьями с n ребрами. Инвариант St такой кривой равен [1] сумме расстояний от вершин до корня (рис. 3). Все экстремальные кривые древовидны.



Р и с. 3. Экстремальные кривые с $n = 4$

П р и м е р. Первая и последняя кривые рис. 3 лежат в одной компоненте пространства иммерсий. Поэтому между ними существует путь общего положения.

Из указанных на рисунке значений St следует, что на таком пути не менее шести раз встретятся тройные точки.

Числа как попутных, так и противопутных касаний на любом таком пути также не меньше шести (так как значения J^+ равны -8 и -20, а J^- соответственно -12 и -24).

Таким образом, вычисления значений инвариантов для конкретных кривых доставляют нетривиальную информацию о перестройках, происходящих при переходе от одной кривой к другой. Но для этого нужно знать значения инвариантов.

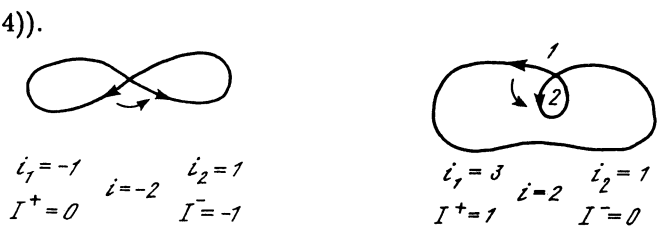
П р и м е р. Вот один результат из работы [1], который мы используем ниже с целью вычисления St:

$$J^{\pm} = I^{\pm} - 3\mathrm{St}\,,$$

где инварианты $I^{\pm}$ определены следующим образом. Выберем метрику так, что ветви в точках самопересечения ортогональны.

О п р е д е л е н и е. ***Полуиндексом петли*** кривой, начинающейся и кончающейся в двойной точке, называется поделенный на $\pi/2$ угол поворота радиус-вектора, соединяющего двойную точку с точкой, пробегающей петлю (мы фиксировали ориентации кривой и плоскости).

Индексом двойной точки называется разность между полуиндексами выходящих из нее петель (с плюсом берется полуиндекс такой петли, что репер, образованный направлениями выхода этой и второй петли, ориентирует плоскость положительно (рис. 4)).



Р и с. 4. Полуиндексы петель и индексы двойных точек

З а м е ч а н и е. В отличие от полуиндексов индексы двойных точек не зависят ни от ориентации кривой, ни от ориентации плоскости.

О п р е д е л е н и е. Инварианты $I^{\pm}$ определяются суммированием индексов всех n двойных точек, а именно $I^{\pm} = \sum(i \pm 2)/4$.

3. Особенности дискриминанта фронтов лежандровых кривых

Строго говоря, дискриминантом в пространстве отмеченных лежандровых кривых следовало бы называть гиперповерхность, включающую как те кривые, которые имеют особенности не общего положения, так и те, для которых отмеченная точка попадает в особую точку фронта. Здесь я, однако, называю дискриминантом только первую гиперповерхность. Она разбита на орбиты группы диффеоморфизмов окружности-прообраза, естественно действующей без неподвижных точек на пространстве лежандровых иммерсий окружности.

З а м е ч а н и е. К сожалению, действие диффеоморфизма окружности на пространстве отмеченных лежандровых иммерсий (рассматриваемом как пространство орбит группы движений плоскости на пространстве всех лежандровых иммерсий) имеет (редкие) неподвижные точки. Присутствие этих неподвижных точек, хотя и образующих множество бесконечной коразмерности, мешает формально перейти к фактору по действию группы диффеоморфизмов окружности и исключить остающуюся в пространстве отмеченных лежандровых иммерсий неодносвязность (множитель S^1_2 в обозначениях разд. 1). Так что я буду строить инварианты как индексы пересечения путей с гиперповерхностями в неодносвязном пространстве отмеченных кривых, составленными из стратов дискриминанта особых фронтов.

Фронт лежандровой кривой общего положения имеет особенности лишь двух стандартных типов: точки трансверсального самопересечения и полукубические острия (точки возврата). Стандартная теория лежандровых особенностей (см., например, [10]) доставляет следующий список особенностей коразмерности 1 и 2 (соответствующих общим точкам дискриминанта и гиперповерхности коразмерности один на нем).

Т е о р е м а. *Лежандровы кривые с фронтами не общего положения исчерпываются следующим списком.*

Страты коразмерности 1 (*рис.* 5) :

1) *тройная точка фронта с разделенными касательными* (*страт* T);

2) *точка квадратичного самокасания фронта* (*страт* K);

3) *точка прохождения другой ветви фронта через острие фронта* (*страт* Π); *здесь предполагается, что касательные обеих ветвей в острие различны*;

4) *точка с особенностью степени* 4/3 (*страт* $Л$); *это точка рождения двух точек возврата, соответствующая вершине ласточкиного хвоста на большом фронте.*

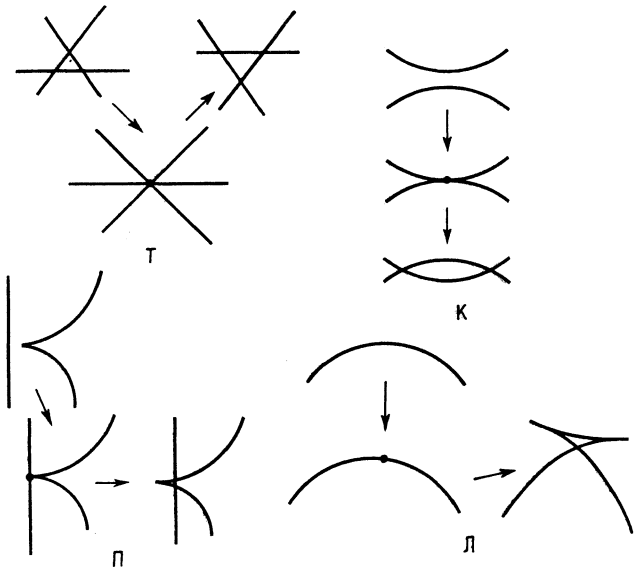
Страты коразмерности 2 (*рис.* 6) :

1) *четверная точка фронта с разделенными касательными* (*страт* TT);

2) *вырожденная тройная точка фронта* (*страт* KT); *две ветви квадратично касаются, а третья им трансверсальна*;

3) *точка кубического самокасания фронта* (*страт* KK);

4) *точка касательного прохождения другой ветви фронта через его острие* (*страт* $K\Pi$);



Р и с. 5. Особенности и перестройки фронтов коразмерности один

5) *точка прохождения двух других ветвей фронта через его острие (страт ТП); здесь предполагается, что касательные всех трех ветвей в острие различны;*

6) *точка совпадения двух остриев (страт ПП); здесь предполагается, что касательные обеих ветвей в острие различны;*

7) *точка трансверсального прохождения другой ветви фронта через точку степени* 4/3 *(страт ПЛ);*

8) *точка степени* 5/4 *(страт ЛЛ).*

Кроме того, коразмерность 2 *имеют страты трансверсального взаимного (в том числе само-) пересечения стратов коразмерности* 1, *соответствующие фронтам с двумя особыми точками не общего положения.*

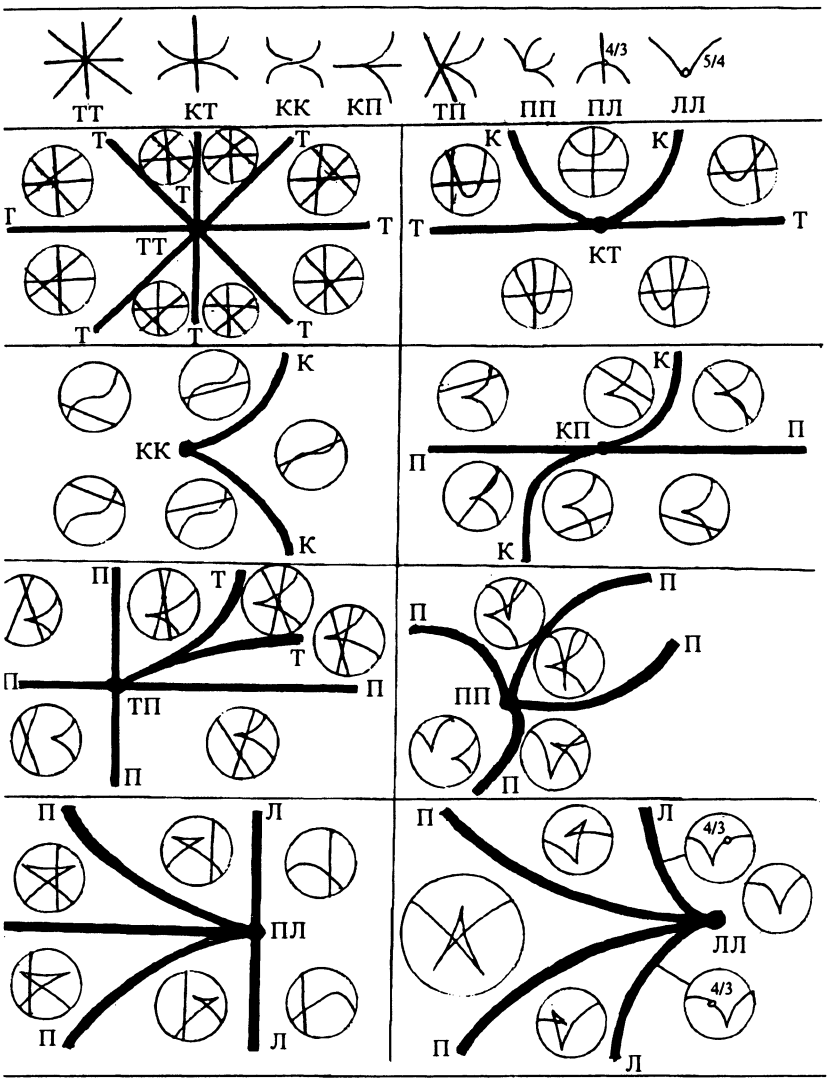
Дополнение к множеству лежандровых иммерсий с особенностями фронтов перечисленных выше типов имеет коразмерность 3 *в пространстве лежандровых иммерсий и коразмерность* 2 *в дискриминанте, образованном всеми иммерсиями с фронтами не общего положения.*

Все перечисленные результаты справедливы как в пространстве всех лежандровых иммерсий, так и в пространстве отмеченных лежандровых иммерсий.

З а м е ч а н и е. Из рис. 6 видно, что каждая из частей дискриминанта, получающаяся замыканием страта K, $П$ или $Л$ коразмерности 1, определяет коцикл по модулю 2; в то же время замыкание страта тройных точек, T, такого коцикла не определяет, так как линия T на бифуркационной диаграмме $ПЛ$ имеет край (заканчивается в $TЛ$).

4. Кооориентация гиперповерхности самокасаний

Далее изучается замыкание одного страта коразмерности 1 — страта опасных самокасаний K^+. Самокасание называется *опасным*, если кооориентации касающих-



Р и с. 6. Особенности и бифуркационные диаграммы фронтов в точках коразмерности два

ся ветвей совпадают. Замыкание гиперповерхности опасных касаний определяет коцикл по модулю 2 (как и для безопасных касаний).

Т е о р е м а. *Гиперповерхность, образованная замыканием страта опасных самокасаний в пространстве лежандровых кривых (или в пространстве отмеченных лежандровых кривых) коориентируема. А именно: коориентация задается следующей конструкцией. Назовем самокасание положительным, если пары (ориентация*

фронта, коориентация фронта) для обеих ветвей задают одинаковую ориентацию плоскости (для опасных касаний это условие означает, что касание попутное, т.е. ориентации ветвей в точке касания одинаковы).

Положительной стороной гиперповерхности опасных самокасаний считается та сторона, где лежат фронты с большим числом двойных точек, если самокасание положительное, и с меньшим, если оно отрицательное.

Доказательство. Достаточно снабдить ориентациями и коориентациями фронты, изображенные на рис. 6, так как вдоль страта опасных самокасаний K^+ коориентация определена корректно, и надо только проверить согласование коориентаций ветвей K^+ бифуркационных диаграмм стратов KT, KK и $K\Pi$ на рис. 6, где сходятся две кривые типа K.

В случае KT согласование очевидно, так как дополнительная ветвь, проходящая через точку самокасания, не меняет ни ориентаций, ни коориентаций и одинаково влияет на число двойных точек по обе стороны от особенности KT.

В случае KK ориентации и коориентации также непрерывно продолжаются в особую точку кубического касания, а число двойных точек на 2 больше по ту сторону бифуркационной диаграммы, которая занимает вблизи KK меньшую часть плоскости, так что коориентация согласована.

В случае $K\Pi$ число двойных точек на 2 больше в двух меньших областях (верхней правой и нижней левой на рис. 6). Эти области лежат по разные стороны от кривой (кубической параболы) K–$K\Pi$–K. Обе части этой кривой соответствуют опасному касанию (если коориентации обеих ветвей фронта в точке $K\Pi$ совпадают) или обе — безопасному (если эти коориентации противоположны).

Знак же касания при переходе через точку $K\Pi$ вдоль кривой K–$K\Pi$–K меняется. Действительно, вектор ориентации фронта скачком меняет направление на противоположное при прохождении точки возврата, а вектор коориентации непрерывен. Поэтому ориентация плоскости парой (ориентация фронта, коориентация фронта) меняется при прохождении точки возврата фронта. Точка самокасания фронта при движении вдоль кривой K–$K\Pi$–K переходит в точке $K\Pi$ с одной стороны точки возврата особой ветви фронта на другую. Поэтому ориентация плоскости, определенная особой ветвью фронта в точке касания, меняется при прохождении точки $K\Pi$ на кривой K–$K\Pi$–K. Ориентация же, определенная неособой ветвью, не меняется, так как и ориентирующий, и коориентирующий фронт векторы непрерывны в точке $K\Pi$.

Итак, заданная условием теоремы коориентация страта K^+ (в отличие от коориентации, заданной числом двойных точек фронта) согласована на всех стратах коразмерности один на дискриминанте K^+, и теорема доказана (согласованность на трансверсальных пересечениях с другими ветвями дискриминанта, соответствующих фронтам с двумя особыми точками не общего положения, очевидна).

Замечание 1. Аналогичным образом можно коориентировать и страт K^-.

Замечание 2. Из проведенных рассуждений видно, что наша коориентация, с точностью до полного изменения знака во всех точках сразу, является единственной локально определенной, согласованной коориентацией страта K^+ опасных

самокасаний (кооориентация дискриминанта в точке самокасания называется *локально определенной*, если она не меняется при изменениях лежандровой иммерсии вне окрестностей тех точек, которые эта иммерсия отправила в данный конкретный элемент плоскости).

Однако она не является единственно возможной согласованной кооориентацией гиперповерхности опасных касаний K^+. Действительно, эта гиперповерхность не является неприводимой и знак кооориентации на каждой неприводимой компоненте можно произвольно изменить.

Приводимость гиперповерхности опасных самокасаний K^+ (а также и замыкания страта безопасных самокасаний K^-) следует из непрерывности числа оборотов кооориентирующего фронт вектора при обходе петли фронта от одного посещения точки самокасания до другого. Это число оборотов (целое для опасных, полуцелое для безопасных касаний) непрерывно при движении вдоль страта самокасаний (предполагается, что при прохождении через трансверсальное пересечение с другой ветвью страта самокасаний мы продолжаем двигаться по своей ветви).

Получающееся представление индекса лежандровой иммерсии в виде суммы двух (неупорядоченных) слагаемых является инвариантом, различающим "компоненты" гиперповерхности K^+ (соответственно K^-). Однако неясно, неприводимы ли эти "компоненты".

В теории обычных (не лежандровых) иммерсий заданные разбиением индекса компоненты уже неприводимы, так как все кривые — петли с одной точкой попутного самокасания и с данным индексом — деформируются друг в друга регулярной гомотопией (это следует из теоремы Уитни). В случае фронтов кроме индекса имеется еще индекс Маслова и следовало бы проверить, не остается ли от него следов в классификации фронтов-петель с одной точкой (скажем, опасного) самокасания с фиксированным индексом.

З а м е ч а н и е 3. Выбранная выше кооориентация страта опасных касаний не меняется ни при изменении ориентации кривой, ни при изменении ориентации плоскости.

5. Нестягиваемые пути в пространстве отмеченных иммерсий

Далее доказывается, что индекс пересечения замкнутого пути в пространстве отмеченных лежандровых иммерсий с кооориентированной в разд. 4 гиперповерхностью опасных столкновений всегда равен нулю.

Для доказательства достаточно вычислить это индекс для одного нестягиваемого пути в каждой компоненте пространства отмеченных лежандровых иммерсий. Чтобы построить такой путь, мы должны построить однопараметрическое семейство фронтов, начинающееся и кончающееся одним фронтом с данными индексом и индексом Маслова, причем раз навсегда выбранной точке отображаемой окружности во всех членах семейства соответствует один и тот же контактный элемент плоскости.

Направление же лежандровой кривой семейства в контактной плоскости, касающейся M^3 в этом элементе, должно совершить при изменении параметра семейства

ненулевое число оборотов. Для подсчета числа оборотов удобно воспользоваться следующей конструкцией. Рассмотрим в пространстве отмеченных лежандровых иммерсий гиперповерхность, являющуюся замыканием страта, образованного теми иммерсиями, для которых отмеченная точка является точкой возврата фронта.

Теорема. *Указанное замыкание определяет одномерный коцикл по модулю 2, который превращается в целочисленный коцикл, если снабдить страт следующей коориентацией (являющейся согласованной в точках гиперповерхности особенностей на замыкании страта): отмеченная кривая считается положительной, если центр кривизны фронта в отмеченной точке лежит в направлении, указанном коориентацией фронта.*

Индекс пересечения замкнутой кривой общего положения в пространстве отмеченных кривых с коориентированным таким образом стратом лежандровых иммерсий с отмеченной точкой возврата равен произведению числа -2 на число оборотов вектора скорости иммерсии в отмеченной точке вокруг начала координат плоскости контактной структуры, снабженной ее естественной ориентацией.

Замечание. Контактная структура на пространстве M^3 коориентированных контактных элементов плоскости имеет естественную коориентацию, т.е. задающая ее дифференциальная 1-форма α на M^3 определена с точность до *положительного* сомножителя. Действительно, если x и y — декартовы координаты на плоскости (с фиксированной евклидовой метрикой), а ξ, η — компоненты коориентирующей контактный элемент нормали, то $\alpha = \xi dx + \eta dy$. Поэтому знак α определяется направлением коориентирующей контактный элемент нормали к нему и не зависит от ориентации плоскости (x, y). Дифференциальная форма $d\alpha$, ограниченная на контактную плоскость $\alpha = 0$, задает ее ориентацию, не зависящую, следовательно, от выбора ориентации плоскости (x, y).

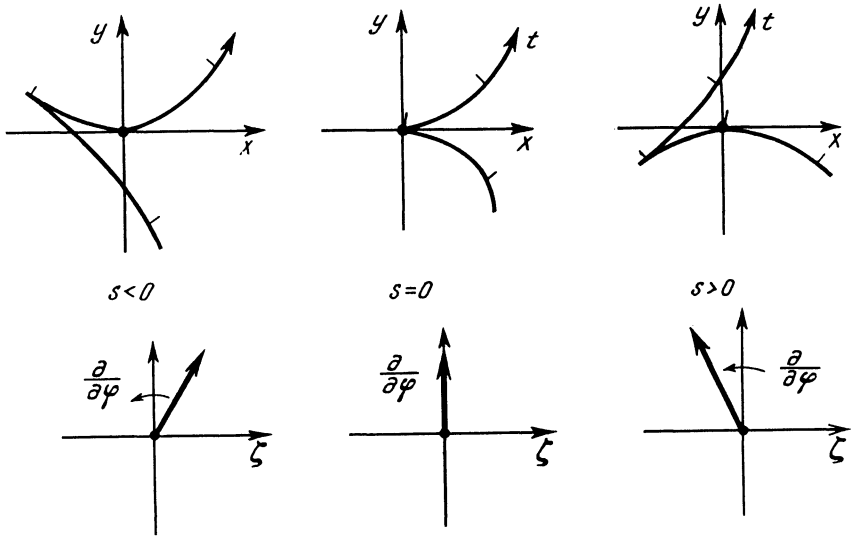
Если все же выбрать эту ориентацию, то контактные коориентированные элементы можно задавать числами $(x, y, \varphi \bmod 2\pi)$, где $(\xi = \cos\varphi, \eta = \sin\varphi)$ — коориентирующая нормаль. В этих координатах $\alpha = \cos\varphi dx + \sin\varphi dy$. Контактная плоскость порождена векторами $\partial/\partial\varphi$ и $\zeta = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} - \cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}$. Ее естественная коориентация задается репером $(\zeta, \partial/\partial\varphi)$, так как $d\alpha(\zeta, \partial/\partial\varphi) = 1$.

Это замечание позволяет явно вычислять направление вращения вектора скорости отмеченной лежандровой иммерсии в отмеченной точке.

Пример. Рассмотрим семейство лежандровых иммерсий, локально заданных формулами $x = t^2 - 2ts$, $y = t^3 - \frac{3}{2}t^2 s$, где t — параметр на кривой вблизи отмеченной точки $t = 0$, а s — параметр семейства (близкий к 0).

Соответствующие фронты, коориентированные положительным направлением оси y в отмеченной точке, изображены на рис. 7 вместе с соответствующими различным значениям параметра s скоростями на контактной плоскости в точке ($x = 0$, $y = 0$, $\varphi = \pi/2$).

Мы видим, что в момент прохождения отмеченной точкой точки возврата фронта вектор скорости лежандровой иммерсии в отмеченной точке проходит через вертикальное направление $(\partial/\partial\varphi)$ в контактной плоскости. Вращение положительно



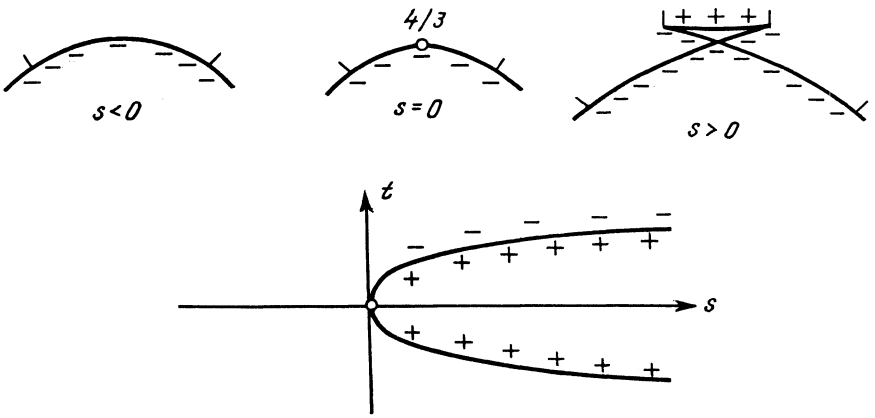
Р и с. 7. Вращение вектора скорости лежандровой отмеченной иммерсии при прохождении отмеченной точки возврата

(от ζ к $\partial/\partial\varphi$), если отмеченная точка переходит при этом с той части фронта, где направление на центр кривизны совпадает с коориентирующим направлением, на ту часть, где эти направления в отмеченной точке противоположны. Этот вывод сохраняется при изменении направления обхода фронта (так как при этом вектор скорости поворачивается на 180°) и при изменении ориентации плоскости (x, y) (от которой ориентация контактной плоскости не зависит).

Доказательство теоремы. Первая часть теоремы проверяется анализом простейших особенностей замыкания страта иммерсий с отмеченными точками возврата. Кроме трансверсальных пересечений с другими ветвями (где доказываемое очевидно), имеется только одна особенность коразмерности один на замыкании страта — она соответствует отмеченной точке типа *Л* (степени 4/3 на фронте). В однопараметрических семействах лежандровых иммерсий общего положения такая особенность встречается при отдельных значениях параметра семейства как особенность рождения пары точек возврата на фронте.

Согласование коориентаций вблизи страта отмеченных точек типа 4/3 проверяется непосредственным рассмотрением версальной деформации (рис. 8), $x = t^3 - 3st$, $y = t^4 - 2st$.

Замечание. В действительности наши построения доставляют также коориентацию гиперповерхности, образованной иммерсиями с отмеченной точкой возврата в пространстве лежандровых иммерсий с отмеченной точкой, для которых контактный элемент в отмеченной точке может быть любым элементом из M^3, да и отмеченная точка на отображаемой окружности может, если угодно, быть переменной. Дело в том, что все наши построения инвариантны относительно группы движений плоскости (и относительно вращений окружности-прообраза). Это обсто-



Р и с. 8. Согласованность коориентаций страта отмеченных точек возврата

ятельство использовано на рис. 8, где согласованность проверяется именно в таком пространстве с переменными исходной отмеченной точкой t и контактным элементом в ней.

Согласованность коориентаций в исходном пространстве отмеченных иммерсий следует из их согласованности в этом большем пространстве, так как к исходному пространству можно вернуться при помощи зависящих от параметров вращений окружности-прообраза и движений плоскости.

Вторая часть теоремы следует теперь из того, что репер $(\zeta, \partial/\partial\varphi)$ параллелизует поле контактных плоскостей.

Определяемое этой параллелизацией отображение пространства E^4 направлений в контактных плоскостях M^3 на окружность плоскости с базисом $(\zeta, \partial/\partial\varphi)$ — это по определению то самое отображение $\pi_2 : E^4 \to S^1_2$, которое использовалось в разд. 1 для определения индекса Маслова и которое индуцирует (слабую) гомотопическую эквивалентность пространства отмеченных лежандровых иммерсий $\Omega^0_{i,\mu}$ с данными индексами на окружность S^1_2 направлений плоскости $(\zeta, \partial/\partial\varphi)$.

Число оборотов касательного вектора лежандровой иммерсии в отмеченной точке — равное степени отображения окружности значений параметра семейства иммерсий на окружность S^1_2 — можно сосчитать как половину числа прохождений касательным вектором вертикального направления $(\pm\partial/\partial\varphi)$ с учетом знаков (прохождение положительно, если отмеченная точка переходит с положительной стороны страта на отрицательную, как на рис. 8). Тем самым доказана вторая часть теоремы: коэффициент 2 объясняется тем, что наряду с пересечениями положительной полуоси вертикального направления при подсчете прохождений точек возврата учитываются и пересечения отрицательной полуоси, а знак минус — тем, что, как видно из рис. 8, положительное вращение в контактной плоскости соответствует переходу отмеченной точки с положительной стороны страта отмеченных точек возврата на отрицательную.

З а м е ч а н и е. Одновременно мы получили способ сосчитать число оборотов образа иммерсии окружности с отмеченной на ней точкой при отображении на S^1_2, когда эта лежандрова иммерсия зависит от параметра, пробегающего окружность. Это число оборотов равно половине числа прохождений отмеченной точки через точки возврата с описанным в теореме правилом знаков (для семейств общего положения).

П р и м е р. Зафиксируем лежандрову иммерсию окружности с отмеченной точкой (общего положения). Построим по этому отображению однопараметрическое семейство отмеченных иммерсий, параметризованное точками той же самой окружности-прообраза S^1 (просто произвольно меняя отмеченную точку). Из доказанного выше вытекает

Т е о р е м а. *Степень отображения $S^1 \to S^1_2$, заданного тривиализацией расслоения $E^4 \to M^3$, равна половине индекса Маслова исходного (ориентированного) фронта.*

З а м е ч а н и е. Индекс этот равен, по определению [10], разности между числом попутных и противопутных точек возврата фронта (точка попутная, если коориентирующий вектор указывает направление от входящей в точку возврата ветви к выходящей; так что точка возврата рис. 7 попутная). В попутных точках вращение положительно, в противопутных — отрицательно.

6. Вычисление периода коцикла опасных самокасаний

Здесь доказывается следующая

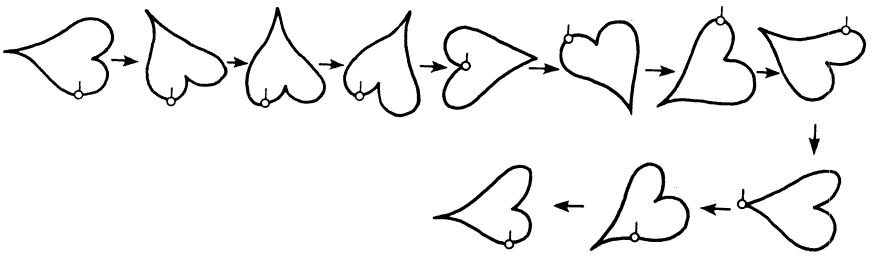
Т е о р е м а. *Индекс пересечения замкнутого пути общего положения в пространстве отмеченных лежандровых иммерсий окружности со стратом опасных самокасаний, коориентированным, как указано в разд. 4, равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку каждая компонента связности пространства отмеченных иммерсий (слабо) гомотопически эквивалентна окружности, достаточно проверить утверждение для одного нестягиваемого пути в каждой компоненте $\Omega^0_{i,\mu}$ иммерсий индекса i с индексом Маслова μ $(= 2k)$.

Случай 1. Индекс Маслова μ не равен нулю.

В этом случае рассмотрим любую иммерсию общего положения с данными индексами и построим семейство отмеченных иммерсий, параметризованных отображаемой окружностью, отмечая поочередно все ее точки (и затем двигая фронт по плоскости так, чтобы образ отмеченной точки все время оставался одним и тем же — отмеченным — контактным элементом плоскости) (рис. 9).

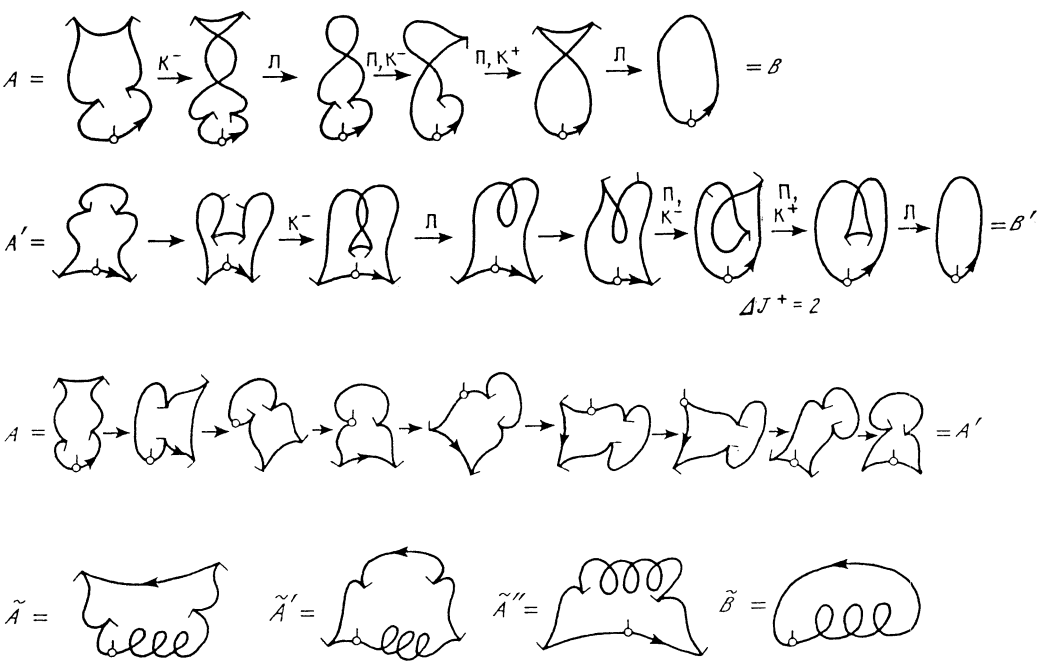
Полученный замкнутый путь в пространстве отмеченных иммерсий нестягиваем, так как возникающее отображение отображаемой окружности на окружность направлений в контактной плоскости имеет степень $k \neq 0$ (см. пример в конце разд. 5). Этот путь вовсе не пересекает страт самокасаний или его замыкание, так как исходная кривая не имела самокасаний. Поэтому индекс пересечения со стратом самокасаний равен нулю и теорема доказана в случае $\mu \neq 0$.



Р и с. 9. Нестягиваемый путь в пространстве отмеченных лежандровых иммерсий

Случай 2. Индекс Маслова равен нулю.

В этом случае построить нестягиваемый путь не так легко, но после того как путь придуман, проверка не вызывает затруднений. Для случая, когда индекс i лежандровой иммерсии равен 1, нестягиваемый путь изображен на рис. 10. Он состоит из трех частей: часть AB соединяет кривую с четырьмя точками возврата с окружностью, часть $A'B'$ соединяет ту же кривую с окружностью по-другому, а часть AA' — такое же "перекатывание", как на рис. 9. Замкнутый путь $ABB'A'A$ нестягиваем потому, что отмеченная точка проходит через точки возврата только на участке $A'A$, где имеются два прохождения одного знака, так что степень отображения на окружность направлений в контактной плоскости равна ± 1.



Р и с. 10. Замкнутый нестягиваемый путь в пространстве отмеченных лежандровых иммерсий с нулевым индексом Маслова

Индекс пересечения указанного на рис. 10 пути со стратом опасных самокасаний, коориентированным, как указано в разд. 4, равен нулю (опасные самокасания K^+ на участках AB и $B'A'$ дают противоположные вклады в индекс). Поэтому рис. 10 доказывает теорему для иммерсий индекса Маслова 0 с обычным индексом $i = 1$.

Примеры нестягиваемых путей с индексом Маслова 0 и с любыми значениями обычного индекса i можно получить из кривой A (см. рис. 10), добавив вблизи отмеченной точки несколько маленьких петель в ту или иную сторону, чтобы добиться нужного значения индекса i ($\tilde{A}$ на рис. 10).

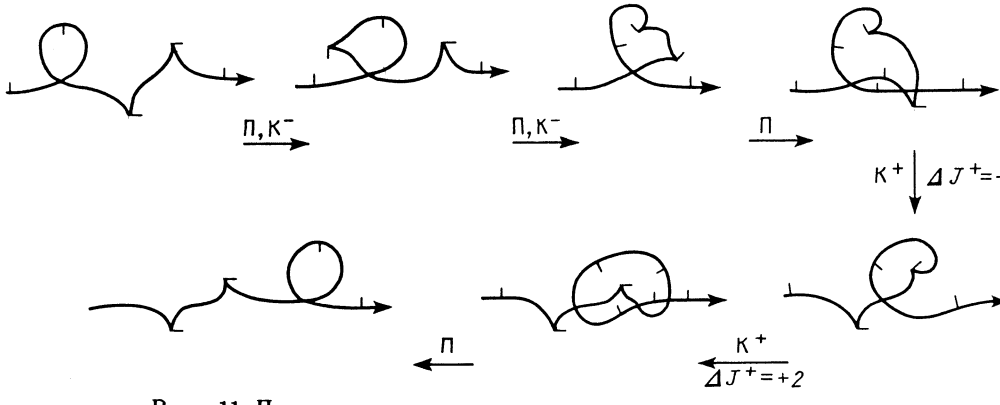
На перестройки на пути $\tilde{A}\tilde{B}$ (см. рис. 10) эти петли никак не повлияют. На пути $\tilde{A}''\tilde{A}$ добавится несколько кувырканий, но так как точки возврата не менялись, а самокасаний нет, то ни вклад (± 2) этой части пути в степень отображения на окружность контактной плоскости, ни его вклад в индекс пересечения со стратом опасных самокасаний (равный нулю) не изменятся.

Существенные изменения испытает лишь отрезок $B'A'A$ пути (см. рис. 10). Дело в том, что дополнительные петли, построенные для кривой $\tilde{A}$ около отмеченной точки, придется построить около отмеченной же точки на перестроенной окружности $\tilde{B} = \tilde{B}'$ и, следовательно, на кривой $\tilde{A}'$. Поэтому кривая $\tilde{A}'$ в измененной добавлением петель конструкции не получается из $\tilde{A}$ движением плоскости: петли на ней расположены в другом месте.

Чтобы получить из $\tilde{A}'$ повернутую кривую $\tilde{A}$ с петлями (которую обозначим $\tilde{A}''$), нужно протащить через все петли две точки возврата (скажем, те, что расположены на кривой $\tilde{A}'$, рис. 10, справа). Обе эти точки попутные.

Л е м м а. *Протаскивание пары попутных (противопутных) точек возврата через петлю является путем, имеющим со стратом опасных (а равно и безопасных) самокасаний индекс пересечения* 0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательность элементарных перестроек изображена на рис. 11. Она включает четыре самокасания: два опасных, K^+, и два безопасных. Вклады опасных касаний в индекс пересечения J^+ противоположны, согласно выбору коориентации в разд. 4.



Р и с. 11. Протаскивание пары попутных точек возврата через петлю

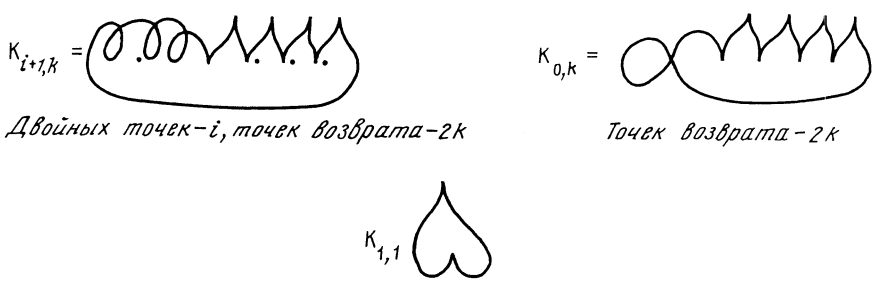
Замкнутый путь $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{B}'\tilde{A}'\tilde{A}''\tilde{A}$ в пространстве отмеченных лежандровых иммерсий с индексом Маслова 0 и обычным индексом i нестягиваем (касательный вектор в отмеченной точке совершает один оборот в контактной плоскости), а его индекс пересечения со стратом опасных касаний равен нулю. Теорема доказана.

7. Определение и свойства инварианта J^+ лежандровых иммерсий

Инвариант J^+ лежандровых иммерсий окружности двойствен страту опасных самокасаний K^+ в том смысле, что его приращение вдоль пути общего положения равно (удвоенному) индексу пересечения пути со стратом опасных самокасаний, кориентированным, как указано в разд. 4 (так что J^+ меняется, как число двойных точек, если опасное самокасание положительное, т.е. если ориентации касающихся ветвей, как и кориентации, совпадают, и меняется противоположным образом, если опасное самокасание отрицательное).

В разд. 6 доказано, что это условие определяет инвариант J^+ с точностью до аддитивной константы, своей, вообще говоря, на каждой компоненте связности $\Omega_{i,\mu}$ пространства лежандровых иммерсий окружности.

Чтобы однозначно определить инвариант J^+, остается выбрать его значения на одной кривой каждой компоненты. Оказывается, такой выбор однозначно определяется некоторыми естественными условиями. Прежде чем сформулировать эти условия, укажем сами нормировочные константы, получающиеся из них.



Р и с. 12. Базисные кривые

О п р е д е л е н и е. Инвариант J^+ — это единственный инвариант лежандровых иммерсий окружности без опасных самокасаний, приращение которого при проходе положительного опасного самокасания равно $+2$, отрицательного — -2, а значения которого на базисных кривых рис. 12 равны

$$J^+(K_{i+1,k}) = -2i - k \quad (i \geq 0,\ k \geq 0), \qquad J^+(K_{0,k}) = -k$$

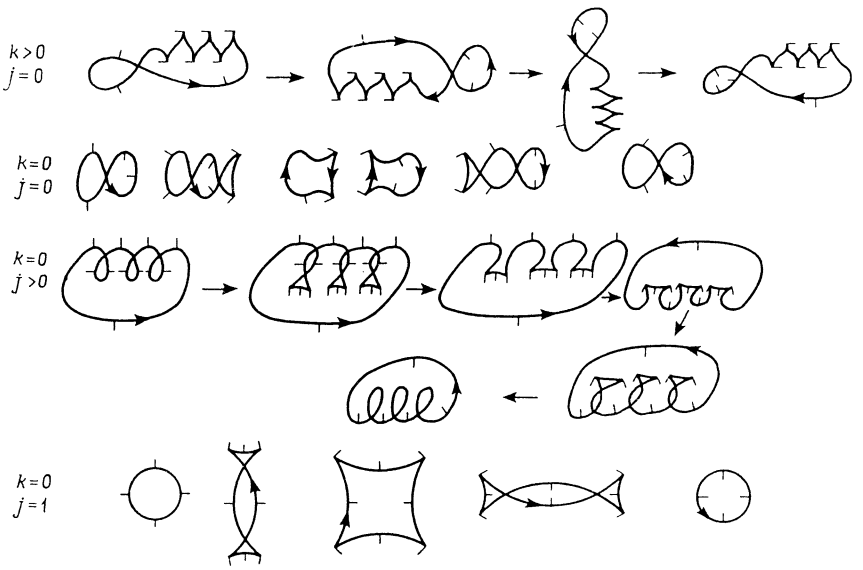
при любом выборе ориентаций и кориентаций (индексы и индекс Маслова базисных кривых $K_{j,k}$ равны $\pm j$ и $\pm 2k$ в зависимости от выбора ориентаций и кориентаций).

П р и м е р. $J^+(K_{1,1}) = -1$; $J^+(K_{i+1,0}) = -2i$, $J^+(K_{0,0}) = 0$. Поэтому для неособых кривых значение J^+ совпадает с указанным в разд. 2 (все опасные самокасания на неособом фронте положительны).

Т е о р е м а. *Инвариант J^+ корректно определен.*

Дело в том, что при $j = 0$ или при $k = 0$ четыре иммерсии, получающиеся из кривых $K_{j,k}$ выбором ориентации и кооориентации, принадлежат всего двум (а при $j = k = 0$ — всего одной) компонентам $\Omega_{0,\pm 2k}$ или $\Omega_{\pm j,0}$ пространства лежандровых иммерсий окружности. В этих случаях наша нормировка J^+ могла бы быть неоднозначной. В действительности это не так: путь общего положения, соединяющий две базисные кривые одной компоненты, имеет со стратом опасных самокасаний нулевой индекс пересечения — вот в чем состоит утверждение теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $j = 0$ это следует из леммы о протаскивании пары точек возврата через петлю (разд. 6, рис. 11), а в случае $k = 0$ изменение кооориентации достигается созданием $j - 1$ пар точек возврата и их уничтожением в другой комбинации (при $j = 1$, т.е. для окружности, достаточно создать четыре точки возврата). Пути, доказывающие теорему в каждом из этих случаев, указаны на рис. 13.



Р и с. 13. Пути, соединяющие базисные иммерсии одной компоненты

З а м е ч а н и е. Одновременно мы доказали, что значения инварианта J^+ для зеркально-симметричных иммерсий совпадают. Действительно, из рис. 13 видно, что это так для базисных иммерсий. Кооориентация же страта опасных касаний тоже инвариантна относительно зеркальной симметрии плоскости.

Т е о р е м а. *Значение инварианта J^+ не зависит ни от ориентации, ни от кооориентации фронта и сохраняется при зеркальном отражении фронта.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для базисных иммерсий это только что проверено. Для остальных же — следует из инвариантности кооориентации страта опасных касаний (при любом изменении ориентаций и кооориентаций обе касающиеся ветви испытают одинаковое изменение, поэтому опасное касание останется опасным и положительное — положительным).

8. Аддитивность инварианта J^+

Теорема. *Инвариант J^+ аддитивен при связном суммировании фронтов.*

Доказательство. Мы выведем это из аддитивности инварианта J^+ при связном суммировании обычных иммерсий (разд. 2, см. [1]). Для этого мы сначала научимся передвигать точки возврата вдоль фронта, протаскивая их через другие ветви коориентированного и ориентированного фронта.

Протаскивание называется *опасным*, если коориентации фронта в точке возврата и в пересекаемой ею ветви в момент протаскивания совпадают,и *безопасным*, если они противоположны (рис. 14).

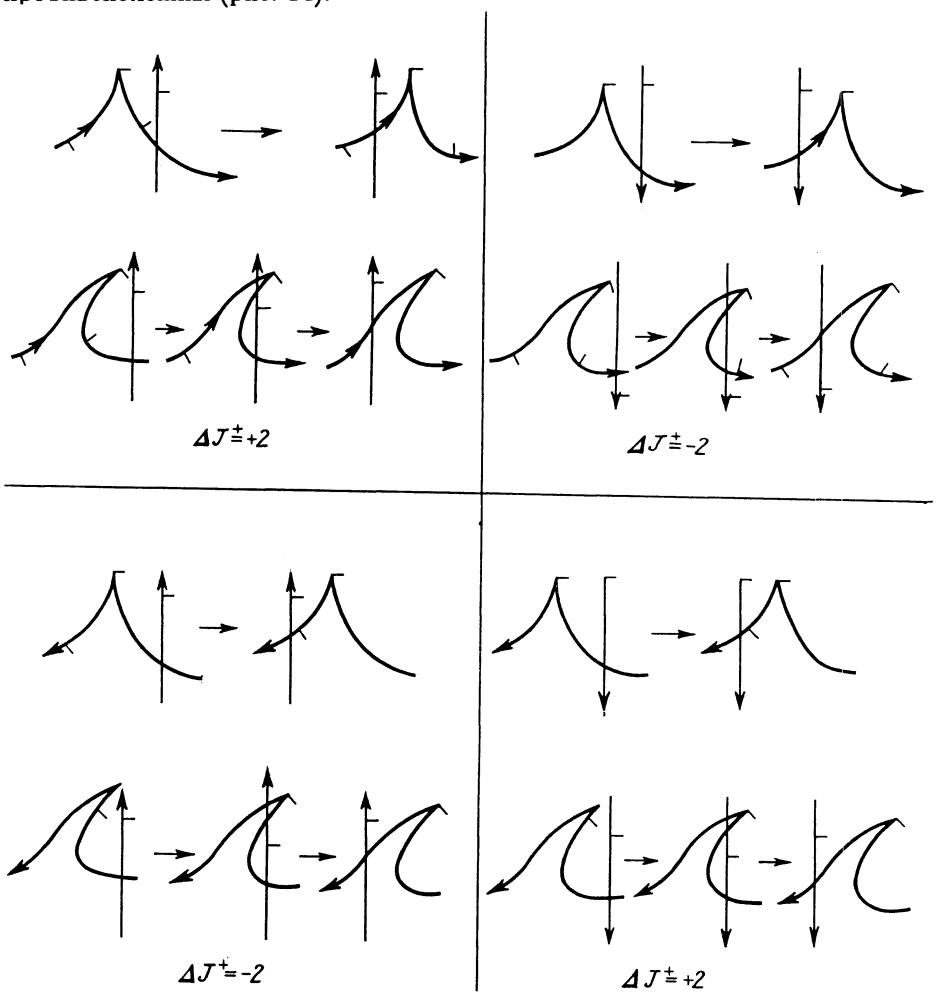


Рис. 14. Протаскивание точки возврата

Лемма. *Приращение J^+ при опасном протаскивании точки возврата равно $+2$, если пересекающиеся после протаскивания ветви одноименные (т.е. если каждая из них задает своей ориентацией и коориентацией одну и ту же ориентацию плоскости).*

2*

З а м е ч а н и е. При изменении ориентации фронта или плоскости или коориентации фронта это приращение не меняется.

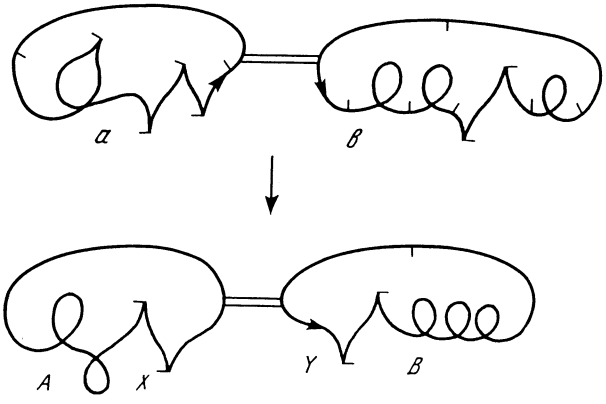
Д о к а з а т е л ь с т в о. Операция протаскивания может быть заменена парой из прохождения и опасного касания. Перебор всех четырех возможных комбинаций ориентаций ветвей приводит к сформулированному в лемме ответу (см. рис. 14).

Теперь мы можем вычислять инвариант J^+ для фронта с точками возврата таким способом: последовательно протаскиваем одну за другой все точки возврата на одну дугу внешнего контура фронта и тем самым представляем фронт в виде связной суммы обычной иммерсии без точек возврата и фронта без точек самопересечения. При этой операции значение J^+ изменится на столько двоек (минус двоек), сколько протаскиваний было одноименными (разноименными).

После этого мы можем одну за другой уничтожать пары соседних точек возврата вида "попутная точка, противопутная точка", создавая каждый раз вместо них одну точку самопересечения (рис. 15); при этом значение J^+ не меняется.

Р и с. 15. Уничтожение разноименной пары точек возврата фронта

Повторяя эту процедуру, мы в конце концов заменим исходный фронт связной суммой иммерсированной кривой без точек возврата и базисной кривой вида $K_{0,k}$ (рис. 12), у которой нет точек самопересечения и все $2k$ точек возврата попутные (или все противопутные). При этой подготовке инвариант J^+ изменится на некоторое количество двоек и минус двоек, диктуемое осуществившимися протаскиваниями.



Р и с. 16. Связное суммирование исходных и подготовленных фронтов

Рассмотрим теперь связную сумму двух фронтов (рис. 16). Указанный выше алгоритм можно применять внутри каждого слагаемого, не затрагивая другого, и при этом перетащить все точки возврата к точкам связи слагаемых. При этом изменение J^+ суммы будет равно сумме изменений J^+ слагаемых, так как одноименность

или разноименность протаскивания одинакова, делается ли протаскивание для слагаемого или для суммы. Следовательно, аддитивность J^+ достаточно доказать для подготовленных фронтов (см. рис. 16).

Аддитивность J^+ для подготовленных фронтов вытекает из аддитивности для фронтов без точек возврата, для фронтов $K_{0,k}$ и из следующего факта.

Лемма 1. *При связном суммировании фронта без точек возврата с "сердечком" $K_{1,1}$ (см. рис. 12) инвариант J^+ уменьшается на* 1.

Доказательство. Пару одноименных точек возврата сердечка можно, не меняя J^+, перетаскивать вдоль фронта без точек возврата в любое место. Действительно, дуга между этими точками разноименна с соседними дугами, разделенными этими точками возврата. Поэтому (по лемме о протаскивании) вклады протаскиваний обеих точек возврата через любую трансверсальную ветвь в J^+ противоположны.

Исходный фронт без точек возврата по теореме Уитни можно перестроить в базисную кривую K_i (см. рис. 1), имеющую (при надлежащей ориентации) такой же индекс, при помощи элементарных перестроек (самокасаний и тройных точек). Если точки возврата не затрагиваются этими перестройками, то изменение J^+ для кривой без точек возврата и с парой точек возврата одинаково.

Если же перестройка затрагивает дугу, где находится пара точек возврата, то нужно сначала протащить эту пару на другую, не затрагиваемую перестройкой, дугу внешнего контура, а затем сделать перестройку. При указанном перетаскивании значение J^+ не меняется.

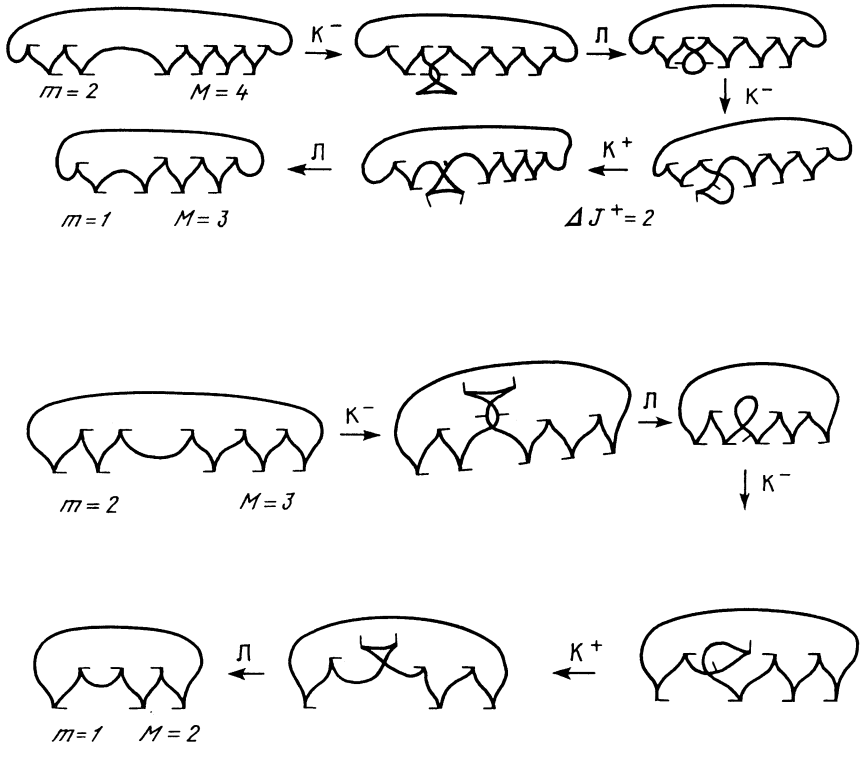
В результате всех этих перестроек и протаскиваний мы в конце концов превратим исходную связанную сумму в связанную сумму базисной кривой K_i (см. рис. 1) и сердечка, изменив значение J^+ суммы на столько же, на сколько изменяется значение J^+ гладкого слагаемого при его перестройке в K_i.

Проверка соотношения $J^+(K_i + K_{1,1}) = J^+(K_i) - 1$ осуществляется непосредственно (см. рис. 12) по определению $J^+(K_{j,k})$.

Лемма 2. *При связном суммировании лежандровых иммерсий, фронты которых не имеют точек самопересечений и имеют лишь одноименные точки возврата ($K_{1,k}$, рис. 12), инвариант J^+ аддитивен.*

Доказательство. Если точки возврата обоих складываемых (коориентированных и ориентированных) фронтов одноименные (все попутные на обоих слагаемых или все противопутные), то аддитивность следует из определения, так как связное суммирование фронтов $K_{1,k}$ и $K_{1,l}$ дает в этом случае $K_{1,k+l}$.

Если же точки возврата на слагаемых разноименные, то можно их уничтожать парами. А именно: пусть на одном слагаемом $2M$, а на другом $2m$ точек возврата, и $M \geq m$. Тогда можно стандартными перестройками уничтожить $4m$ точек возврата, как показано на рис. 17. В результате получится фронт $K_{1,M-m}$. Для него $J^+ = m - M$. Но в процессе перестроек значение J^+ увеличилось на $2m$. Значит, для исходного фронта-суммы $J^+ = -m - M$. Это доказывает аддитивность J^+ при сложении фронта вида $K_{1,k}$, так как $J^+(K_{1,k}) = -k$.



Р и с. 17. Взаимное уничтожение разноименных точек возврата

Л е м м а 3. ***При прибавлении к базисной кривой*** (*см. рис.* 1) ***k сердечек*** $K_{1,1}$ (***частью попутных, а частью противопутных***) ***значение инварианта*** J^+ ***уменьшается на k.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если все прибавляемые сердечки попутные (или противопутные), то это явно следует из выбора значений $J^+(K_{j,k}) = f(j) - k$. Если же среди них есть и попутные, и противопутные, то можно произвести сокращения, как в доказательстве леммы 2 на рис. 17 (все точки возврата можно собрать в одно место, не меняя значения J^+, по лемме о протаскивании петли). Взаимное уничтожение четырех точек возврата увеличивает J^+ на 2, т.е. на число исчезающих при взаимном уничтожении сердечек. Поэтому справедливость леммы 3 в общем случае вытекает из ее справедливости для одноименных сердечек.

Л е м м а 4. ***Инвариант*** J^+ ***аддитивен при сложении подготовленных кривых*** (*см. рис.* 16).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подготовленные кривые можно представить как суммы $A + X$, $Y + B$, где A и B не имеют точек возврата, а X и Y — суммы сердечек (все сердечки, входящие в X, и все сердечки, входящие в Y, можно считать одноименными, но для X и Y вместе это не обязательно так). Суммарный фронт имеет вид $A + X + Y + B$ и является суммой $X + Y$ и $B + A$.

По теореме Уитни кривые A, B и $B + A = C$ могут быть цепочкой превращены в базисные кривые рис. 1 (с соответствующими ориентациями и кооориентациями).

Обозначим эти кривые A_0, B_0 и C_0. По лемме о протаскивании пары, как в доказательстве леммы 1, присутствие слагаемого X $(Y, X+Y)$ не влияет на приращение J^+ в процессе перестраивания:

$$J^+(A+X) - J^+(A_0+X) = J^+(A) - J^+(A_0),$$

$$J^+(Y+B) - J^+(Y+B_0) = J^+(B) - J^+(B_0),$$

$$J^+(C+Z) - J^+(C_0+Z) = J^+(C) - J^+(C_0), \qquad Z = X+Y.$$

Следовательно, дефект аддитивности при сложении $(A+X)+(Y+B)$ равен

$$J^+(C+Z) - J^+(A+X) - J^+(Y+B) =$$

$$= J^+(C_0+Z) - J^+(A_0+X) - J^+(Y+B_0) - (J^+(C_0) - J^+(B_0) - J^+(A_0)),$$

так как $C = B + A$, а для кривых без точек возврата J^+ аддитивен.

По лемме 3 уменьшение J^+ при прибавлении сердечек к базисным кривым A_0, B_0, C_0 равно числу прибавляемых сердечек:

$$J^+(A_0+X) - J^+(A_0) = -n(X), \qquad J^+(Y+B_0) - J^+(B_0) = -n(Y),$$

$$J^+(C_0+Z) - J^+(C_0) = -n(Z).$$

Но $n(Z) = n(X) + n(Y)$, так как $Z = X + Y$. Поэтому весь дефект равен нулю и лемма 4 доказана.

Окончание доказательства теоремы. Пусть исходные фронты были a и b, подготовленные фронты: $A+X$ и $Y+B$ (см. рис. 16). Приращение J^+ при подготовке не зависит от того, производится ли подготовка на a и b отдельно или сразу на сумме:

$$J^+(A+X+Y+B) - J^+(a+b) = (J^+(A+X) - J^+(a)) + (J^+(Y+B) - J^+(b)).$$

По лемме 4 инвариант J^+ аддитивен для подготовленных фронтов:

$$J^+(A+X+Y+B) = J^+(A+X) + J^+(Y+B).$$

Значит, он аддитивен и для исходных фронтов:

$$J^+(a+b) = J^+(a) + J^+(b).$$

9. Единственность инварианта J^+

Определение. Инвариант лежандровых иммерсий без точек опасного самокасания фронта называется *локальным*, если его скачок при трансверсальном прохождении опасного самокасания зависит лишь от поведения иммерсии в окрестности тех двух точек, которые при иммерсии попадают в точку касания. Инвариант называется *аддитивным*, если он складывает свои значения при связном суммировании фронтов.

Пример. Инвариант J^+ и индекс Маслова μ являются локальными и аддитивными инвариантами.

Теорема. *Всякий локальный аддитивный инвариант является линейной комбинацией инварианта J^+ и индекса Маслова.*

Замечание. Инвариант J^+ не меняет значения ни при изменении ориентации фронта, ни при изменении его кооориентации, ни при зеркальном отображении плоскости фронта в себя.

Индекс Маслова меняет знак при изменении ориентации фронта, а также и при изменении его кооориентации, но не меняет значения при зеркальном отображении плоскости.

Поэтому каждый аддитивный локальный инвариант не меняет значения при зеркальной симметрии, а всякий локальный инвариант, не меняющий значения при изменении ориентации фронта (как и всякий, не меняющий значения при изменении его кооориентации), пропорционален инварианту J^+ (коэффициент пропорциональности универсален, т.е. одинаков для всех компонент пространства лежандровых иммерсий).

Таким образом, инвариант J^+ выделяется однозначно свойствами локальности, аддитивности, независимости от ориентации (или независимости от кооориентации) и значением на одной кривой, для которой J^+ не нуль (например, $J^+(K_2) = -2$ для простейшей кривой K_2 индекса 2 (рис. 1) или $J^+(K_{1,1}) = -1$ для сердечка $K_{1,1}$ (рис. 12)).

Доказательство. Ряд свойств сразу следует из аддитивности, даже без локальности.

Лемма 1. *Для всякого аддитивного инварианта J выполняются соотношения:*

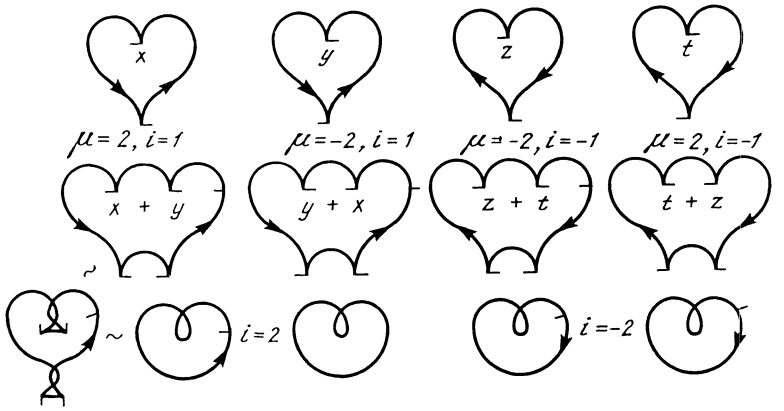
$$J(O) = 0, \qquad J(\infty) = 0, \qquad J(K_{i+1}) = iJ(K_2)$$

при любом выборе кооориентаций (ориентации K_2 и K_{i+1} должны быть согласованы так, чтобы индексы были одного знака).

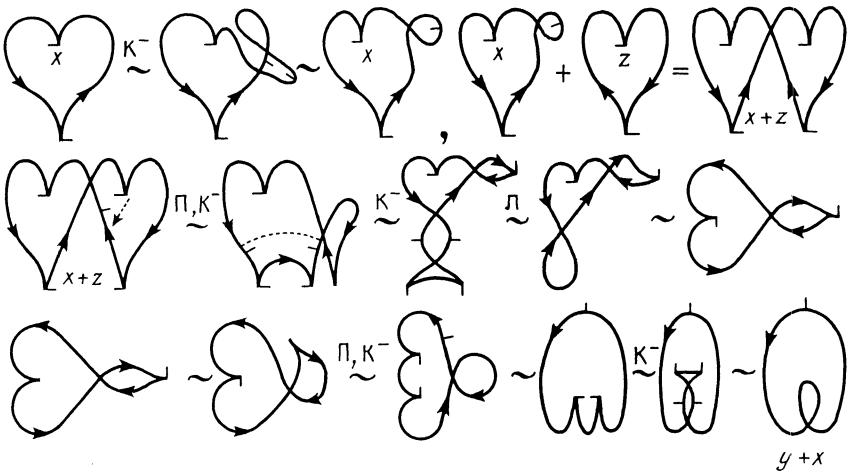
Доказательство. Прибавление окружности O к любой кривой X не меняет ее типа, поэтому $J(X + O) = J(X)$ и, значит, $J(O) = 0$. Сумма двух восьмерок перестраивается в окружность без опасного касания, поэтому $2J(\infty) = 0$. Сумма i экземпляров K_2 (с одинаковой ориентацией и кооориентацией) есть K_{i+1} (с соответствующей ориентацией и кооориентацией).

Кооориентацию K_j можно изменить цепочкой безопасных перестроек (см. рис. 13), не меняя ориентации. Поэтому значение $J(K_j)$ не меняется при изменении кооориентации базисной кривой (это верно и для восьмерки K_0, и для окружности K_1, и для остальных кривых K_j).

Рассмотрим теперь кривые с точками возврата. Простейшие кривые с двумя попутными или противопутными точками возврата — это четыре сердечка $K_{1,1}$ (различающиеся ориентациями и кооориентациями). Обозначим значения аддитивного инварианта J на этих четырех сердечках x, y, z, t (соответственно для $\mu = 2$, $i = 1$; $\mu = -2$, $i = 1$; $\mu = -2$, $i = -1$; $\mu = 2$, $i = -1$ (рис. 18)).



Р и с. 18. Четыре сердечка и их связные суммы



Р и с. 19. Перестройка фронта с инвариантом $x + z$ в фронт с инвариантом $y + z$

Л е м м а 2. $y = z$ *и* $x = t$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Цепочка преобразований, соединяющая кривую с инвариантом $x + z$ с кривой с инвариантом $x + y$, изображена на рис. 19 (знак $\sim$ означает либо перестройку неопасного типа, не меняющую значение инварианта, либо отбрасывание слагаемого "∞", для которого по лемме инвариант равен нулю).

Итак, $z = y$. Изменяя ориентации, мы превратим x в z, а y в t, поэтому $x = t$.

Л е м м а 3. *Прибавляя к любому аддитивному инварианту J индекс Маслова μ с подходящим коэффициентом, можно получить инвариант $J' = J + c\mu$, принимающий на всех четырех сердечках одинаковые значения, причем коэффициент "c" определяется этим условием однозначно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Значения нового инварианта $x' = x + 2c$ и $y' = y - 2c$ совпадают, если $4c = y - x$. При таком выборе $x' = y' = z' = t'$ по лемме 2.

Аддитивный инвариант J' леммы 3, принимающий одинаковые значения на всех сердечках, назовем *нормированным*. Обозначим общее значение нормированного инварианта J на всех сердечках через u. Пользуясь аддитивностью, мы находим $J(K_2) = 2u$ при любых ориентациях и коориентациях. Следовательно, $J(K_{i+1}) =$

$= i(2u)$ при любых ориентациях и кооориентациях (по лемме 1). Представляя в виде сумм базисные кривые рис. 12 ($K_{0,k} = \infty + kK_{1,1}$, а при $i \geq 0$ $K_{i+1,k} = K_i + kK_{1,1}$), мы приходим к такому выводу:

Лемма 4. ***Значения любого нормированного аддитивного инварианта J на всех базисных кривых рис. 12 определяются его значением (u) на сердечках, а именно такой инвариант на базисных кривых пропорционален инварианту J^+ : $J(K_{0,k}) = ku$, $J(K_{i+1,k}) = (2i + k)u$.***

Следствие. ***Скачок локального нормированного аддитивного инварианта при положительном пересечении страта опасных касаний равен минус удвоенному значению инварианта на сердечке.***

Доказательство. На рис. 20 изображена серия перестроек от кривой K_2, на которой инвариант равен $2u$, до окружности, где он равен нулю, включающая одно положительное пересечение страта опасных касаний K^+.

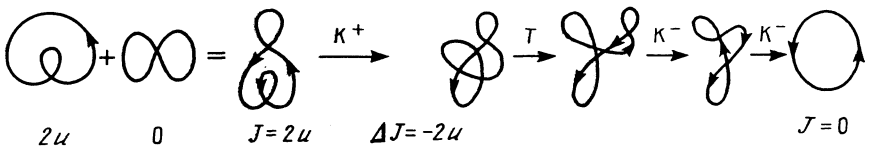


Рис. 20. Вычисление скачка инварианта при положительном прохождении опасного самокасания фронта

Поскольку инвариант локален, величина скачка при любом опасном положительном пересечении также равна $-2u$, как и в этом примере.

Замечание. Отсюда автоматически следует, что при прохождении отрицательного опасного самокасания (когда кооориентации фронтов в точке касания совпадают, а ориентации противоположны) скачок инварианта при движении в сторону увеличения числа двойных точек ($2u$) противоположен таковому для прохождения положительного самокасания в сторону увеличения числа двойных точек (см. диаграмму $K\Pi$ на рис. 6).

Итак, как скачки локального нормированного аддитивного инварианта J, так и его значения на базисных иммерсиях каждой компоненты пространства иммерсий пропорциональны (с коэффициентом $-u$) таковым для инварианта J^+; следовательно, $J = -uJ^+$, что и доказывает теорему единственности.

Замечание. Я не знаю нелокальных аддитивных инвариантов.

10. Коэффициенты самозацепления лежандровых кривых

Инвариант J^+ испытывает скачки, когда соответствующая лежандрова кривая в $M^3 = ST^*\mathbb{R}^2$ имеет самопересечение и одна ее ветвь проходит сквозь другую. Поэтому этот инвариант естественно сравнить с "коэффициентом самозацепления" лежандровой кривой. Для лежандровых кривых в $\mathbb{R}^3$ такой коэффициент был определен Беннекеном [3]. В нашем случае, однако, контактное многообразие $M^3 \approx \mathbb{R}^2 \times S^1$ неодносвязно, поэтому инвариант Беннекена недостаточен. Нужное обобщение пред-

ложено С.Л. Табачниковым в работе [2], и оно изложено ниже (в слегка измененном виде). Хорошо известна

Лемма 1. *Универсальное накрывающее пространство многообразия M^3 коориентированных контактных элементов плоскости является стандартным контактным пространством $\mathbb{R}^3$ с обычной контактной структурой $dz = pdq$.*

Доказательство. В координатах (x, y, φ) из разд. 5 наша контактная структура имеет вид $\alpha = 0$, где $\alpha = \cos\varphi dx + \sin\varphi dy$.

Диффеоморфизм $(x, y, \varphi) \mapsto (p, z, \varphi)$, где $p = x\sin\varphi - y\cos\varphi$, $z = x\cos\varphi + y\sin\varphi$, приводит α к искомому виду $dz - pd\varphi$.

Рассмотрим теперь полный прообраз данной лежандровой кривой в накрывающем пространстве. Приходится различать два существенно разных случая.

Случай 1. Индекс исходной лежандровой иммерсии равен нулю. В этом случае прообраз иммерсии в накрывающем пространстве $\mathbb{R}^3$ состоит из счетного числа иммерсий окружности в $\mathbb{R}^3$, получающихся друг из друга сдвигом на целое кратное 2π вдоль оси φ пространства с координатами (x, y, φ). Обозначим одну из этих иммерсированных окружностей через C_0, а ее сдвиги на $2\pi j$ — через C_j $(j \in \mathbb{Z})$.

Для лежандровой иммерсии общего положения фронт не имеет самокасаний и, значит, кривые C_j вложены и попарно не пересекаются.

Определение. Обобщенным инвариантом Беннекена L_j называется коэффициент зацепления кривых C_0 и C_j в $\mathbb{R}^3$ при $j \neq 0$ и обычный инвариант Беннекена при $j = 0$.

Замечание. Коэффициент L_j не меняется при изменении ориентации кривой C_0 (так как при этом меняется и ориентация кривой C_j), при изменении порядка $(l(C_0, C_j) = l(C_j, C_0))$ и при сдвигах $(l(C_i, C_{i+j}) = l(C_0, C_j))$. В частности, $L_{-j} = L_j$.

Обычный инвариант Беннекена, обозначаемый здесь через L_0, определяется как коэффициент зацепления кривой с близкой кривой, полученной из нее следующей конструкцией: мы сдвигаем каждую точку исходной лежандровой кривой в направлении вектора контактной плоскости, трансверсального касательному вектору кривой и непрерывно меняющегося при движении вдоль кривой (или же — что удобнее — в направлении трансверсали к контактной плоскости, что приводит к такому же коэффициенту зацепления).

Вектор с указанными свойствами (например, нормальный к касательному вектору или к контактной плоскости в какой-либо римановой метрике) существует, так как наши контактные плоскости ориентированы (на накрывающем пространстве это очевидно вследствие его односвязности, но в нашем случае ориентация контактных плоскостей есть и внизу, в M^3, так как наши контактные элементы трансверсально ориентированы).

Замечание. Коэффициенты L_j $(j \neq 0)$ инвариантны относительно сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $\mathbb{R}^3$ — в частности, относительно контактоморфизмов пространства $\mathbb{R}^3$ (относительно которых инвариантен и инвариант Беннекена L_0). Однако в то время как инвариант Беннекена является контактным ин-

ва] нтом лежандровой кривой C_0 в $\mathbb{R}^3$, остальные числа L_i такими инвариантами не являются. Контактно эквивалентные в $\mathbb{R}^3$ кривые C_0 и C_0' могут при сдвигах давать по-разному с ними зацепленные кривые ($l(C_0, C_i) \neq l(C_0', C_i')$). Этого не может случиться, однако, если переводящий C_0 в C_0' контактоморфизм проектируется в контактоморфизм M^3: в этом случае пары (C_0, C_i) и (C_0', C_i') контактно эквивалентны и имеют одинаковые коэффициенты зацепления.

Знак L_j зависит от ориентации контактного многообразия, но она стандартна, так как форма $\alpha \wedge d\alpha$, задающая ориентацию, не меняется при изменении знака α.

Случай 2. Индекс исходной лежандровой иммерсии i не равен 0.

Для удобства мы можем считать, что $i > 0$ (случай $i < 0$ сводится к этому сменой ориентации).

В этом случае накрывающая исходную лежандрову иммерсию в M^3 кривая в $\mathbb{R}^3$ не компактна. Она состоит из i связных компонент, вдоль каждой из которых φ меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Каждая компонента переходит в себя при сдвигах на $2\pi ik$, а при сдвигах на $2\pi(ik + j)$ ($j = 0, 1, \ldots, i-1$) компонента C_0 (которую мы выберем произвольно) переходит во все остальные компоненты C_j. Удобно считать, что $j \in \mathbb{Z}_i$, так как $C_{j+i} = C_j$ как множество (соответствующие иммерсии прямой различаются, конечно, сдвигом на $2\pi i$ вдоль оси φ).

Теперь мы должны определить "коэффициент зацепления" L_j между неограниченными кривыми C_0 и C_j. С этой целью рассмотрим i-кратное накрытие $\tilde{M} \to M$. На $\tilde{M} \approx \mathbb{R}^2 \times S^1$ образы $\tilde{C}_j$ всех i кривых C_j ($j = 0, \ldots, i-1$) замкнуты и гомотопны образующей окружности, т.е. обходят полноторие $\tilde{M}$ один раз. Рассмотрим (некомпактную) двумерную цепь в полнотории $\tilde{M}$, соединяющую $\tilde{C}_0$ с "кривой на бесконечности", заданную так: мы соединяем $\tilde{C}_0$ с окружностью $\{x = N,\ y = 0,\ \varphi \bmod 2\pi i$ любое$\}$ какой-либо 2-цепью (где N очень велико, так что вдоль C_0 всюду $|x| < N$), а затем добавляем неограниченную 2-цепь $\{x \geq N,\ y = 0,\ \varphi \bmod 2\pi i$ любое$\}$ так, чтобы граница полученной 2-пленки F была $\tilde{C}_0$.

После этого мы полагаем L_j при $j \neq 0$ равным индексу пересечения пленки F с окружностью $\tilde{C}_j$ в $\tilde{M}$, а в случае $j = 0$ — индексу пересечения F с кривой $\tilde{C}_0'$, полученной из $\tilde{C}_0$ малой деформацией в направлении трансверсального вектора контактной структуры (как при определении инварианта Беннекена).

З а м е ч а н и е 1. Можно было бы, оставаясь в $\mathbb{R}^3$, построить средние асимптотические коэффициенты зацепления C_0 и C_j или C_0 и C_0'; они равны определенным выше L_j.

З а м е ч а н и е 2. $L_j = L_{-j} = L_{i-j}$, как и в случае $i = 0$, ввиду симметричности коэффициента зацепления.

З а м е ч а н и е 3. В отличие от чисел L_j при $i = 0$, при $i \neq 0$ числа L_j не сохраняются при гомеоморфизмах пространства $\mathbb{R}^3$, даже и индуцированных гомеоморфизмами $\tilde{M}^3$ или M^3.

Однако контактоморфизмы $\tilde{M}_3$, меняющие коэффициент зацепления L_j, мне неизвестны.

Рассмотрим контактоморфизм полнотория (с контактной структурой M^3 или $\tilde{M}^3$) на себя. Окрестность ограничивающего полноторие тора можно отобразить на тор обычным образом (в наших координатах $(x, y, \varphi) \mapsto (\theta, \varphi,\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$). Образ достаточно тонкой окрестности граничного тора при контактоморфизме полнотория также попадает в проектирующуюся на тор $\{(\theta, \varphi)\}$ обычным образом окрестность.

Рассмотрим окружность $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, лежащую в достаточно тонкой окрестности граничного тора (с достаточно большим $x^2 + y^2$). Ее образ попадает в проектирующуюся на граничный тор обычным образом окрестность граничного тора. После проекции получается кривая на граничном торе.

Если диффеоморфизм произволен, то эта кривая может быть не гомологичной проекции ($\theta = \text{const}$) исходной окружности на граничном торе (она может отличаться от нее на целое кратное меридиана, $\varphi = \text{const}$).

Однако диффеоморфизм, сохраняющий контактную структуру полнотория, кажется, не может осуществить такое перекручивание. Это вытекало бы из связности группы контактоморфизмов полнотория, сохраняющих коориентацию контактных плоскостей и ненулевой класс одномерных гомологий полнотория, т.е. направление оси φ.

Во всяком случае, коэффициенты зацепления L_j не зависят от координат (x, y) на плоскости фронта, при помощи которых они определялись.

О п р е д е л е н и е. Многочлен зацеплений лежандровой иммерсии окружности без опасных самокасаний — это лорановский многочлен

$$L(t) = \sum L_j t^j.$$

З а м е ч а н и е. Этот многочлен рассматривается как элемент группового кольца циклической группы $\mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$, где i — индекс иммерсии. Так что при $i \neq 0$ в сумме i слагаемых, соответствующих $j = 0, 1, \ldots, i-1$. При $i = 0$ число слагаемых тоже конечно.

О п р е д е л е н и е. Числом зацеплений лежандровой иммерсии окружности без опасных самокасаний называется число

$$L(1) = \sum L_j.$$

Как мы увидим ниже, число зацеплений и введенный при помощи пересечений с дискриминантом опасных касаний инвариант J^+ связаны соотношением

$$J^+ + L(1) = 1.$$

11. Вычислительные формулы

Напомню вначале формулы для индекса и индекса Маслова ориентированного коориентированного фронта.

Индекс Маслова равен разности между числами попутных и противопутных точек возврата. Этот индекс всегда четен.

З а м е ч а н и е. Я не знаю, равен ли модуль индекса Маслова кривой минимальному числу точек возврата на кривых, получаемых из данной цепью перестроек без опасных самокасаний (вероятно, не равен). Например, всякий ли фронт с индексом Маслова, равным нулю, можно без опасных самокасаний превратить в фронт без точек возврата? Это можно сделать, если исходный фронт не имел точек самопересечения (если индекс Маслова такого фронта μ, его можно превратить в фронт с $|\mu|$ точками возврата).

Действительно, фронт без точек самопересечения получается из окружности добавлением смотрящих наружу и внутрь точек возврата. Две соседние точки возврата, смотрящие в одну сторону, можно (без опасных самокасаний) заменить смотрящей в ту же сторону петлей. Точка возврата, соседняя с петлей, смотрящей в другую сторону, свободно протаскивается сквозь петлю на другую ее сторону без опасных самокасаний. Точку возврата, соседнюю с петлей, смотрящей в ту же сторону, тоже можно перетащить на другую сторону петли без опасных самокасаний. Для этого достаточно заменить петлю парой смотрящих в ту же сторону точек возврата, а затем из трех образовавшихся, смотрящих в одну сторону соседних точек возврата заменить петлей другие две.

В результате мы соберем все точки возврата в одном месте, после чего опять можно заменять петлями соседние пары направленных в одну сторону точек возврата. В конце концов останется последовательность точек возврата альтернирующих направлений. Такие точки — все попутные или все противопутные, их число равно $|\mu|$.

Индекс фронта при добавлении точки возврата меняется на $1/2$, а именно вклад точки возврата в индекс равен $1/2$, если направления от точки возврата к близким точкам входящей и выходящей ветвей, взятые в этом порядке, положительно ориентируют плоскость (и равен $-1/2$, если отрицательно).

От коориентации фронта этот индекс не зависит.

Теперь приведем формулы для коэффициентов зацепления для лежандровых иммерсий общего положения.

Случай кривых индекса нуль. В этом случае обозначим через X множество точек самопересечения фронта и через X_j $(j > 0)$ — множество тех точек самопересечения, для которых разность значений аргумента контактного элемента φ на обеих ветвях по модулю превосходит $2\pi j$. Заметим, что эта разность корректно определена (не зависит от того, вдоль какой из двух петель, на которые кривую делит точка самопересечения, вычисляется приращение φ), так как полный индекс равен нулю.

Т е о р е м а. *Коэффициенты зацепления L_j даются формулой*

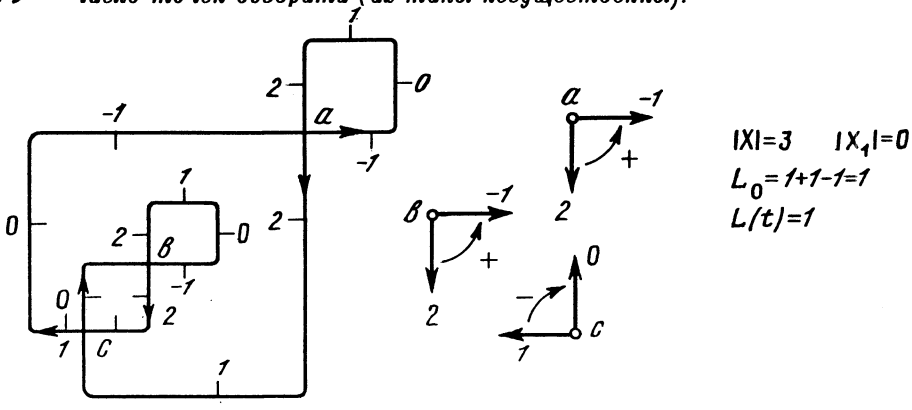
$$L_j = \sum_{X_j} \frac{\operatorname{op}(>,<)}{\operatorname{op}(x,y)}, \qquad j > 0,$$

где суммирование производится по множеству X_j и где $\operatorname{op}(>,<)$ *означает ориентацию плоскости (x,y), заданную векторами, ориентирующими фронт в точке самопересечения, выбранными в таком порядке, что сначала идет вектор с бóльшим значением φ.*

Коэффициент самозацепления L_0 дается формулой

$$L_0 = \sum_X \frac{\operatorname{op}(>,<)}{\operatorname{op}(x,y)} + \frac{\nu}{2},$$

где ν — число точек возврата (их типы несущественны).



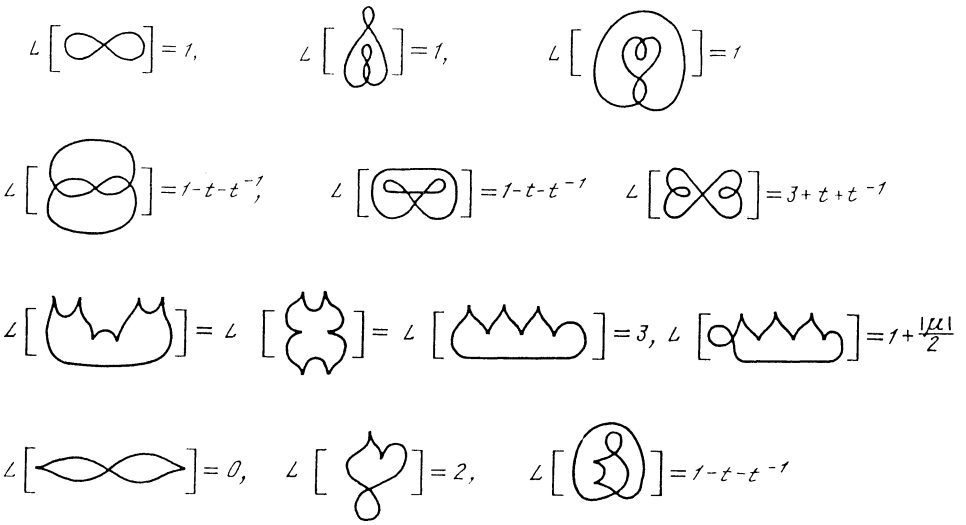
Р и с. 21. Вычисление коэффициента зацепления для кривой индекса 0 без точек возврата

П р и м е р. Вычисление $L(t)$ для одной кривой индекса нуль с тремя точками самопересечения подробно показано на рис. 21. Аргумент коориентирующей нормали измеряется на рис. 21 в единицах $\pi/2$ от оси x к оси y, так что модуль разности аргументов в точках X_j должен быть больше четырех. В нашем примере уже X_1 пусто.

Аналогичные вычисления приводят к остальным значениям $L(t)$, указанным на рис. 22.

П р е д о с т е р е ж е н и е. При вычислении $\operatorname{op}(>,<)$ нужно упорядочивать ветви по аргументу коориентирующей нормали, но затем строить репер не из нормалей, а из ориентирующих фронт касательных векторов. В случае кривых без точек возврата нормальные и касательные векторы здесь взаимозаменяемы, но если точки возврата есть, то это не так (ориентации различаются, если число точек возврата на каждой петле, на которые фронт делит данная точка самопересечения, нечетно).

П р и м е р. Окружность, накрывающую в $\mathbb{R}^3$ восьмерку, можно перевести контактоморфизмом $\mathbb{R}^3$ в окружность, накрывающую четвертую кривую рис. 22 (эта кривая получается из восьмерки после прохождения одного опасного касания). Для восьмерки $L(1) = 1$, а для четвертой кривой рис. 22 $L(1) = -1$. Следовательно, в отличие от инварианта Беннекена L_0, остальные числа L_j и их сумма $L(1)$ не являются инвариантами контактного класса окружности, накрывающей кривую индекса 0 в $\mathbb{R}^3$.



Р и с. 22. Многочлены зацепления кривых индекса

Доказательство теоремы. Пусть C_0 — накрывающая нашу кривую окружность в $\mathbb{R}^3$. Построим 2-цепь с границей C_0, состоящую из цилиндра, направленного в положительную сторону по оси φ от C_0 до плоскости $\varphi = N$, где N достаточно велико (так что кривые C_j с $j \leq 0$ плоскость $\varphi = N$ не пересекают). Затянем след цилиндра на плоскости $\varphi = N$ конусом.

Если $j < 0$, то вклад в индекс пересечения кривой C_j с построенной 2-цепью вносят только точки X_j и подсчет ориентаций дает приведенное в теореме правило вычисления L_j. Если $j = 0$ и у фронта нет точек возврата, то сдвиг кривой C_0 вдоль оси φ на $-\varepsilon$ деформирует кривую C_0 в направлении контактной плоскости. Подсчет индекса пересечения сдвинутой кривой с цилиндром дает сумму по точкам самопересечения фронта из формулы для L_0.

Если точки возврата есть, то вместо сдвига вдоль оси φ можно сдвинуть кривую C_0 в трансверсальном контактной плоскости направлении. В окрестности каждой точки возврата достаточно просто сдвинуть фронт в направлении коориентирующей его нормали. Сдвинутый фронт пересечет исходный вблизи точки возврата один раз. В половине точек возврата это пересечение не приведет к пересечению сдвинутой кривой C_0 с цилиндром, а в половине — приведет (те и другие точки возврата на фронте чередуются). Подсчет ориентаций показывает, что вклад всех этих $\nu/2$ точек возврата в L_0 положителен.

Случай кривых индекса $i > 0$. В этом случае рассмотрим проекцию P_0 поднятой в $\mathbb{R}^3$ кривой C_0 на плоскость (y, φ) в пределах одного периода (так что продолжение проекции получается сдвигом на $2\pi i$ вдоль оси φ). Точки (y, φ) и $(y, \varphi + 2\pi i)$ мы отождествим, так что P_0 и проекции P_j остальных поднятий ($j = 0, \ldots, i-1$) лежат на цилиндре.

Обозначим через X_j множество тех точек пересечения проекций P_0 и P_j, для которых значение x в точке, соответствующей P_0, меньше, чем в точке, соответствующей P_j. Пусть $(x_<, x_>)$ — векторы касательных проекций в этих точках соответственно. Будем предполагать, что координаты (x, y) выбраны так, что проекция P_0 (а значит, и ее сдвиги P_j) — иммерсированная кривая без особых точек, отличных от точек трансверсального самопересечения, и что пересечения P_j и P_k все трансверсальны (всего этого можно достичь поворотом системы координат).

Т е о р е м а. *Коэффициенты зацепления L_j для кривой индекса* ind *даются формулой*

$$L_j = \sum_{X_j} \frac{\operatorname{op}(x_<, x_>)}{\operatorname{op}(\varphi, y)}, \qquad 0 < j < \operatorname{ind},$$

и формулой

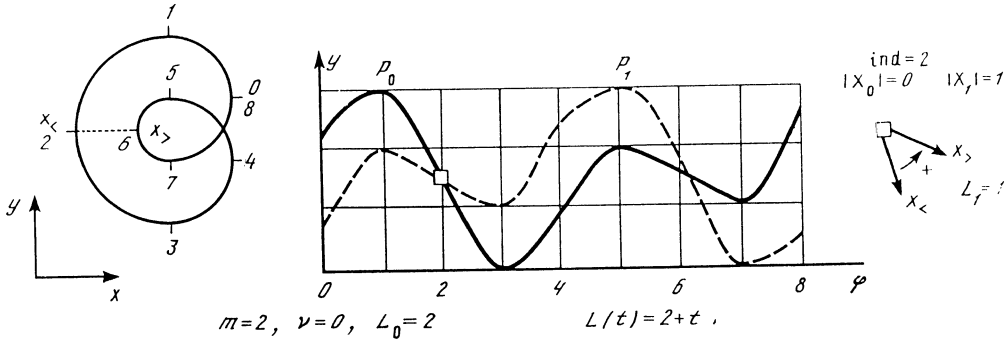
$$L_0 = \sum_{X_0} \frac{\operatorname{op}(x_<, x_>)}{\operatorname{op}(\varphi, y)} + m - \frac{\nu}{2}$$

при $j = 0$, где m — число максимумов y на P_0, ν — число точек возврата исходного фронта.

П р и м е р. Для базисных кривых без точек возврата (см. рис. 1)

$$L(K_2) = 2 + t, \qquad L(K_3) = 3 + t + t^2, \qquad L(K_4) = 4 + t + t^2 + t^3, \ldots$$

Вычисление для K_2 объяснено на рис. 23.



Р и с. 23. Вычисление коэффициентов зацепления $L[K_2]$

П р и м е р. Для базисных кривых $K_{i+1,k}$ (см. рис. 12) ($i \geq 0$ точек самопересечения, $2k$ точек возврата) и $K_{0,k}$

$$L[K_{i+1,k}] = i + k + 1 + t + t^2 + \ldots + t^i, \qquad L[K_{0,k}] = k + 1.$$

Вычисления (для $i = 3$, $k = 2$) приведены на рис. 24.

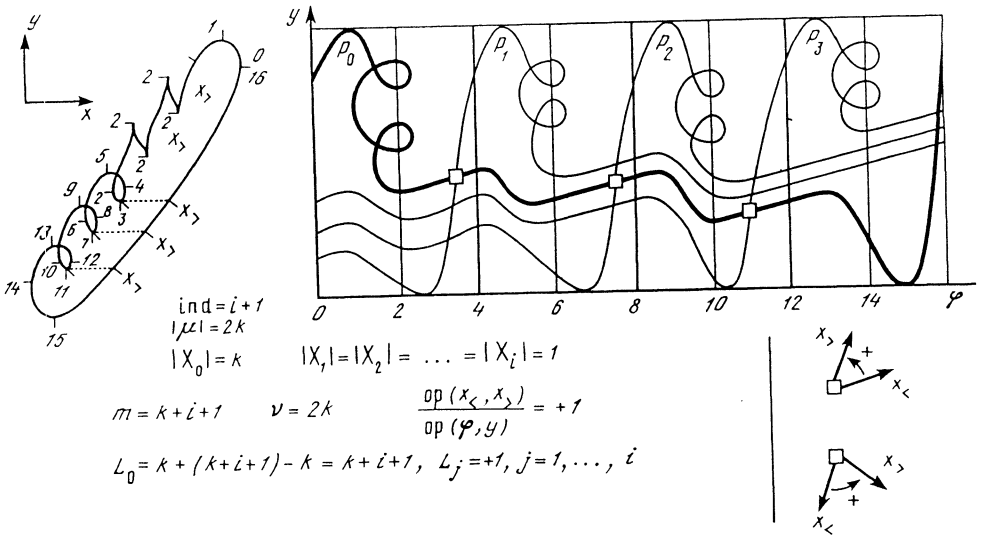


Рис. 24. Вычисление многочлена зацеплений $L[K_{i+1,k}]$

Замечание. Описанный здесь алгоритм годится и для кривых индекса нуль, но для них обычно проще использовать проекцию на плоскость (x, y).

Доказательство теоремы. Затягивающая 2-цепь получается добавлением к точке (x, y, φ) кривой C_0 луча $\{(\xi \geq x, y, \varphi)\}$. Индексы пересечения вычисляются, как в случае ind $= 0$.

12. Число зацеплений и инвариант J^+

Теорема. *Сумма числа зацеплений $L(1)$ и инварианта J^+ для любой лежандровой иммерсии без опасных самокасаний фронта равна* 1 :

$$L[K](1) + J^+(K) = 1.$$

Доказательство. Для базисных иммерсий каждой компоненты связности (см. рис. 12) мы независимо вычислили число зацеплений и значение J^+. Так, согласно разд. 11

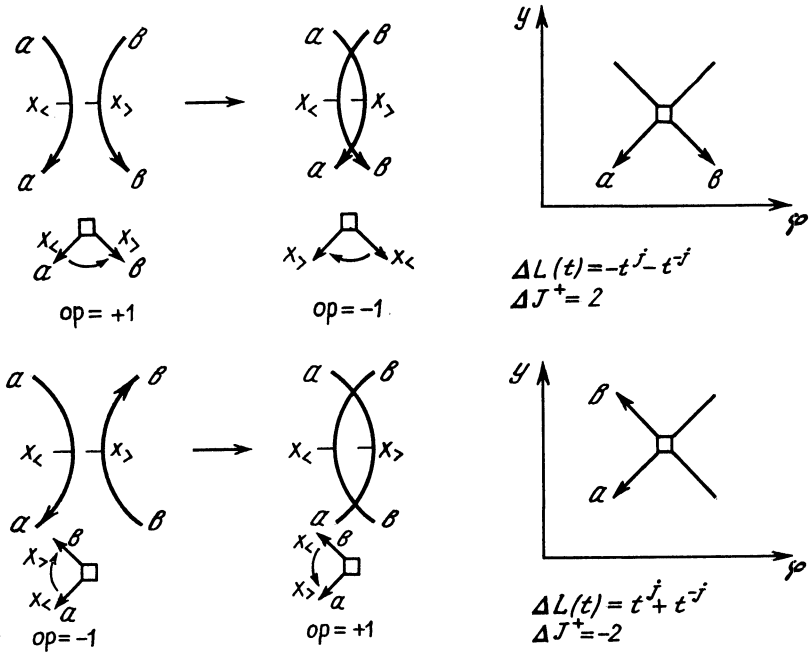
$$L[K_{i+1,k}](1) = 2i + k + 1 \quad \text{при} \quad i \geq 0,$$

$$L[K_{0,k}](1) = k + 1,$$

а согласно разд. 7

$$J^+(K_{i+1,k}) = -2i - k, \qquad J^+(K_{0,k}) = -k.$$

Поэтому достаточно проверить следующее утверждение.



Р и с. 25. Изменение $L(t)$ при прохождении опасного касания

Л е м м а. ***При прохождении отрицательного опасного самокасания фронта число зацеплений меняется так же, как число двойных точек фронта, а положительного — противоположным образом.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для удобства рисования предположим, что касающиеся ветви фронта имеют противонаправленные кривизны (этого можно добиться диффеоморфизмом плоскости, не меняющим ни L, ни J^+).

На рис. 25 изображены вклады окрестности точки самокасания в вычисление L в системе координат, в которой общая касательная обеих ветвей фронта трансверсальна оси x.

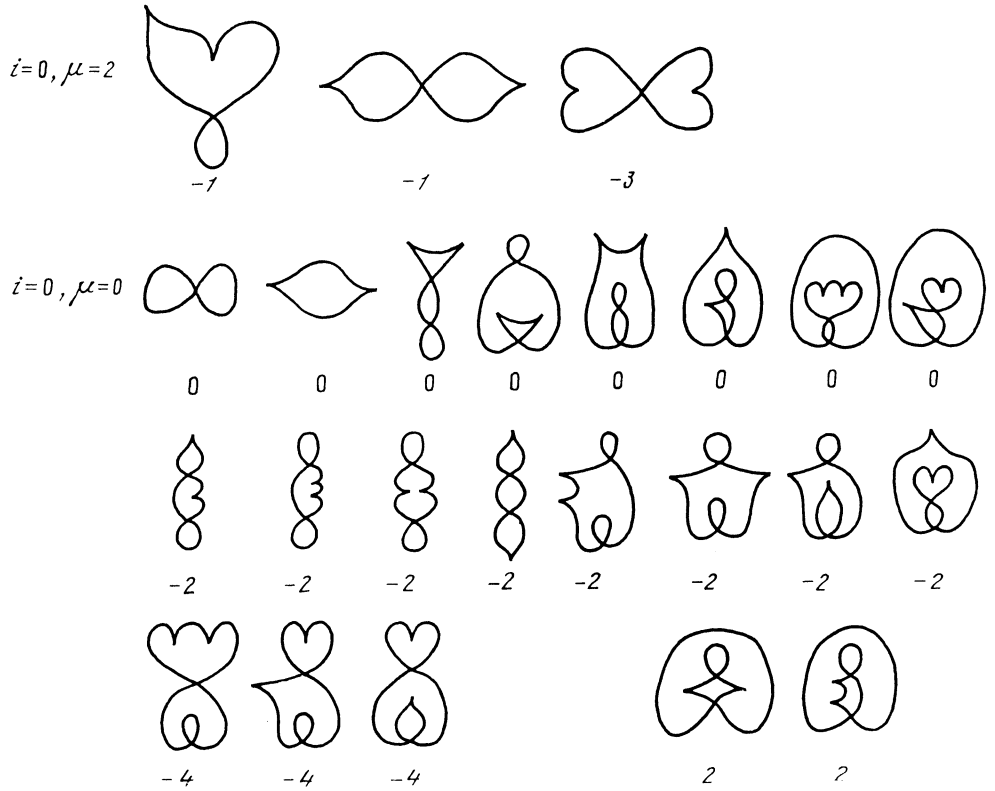
При прохождении касания точки параллельности касательных на обеих ветвях, соответствующие одинаковым значениям y, меняются ролями: левая ветвь, на которой до касания было $x_<$, после касания становится правой ($x_>$).

На рис. 25 изображен лишь один вариант положительного и лишь один — отрицательного опасного касания, но оставшиеся случаи получаются сменой ориентации всего фронта, что не влияет ни на $L(1)$, ни на J^+.

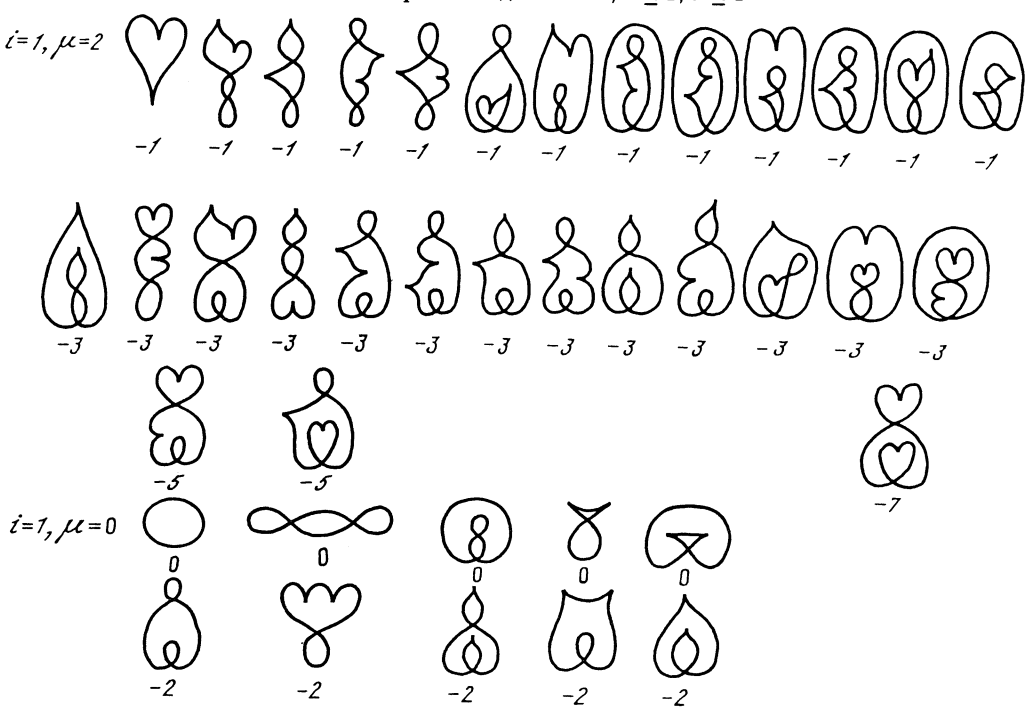
Число j на рис. 25 — это разность номеров поднятых кривых. Если до прохождения касания ветвь a соответствовала P_0, а ветвь b — P_j, то после прохождения ветвь b соответствует P_0, а ветвь a — кривой P_j (по условию, что рассматривается та точка пересечения из двух, для которой $x_<$ лежит на ветви P_0).

Итак, лемма, а с ней и теорема доказаны.

С л е д с т в и е 1. ***Инвариант $L(1) - 1$ аддитивен при связном суммировании фронтов.***



Р и с. 26. Фронты индекса $i = 0$, $n \leq 2$, $\nu \leq 2$



Р и с. 27. Фронты индекса $i = 1$, $n \leq 2$, $\nu \leq 2$

Следствие 2. *Инвариант* St (*странность*) *обычных иммерсий без тройных точек и без точек возврата может быть выражен явной интегральной формулой без обращения к перестройкам кривых.*

Действительно, $3\mathrm{St} = I^+ - J^+$, для I^+ явная формула указана в разд. 2, а для J^+ ее дают алгоритм вычисления $L(t)$ и доказанная теорема.

13. Таблицы простейших фронтов

Здесь собраны все фронты с не более чем двумя точками возврата и не более чем двумя точками самопересечения, и для каждого указаны значения инварианта J^+ и модулей обоих индексов (выбирая ориентацию и коориентацию, можно получить любые знаки индексов).

Список получен добавлением к окружности, восьмерке, к простейшей кривой индекса 2 и к пяти кривым рис. 2 с двумя точками самопересечения двух точек возврата любого направления в любом месте (симметричные кривые не различаются).

Из окружности получаются при этом три фронта, из восьмерки — шесть, из кривой индекса 2 с одной точкой самопересечения — десять. Кривые рис. 2 дают соответственно 16, 25, 25, 16, 25 фронтов.

Все эти 134 фронта собраны ниже по числу фронтов для различных значений индекса i и индекса Маслова μ в таблицу. Их распределение по индексам следующее:

μ	Число фронтов				
	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
0	21	10	33	5	12
2	3	29	4	17	0

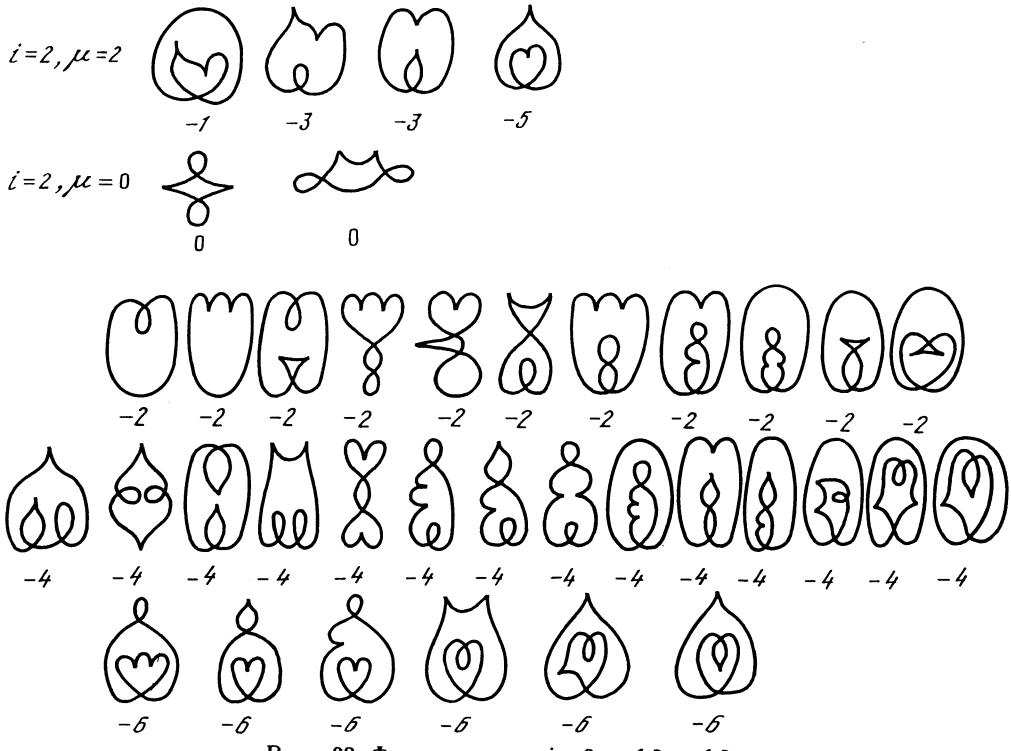
Фронты индексов $i = 0; 1$ изображены на рис. 26, 27.

Можно заметить, что число типов фронтов гораздо больше, когда числа i и $\mu/2$ (т.е. степени отображений на обе окружности S^1_1 и S^1_2, разд. 1) одной четности. Это правило сохраняется и при $i = 2$ (рис. 28).Фронты индексов $i = 3; 4$ изображены на рис. 29.

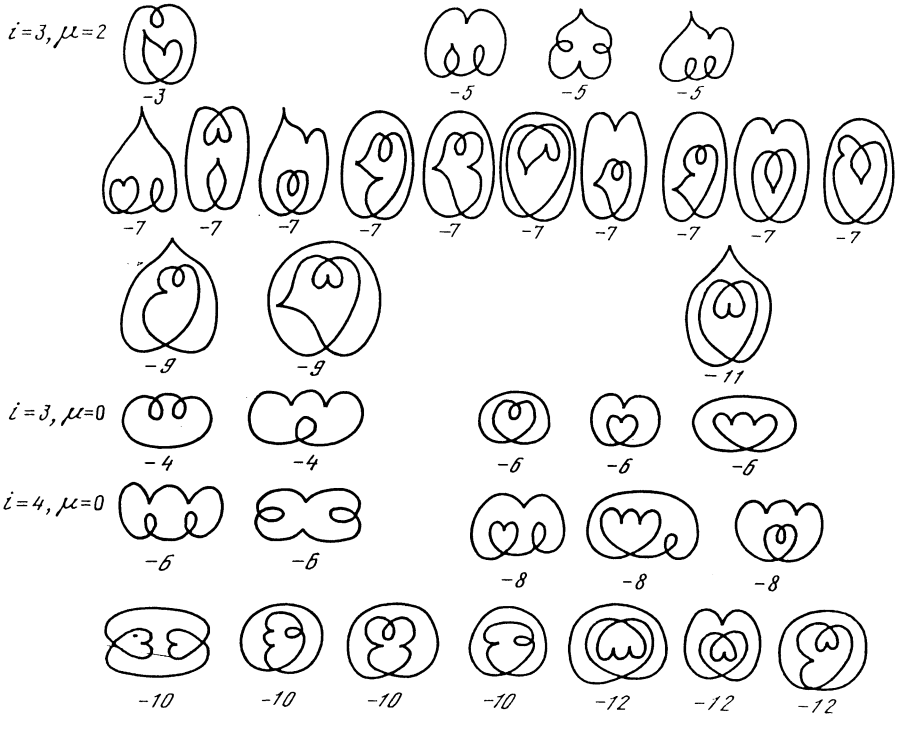
14. Лагранжев коллапс

Теория особенностей и перестроек фронтов лежандровых кривых в контактной геометрии тесно связана с теорией особенностей каустик-множеств критических значений лагранжевых отображений в симплектической геометрии.

Ниже исследуется одна из задач этой теории — задача об особенностях, возникающих при приведении в общее положение точечной каустики. Эта задача, впервые рассмотренная в работе [4], является симплектическим обобщением задач о каустиках римановых поверхностей, близких к сферам, и о вершинах плоских кривых, и излагаемые ниже результаты, предварительно опубликованные в [4], являются обобщениями классической теоремы о четырех вершинах.



Р и с. 28. Фронты индекса $i = 2$, $n \leq 2$, $\nu \leq 2$



Р и с. 29. Фронты индексов $i = 3$ и 4, $n \leq 2$, $\nu \leq 2$

Определение. *Стандартным лагранжевым цилиндром* $L^n \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^n$ называется график градиента функции $\pm|q|$ в евклидовом пространстве:

$$L^n = \{p, q : \exists t : p^2 = 1, \ q = pt\}.$$

Эта формула задает точное лагранжево вложение цилиндра $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ ($p \in S^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$) в пространство кокасательного расслоения $\mathbb{R}^{2n}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Стандартный цилиндр является точным лагранжевым (гладким) многообразием, так как $pdq = dt$ на L.

Определение. *Стандартный лагранжев коллапс*

$$L^n \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$$

— это проекция стандартного лагранжева цилиндра на базу кокасательного расслоения евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Проекция $(p, q) \mapsto q$ отображает L^n в $\mathbb{R}^n$ локально диффеоморфно и двулистно над каждой точкой $q \neq 0$. В начало же координат сжимается целая сфера $S^{n-1} \times 0$.

Множество критических значений (каустика) отображения $L^n \to \mathbb{R}^n$ состоит из одной бесконечно вырожденной точки 0. Мы собираемся исследовать каустики близких к L^n точных лагранжевых многообразий L^n.

Пример 1. Рассмотрим семейство нормалей к окружности на плоскости. Qрты нормалей во всех точках образуют лагранжев цилиндр (я отождествляю касательные и кокасательные векторы евклидовой плоскости).

Этот цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$ есть стандартный лагранжев цилиндр в $\mathbb{R}^4$, а его проекция на $\mathbb{R}^2$ — стандартный лагранжев коллапс.

При деформации окружности цилиндр ортов нормалей деформируется, но остается точным лагранжевым цилиндром, близким к исходному стандартному. Критические значения проекции продеформированного цилиндра на плоскость — это центры кривизны продеформированной кривой. Теорема о четырех вершинах утверждает, что каустика (т.е. фокальное множество — множество центров кривизны) выпуклой кривой общего положения имеет не менее четырех точек возврата.

Пример 2. Рассмотрим геодезические, выходящие из северного полюса сферы S^2. Они встречаются вновь на южном полюсе. Соответствующее лагранжево подмногообразие пространства кокасательного расслоения сферы образовано ортами касательных к этим геодезическим во всех точках (я опять отождествил касательные и кокасательные векторы риманова многообразия).

Это лагранжево подмногообразие является гладким. Его проекция на сферу имеет особенности над полюсами сферы. В окрестности прообраза полюса эти особенности лагранжево эквивалентны стандартному лагранжеву коллапсу цилиндра в $\mathbb{R}^2$ (т.е. превращаются в него симплектоморфизмом фазового пространства T^*S^2, расслоенным над диффеоморфизмом окрестности полюса). Эта эквивалентность следует из леммы Морса, так как квадрат расстояния до полюса имеет в нем невырожденную критическую точку.

При деформации метрики на сфере (оставляющей кривизну положительной) многообразие L ортов, касательных к геодезическим, выходящим из северного полюса, остается лагранжевым (это цилиндр, иммерсированный в T^*S^2). Критические точки его лагранжевой проекции на S^2 образуют последовательность замкнутых кривых, не пересекающихся на иммерсируемом цилиндре.

Их проекции на сферу являются каустиками исходного полюса (первая каустика близка к южному полюсу, вторая – к северному, третья — к южному и т.д., если метрика близка к стандартной).

Из формулируемых ниже теорем следует, что каждая из этих маленьких каустик общего положения имеет по меньшей мере четыре точки возврата. Я думаю, что это верно и для "длинных" каустик всех выпуклых поверхностей. Для первой каустики это классический результат вариационной теории геодезических. Но для следующих каустик, насколько я знаю, оценка числа критических точек снизу неизвестна даже в случае эллипсоида.

Проблема точек возврата каустик эллипсоидов исследовалась уже Якоби [11], утверждавшим, что эти каустики общего положения имеют ровно четыре точки возврата. Однако Якоби умер, не успев опубликовать доказательства. Попытки доказать утверждение Якоби предпринимались комментаторами последнего тома его собрания сочинений, но без большого успеха. Проблема числа особых точек каустик эллипсоидов, по-видимому, не поддается усилиям алгебраических геометров несмотря на то, что проблема о геодезических интегрируема и решена Якоби в тета-функциях. Частичные результаты имеются в статье [12], на которую мне указал Х. Кноррер, которому я очень благодарен.

Перестройки фронтов, соответствующие задачам примеров 1 и 2, — это перестройки семейств эквидистант (исходной кривой на плоскости в примере 1, исходного полюса в примере 2) при изменении расстояния от начального объекта. При стандартном коллапсе эквидистанты сжимаются в точку, но при возмущении они испытывают вблизи этой точки ряд превращений, меняющих коориентацию исходного фронта, диффеоморфного окружности. Например, последовательные перестройки эквидистант эллипса — такие же, как на рис. 13 внизу (случай $k = 0$, $j = 1$; исходная эквидистанта справа, перестроенная слева).

Аналогичные перестройки фронтов можно определить и в общем случае лагранжева коллапса без всякой римановой метрики (нужно начать с функции $t = \int p\,dq$ на возмущенном лагранжевом цилиндре — ее гиперповерхности уровня и проектируются в "фронты").

Интересно также обобщение на лагранжев коллапс вдоль подмногообразия конфигурационного пространства, когда $\pm|q|$ заменяется $\pm$ расстоянием до подмногообразия.

15. Распад особенностей лагранжева коллапса

Доказываемые ниже общие результаты в применении к задаче о распаде особенностей стандартного лагранжева коллапса приводят к следующему выводу.

Т е о р е м а. *Число точек возврата каустики лагранжевой проекции возмущенного точного лагранжева цилиндра на плоскость не меньше четырех, если возмущенный цилиндр общего положения достаточно близок (с производными) к стандартному.*

З а м е ч а н и е. Ограничения близости, при которых это доказано, точнее указаны ниже (разд. 18). Вероятно, результат остается справедливым при значительно более слабых ограничениях. Например, можно предполагать, что он верен для вложенных точных лагранжевых цилиндров, полученных из стандартного гамильтоновой изотопией с компактным носителем, или хотя бы для таких оптических цилиндров (принадлежащих квадратично-выпуклой по импульсам гиперповерхности фазового пространства); возможно, что существенно условие $p \neq 0$ на цилиндре, также используемое в приведенном ниже доказательстве.

Все перечисленные условия автоматически выполнены для цилиндров, близких к стандартному. Для иммерсированных цилиндров число точек возврата, по-видимому, может быть меньше (это, кажется, следует из результатов работы [13] о единственности "индекса", различающего семейства функций одной переменной без критических точек коразмерности 2, но нужный результат подробно доказан в [13] лишь для семейств функций на прямой, а необходим — для семейств функций на окружности).

Цилиндры, возникающие в теореме о четырех вершинах выпуклой плоской кривой, удовлетворяют нужным нам условиям близости к стандартному лагранжеву цилиндру, поэтому теорема о четырех вершинах является частным случаем нашей общей симплектической теоремы.

В задаче же о каустиках точки на выпуклой поверхности части цилиндра вблизи полюсов удовлетворяют условиям близости, лишь если метрика достаточно близка к стандартной, причем степень близости метрики к стандартной повышается при увеличении номера каустики.

Доказательство симплектического варианта теоремы о четырех вершинах сводится при помощи техники производящих функций лагранжевых многообразий (см. разд. 17) к следующей теореме.

16. Теорема типа Штурма–Табачникова

Рассмотрим 2π-периодическую по φ гладкую функцию $f(S,\varphi)$ на плоскости, ограниченную вместе со второй производной по φ.

Т е о р е м а. *Ограничение функции S на кривую на цилиндре $\{S, \varphi \bmod 2\pi\}$, заданную уравнением*

$$S + f(S,\varphi) + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0,$$

имеет не менее четырех критических точек (в предположении, что эта кривая гладкая).

Доказательство. Кривая состоит из связных компонент, лежащих в кольце $|S| \le c_1$. Если число компонент больше единицы, то максимумы и минимумы S на компонентах доставляют нужные четыре критические точки.

Предположим, что компонента одна. Функция на цилиндре

$$H(S,\varphi) = S + f + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

положительна с одной и отрицательна с другой стороны от нашей кривой, разделяющей области $S > c_1$ и $S < -c_1$.

Предположим, что число критических точек ограничения S на нашу кривую меньше четырех. В этом случае как максимум, так и минимум S на кривой достигаются в одной точке, а каждое промежуточное между максимумом и минимумом значение S — ровно в двух точках. Разность значений φ в этих двух точках определяет непрерывную функцию от значения S. Значения этой непрерывной функции в минимуме и в максимуме различаются на 2π. Поэтому существует значение S_0, достигаемое в противоположных точках кривой: $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi \pmod{2\pi}$.

Знаки $H(S_0,\cdot)$ на двух дугах, разделенных этими точками, различны. Поэтому существует функция $a\cos\varphi + b\sin\varphi$, имеющая такие же нули, как $H(S_0,\cdot)$, и такие же знаки в остальных точках окружности. Для этой функции

$$\int_0^{2\pi} (a\cos\varphi + b\sin\varphi) H(S_0,\varphi)\, d\varphi > 0.$$

Но функция $f + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$ при любом фиксированном значении S ортогональна $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ (так как оператор $\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+1$ убивает эти гармоники ряда Фурье). Итак, положительный интеграл равен нулю — противоречие доказывает, что число критических точек ограничения не меньше четырех.

Замечание. В инфинитезимальном варианте проблемы рождения точек возврата каустики при бесконечно малых возмущениях стандартного лагранжева коллапса точки возврата находятся из уравнения $f''' + f' = 0$, где f — 2π-периодическая функция на окружности, описывающая инфинитезимальное возмущение.

У такого уравнения всегда не меньше четырех корней на окружности, поскольку функция $f''' + f'$ ортогональна 1, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$. С.Л. Табачников [5] заметил, что более общим образом функция

$$\sum a_k \cos k\varphi + \sum b_k \sin k\varphi, \qquad k \ge n,$$

имеет не менее $2n$ корней на окружности (аналогичный результат верен и для других операторов Штурма–Лиувилля).

Я не нашел применений этой общей теоремы Табачникова к оценке числа лагранжевых особенностей A_n более высокого порядка.

Возмущения лагранжева коллапса в пространствах большего числа измерений, даже в инфинитезимальном варианте постановки задачи, приводят к своеобразным

аналогам теории Штурма для функций на сферах. Эти аналоги должны дать, в частности, симплектическое обобщение теоремы о четырех омбилических точках на выпуклой поверхности, а также оценку снизу числа других особенностей каустик точек на выпуклых гиперповерхностях большей размерности и фокальных множеств выпуклых гиперповерхностей в евклидовом пространстве, например трехмерном.

Я должен сознаться, что не понимаю глубоких причин появления теории типа Штурма при анализе деформаций лагранжева коллапса. Все же можно надеяться, что переход от инфинитезимальных возмущений лагранжева коллапса, исследуемых теорией Штурма, к не слишком большим конечным возмущениям, осуществляемый в настоящей работе, можно продолжить до анализа больших возмущений, подобно тому как переход от инфинитезимальных симплектоморфизмов (и лагранжевых пересечений), исследуемых теорией Морса, к не слишком большим конечным возмущениям, осуществленный в работе [14], был продолжен в теории Конли, Цендера, Флоера и др.:

$$\begin{array}{ccccc}
\left(\begin{array}{l}\text{Неподвижные точки}\\ \text{инфинитезимальных}\\ \text{симплектоморфизмов}\end{array}\right) & — & (\text{Теория Морса}) & — & \left(\begin{array}{l}\text{Теория Конли,}\\ \text{Цендлера, Флоера}\end{array}\right) \\
| & & | & & | \\
\left(\begin{array}{l}\text{Инфинитезимальные}\\ \text{деформации лагранжева}\\ \text{коллапса}\end{array}\right) & — & (\text{Теория Штурма}) & — & (\quad ? \quad).
\end{array}$$

17. Приспособленные симплектические координаты

Чтобы сформулировать условия близости возмущенного цилиндра к невозмущенному, удобно описывать возмущенный цилиндр в системе координат, построенной по исходному невозмущенному цилиндру. Сущность дела в том, что окрестность лагранжева подмногообразия любого симплектического многообразия симплектоморфна окрестности сечения в пространстве его собственного кокасательного расслоения (теорема А. Вейнстейна).

В случае стандартного лагранжева цилиндра эта окрестность — все дополнение к нулевому сечению $p = 0$ пространства кокасательного расслоения $T^*\mathbb{R}^n$. Если еще $n = 2$, то кокасательное расслоение цилиндра естественно тривиализовано и мы получаем не только симплектоморфизм на окрестность сечения в пространстве кокасательного расслоения цилиндра, но и систему координат.

Окончательные формулы выглядят следующим образом. Рассмотрим многообразие $S^1 \times \mathbb{R}^3$ с координатами $(\varphi \bmod 2\pi, r, A, B)$ и пространство $\mathbb{R}^4 = T^*\mathbb{R}^2$ кокасательного расслоения плоскости $\{(x, y)\}$ с обычными симплектическими координатами (x, y, p_x, p_y) и формой действия $p_x dx + p_y dy$.

Определение. *Приспособленной картой* стандартного лагранжева коллапса называется отображение $S^1 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, заданное следующими формулами:

$$\begin{cases} p_x = A\cos\varphi, & p_y = A\sin\varphi, \\ x = r\cos\varphi + B\sin\varphi, & y = r\sin\varphi - B\cos\varphi. \end{cases} \tag{1}$$

Лемма 1. *Отображение* (1) *является диффеоморфизмом области* $A > 0$ *в* $S^1 \times \mathbb{R}^3$ *на область* $p \neq 0$ *в* $\mathbb{R}^4$.

Доказательство. Точка $p \neq 0$ определяет по формулам (1) значения $A > 0$ и $\varphi \bmod 2\pi$ однозначно. После этого вектор (r, B) получается из вектора (x, y) поворотом на угол φ.

Лемма 2. *Имеет место тождество*

$$p_x dx + p_y dy = P_r dr + P_\varphi d\varphi, \tag{2}$$

где

$$P_r = A, \qquad P_\varphi = AB. \tag{3}$$

Доказательство. Коэффициенты разложения $p_x dx + p_y dy$ при dA и dB в силу (1) равны нулю. Вычисление коэффициентов при dr и $d\varphi$ дает соответственно

$$A\cos^2\varphi + A\sin^2\varphi = A, \qquad Ar(\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\varphi) + AB(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = AB.$$

Следствие. *Отображение* (1) *является симплектоморфизмом области* $P_r > 0$ *пространства кокасательного расслоения цилиндра* $\{\varphi \bmod 2\pi, r\}$ *(со стандартными симплектическими координатами* $(r, \varphi, P_r, P_\varphi)$ *и формой действия* $P_r dr + P_\varphi d\varphi$*) на дополнение к нулевому сечению* $p = 0$ *пространства кокасательного расслоения плоскости (со стандартными симплектическими координатами* (x, y, p_x, p_y) *и формой действия* $p_x dx + p_y dy$*). Формы действия переходят при отображении* (1) *одна в другую, а в стандартный лагранжев цилиндр в* $\mathbb{R}^4$ *отображается сечение* ($P_r = 1$, $P_\varphi = 0$) *пространства кокасательного расслоения цилиндра* $\{\varphi \bmod 2\pi, r\}$.

Близкий к стандартному точный лагранжев цилиндр задается в наших приспособленных координатах $(r, \varphi, P_r, P_\varphi)$ производящей функцией $S(r, \varphi)$, 2π-периодической по φ, по формулам

$$P_r = \partial S/\partial r, \qquad P_\varphi = \partial S/\partial \varphi, \tag{4}$$

причем функция S близка к r, если цилиндр близок к стандартному.

В этих обозначениях основной результат нашего исследования возмущений лагранжева коллапса формулируется следующим образом.

18. Теорема о не слишком больших конечных возмущениях стандартного лагранжева коллапса

Пусть $S(r, \varphi)$ — 2π-периодическая по φ гладкая функция, совпадающая с r всюду, кроме области $|r| < C_2$, и всюду строго монотонная по r (так что $\partial S/\partial r > 0$).

Теорема. *Каустика проекции на плоскость* (x, y) *лагранжева возмущенного цилиндра общего положения, заданного производящей функцией* S *по формулам* (4) *разд.* 17, *имеет не меньше четырех точек возврата.*

Доказательство. Критические точки проекции определяются из уравнения

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right)=0.$$

Это уравнение согласно (1)–(4) имеет для нашего возмущенного цилиндра вид

$$\det\begin{vmatrix} c+B_r s & s-B_r c \\ Bc+(-r+B_\varphi)s & Bs-(-r+B_\varphi)c \end{vmatrix}=0,$$

где $c=\cos\varphi$, $s=\sin\varphi$ (здесь и далее исправлены в формулах из [4] знаки).

Итак, уравнение кривой критических точек проектирования цилиндра на плоскость (x,y) имеет вид

$$-r+B_\varphi-BB_r=0.$$

Вдоль ядра производной проектирования цилиндра в критической точке обращается в нуль dx и dy. Следовательно, согласно (2) и (4) это ядро определяется из условия $dS=0$.

Точки возврата каустики — это образы точек, где ядро касается кривой критических точек. Следовательно, мы должны доказать, что ограничение функции S на кривую критических точек проектирования цилиндра имеет не менее четырех критических точек.

В условиях теоремы можно использовать S и φ вместо r и φ в качестве координат на поверхности цилиндра. Оказывается, в этих координатах исследование критических точек ограничения S на кривую критических точек сводится к теореме типа Штурма–Табачникова из разд. 16.

Начиная с этого места я буду обозначать частные производные в системе координат (r,φ) нижними индексами, а в системе координат (S,φ) — дробями, так что, например, u_φ — это производная функции u по φ при постоянном r, $\partial u/\partial\varphi$ — производная функции u по φ при постоянном S. Кроме того, я буду пользоваться старинными обозначениями, в которых одна и та же буква (например, u, см. выше) со знаками аргументов (скажем, $u(r,\varphi)$ или $u(S,\varphi)$) используется для обозначения одной и той же функции точки нашего цилиндра, выражения которой через координаты совершенно различны.

Выражение r через координаты S и φ можно записать в виде

$$r=S+f(S,\varphi),\qquad \partial f/\partial S>-1,$$

где $f=0$ при $|S|\geq C_3$.

Переходя к дифференциалам, мы получаем

$$dr=\left(1+\frac{\partial f}{\partial S}\right)dS+\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)d\varphi.$$

В соответствии с (4) цилиндр L задается функциями

$$P_r=\left(1+\frac{\partial f}{\partial S}\right)^{-1},\qquad P_\varphi=-\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\left(1+\frac{\partial f}{\partial S}\right)^{-1}.$$

Поэтому из формул (4) и (3) получается простое выражение для отношения P_φ/P_r:

$$B = -\frac{\partial f}{\partial \varphi}\Big|_{S=\mathrm{const}}.$$

Следовательно, комбинация производных от B, входящая в уравнение кривой особых точек, также имеет простой смысл:

$$B_\varphi - BB_r = \frac{\partial B}{\partial \varphi}\Big|_{S=\mathrm{const}}.$$

Окончательно уравнение кривой особых точек проектирования лагранжева цилиндра на плоскость (x, y) записывается в наших координатах в виде

$$S + f(S, \varphi) + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0.$$

По доказанной в разд. 16 теореме ограничение S на эту кривую имеет не менее четырех критических точек.

Значит, каустика проектирования возмущенного лагранжева цилиндра на плоскость имеет не меньше четырех точек возврата. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из доказательства видно, что финитность возмущения ($S = r$ при $|r| \geq C_2$) не имеет большого значения для доказательства — достаточно, например, чтобы разность $S - r$ была ограничена вместе со вторыми производными (в предположении, что $\frac{\partial S}{\partial r} > C_4 > 0$).

Можно даже допустить (умеренный) рост функции f при $|S| \to \infty$. Достаточно, чтобы функция $H(S, \varphi) = S + f + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right)$ стремилась к $\pm\infty$ при стремлении S к $\pm\infty$.

Это замечание позволяет приспособить наше доказательство к случаю обычной теоремы о четырех вершинах выпуклой плоской кривой. Таким образом, наш симплектический вариант теоремы о четырех вершинах действительно является обобщением обычной теоремы.

19. Теорема о четырех вершинах и перестройки фронтов без опасных касаний

Рассмотрим в пространстве кокасательного расслоения оптический гамильтониан, т.е. квадратично-выпуклую по импульсам, компактную в каждом слое гиперповерхность V, отделяющую от бесконечности нулевое сечение $p = 0$.

П р и м е р. Уравнение эйконала $p^2 = 1$ в $T^*\mathbb{R}^n$ доставляет такую гиперповерхность. Любая близкая (с производными) гиперповерхность также является оптической. Например, можно рассмотреть уравнение эйконала римановой метрики.

Здесь обсуждаются возможные обобщения теоремы о четырех вершинах на этот случай (при $n = 2$) и в результате получаются гипотезы о перестройках фронтов, формулировавшиеся во Введении.

Начнем с построения лагранжева цилиндра. Рассмотрим слой расслоения поверхности V на сферы над B^n, т.е. множество V_0 принадлежащих V импульсов в какой-либо точке $0 \in B^n$. Это — выпуклая поверхность, "сфера" в $T_0^* B^n$.

Характеристики гиперповерхности V, выходящие из точек указанной "сферы" V_0, образуют (локально) цилиндр, так как они не могут касаться слоя кокасательного расслоения.

Действительно, если $H = 0$ — уравнение V, то для характеристического (гамильтонова) поля X и всякого вектора v имеет место равенство $\omega(X, v) = dH(v)$, где ω — симплектическая структура. Если бы вектор X касался слоя кокасательного расслоения, то для трансверсального V вектора v, касающегося этого слоя, левая часть обратилась бы в нуль, а правая — нет.

Отсюда вытекает, что продолжения характеристик, выходящих из точек нашей "сферы" V_0, определяют иммерсию цилиндра $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ в $T^* B^n$ (я предполагаю для простоты, что характеристики продолжаются неограниченно). Ибо фазовый поток состоит из диффеоморфизмов.

Этот цилиндр лагранжев и точен. Ибо фазовый поток состоит из симплектоморфизмов, и все характеристики косоортогональны исходной изотропной "сфере".

Точность цилиндра означает здесь точность формы действия pdq, поднятой на цилиндр. Эта точность следует из того, что $dq = 0$ на V_0.

Определим на цилиндре функцию t как интеграл этой точной формы (по любому пути от любой точки начальной "сферы" до текущей точки). Мы получили вложение цилиндра в пространство $J^1(B^n, \mathbb{R})$ один-струй функций на B^n. Это пространство является произведением $J^1(B^n, \mathbb{R}) \approx T^* B^n \times \mathbb{R}$ пространства кокасательного расслоения на ось t. Пространство J^1 размерности $2n + 1$ контактное, с контактной структурой $dt = pdq$. Поднятый цилиндр является в этом контактном пространстве лежандровым (интегральным n-мерным) вложенным подмногообразием.

Лемма. *Функция t на поднятом цилиндре не имеет критических точек.*

Доказательство. По условию оптичности "сферы" V_0, получающиеся при пересечении гиперповерхности V со слоями кокасательного расслоения, выпуклые и содержат точку $p = 0$ внутри. Поэтому они звездны. Значит, уравнение V можно задать такой функцией Гамильтона H, что значение dH на векторе p из $T_b^* B \approx T_p T_b^* B$ в каждой точке V будет равно единице. Это условие однозначно определяет характеристическое векторное поле X на поверхности V, касающееся лагранжева цилиндра. На векторе этого поля $dt(X) = pdq(X) = dH(p) = 1 \neq 0$.

Таким образом, сечения $t = \text{const}$ лежандрова цилиндра в J^1 являются гладкими вложенными интегральными поверхностями контактной структуры. Их проекции в V также вложены, так как получаются из исходной вложенной "сферы" V_0 диффеоморфизмами фазового потока поля X.

Рассмотрим теперь естественную проекцию гиперповерхности V в $T^* B^n$ на пространство коориентированных контактных элементов $ST^* B^n$ (сопоставляющее каждому кокасательному вектору $p \in V \subset T^* B$ его направление). Поскольку гиперповерхность V звездна в каждом слое над точкой из B, это отображение является

диффеоморфизмом. Поэтому проекции в ST^*B^n сечений $t = \text{const}$ лежандрова цилиндра, лежащего в J^1, являются вложенными лежандровыми подмногообразиями естественной контактной структуры пространства коориентированных контактных элементов базы. При $n = 2$ это означает, что фронты этих лежандровых подмногообразий не имеют опасных самокасаний.

Итак, мы сопоставили оптической гиперповерхности $V \subset T^*B^n$ и исходной точке базы лежандров цилиндр в $J^1(B^n, \mathbb{R})$, расслоенный на диффеоморфные сфере изохроны $t = \text{const}$, и семейство зависящих от t лежандровых вложений этих изохрон в контактное $(2n-1)$-мерное многообразие коориентированных контактных элементов базы ST^*B^n. Особенности каустики лагранжева проектирования исходного лагранжева цилиндра заметаются при изменении t особенностями движущихся фронтов этих лежандровых вложений.

При $n = 2$ каустика кривая и ее точки возврата соответствуют перестройкам рождения и смерти пары точек возврата движущегося фронта. Поэтому гипотеза о неизбежности четырех перестроек рождения или смерти точек возврата коориентированного фронта, движущегося по плоскости без опасных самокасаний, при переходе от окружности, коориентированной внутренними нормалями, к окружности, коориентированной внешними нормалями, является непосредственным обобщением теоремы о четырех вершинах.

Это обобщение и привело к исследованию инвариантов фронтов без опасных самокасаний, а тем самым и ко всем результатам работы [1] и настоящей работы.

Поступило в январе 1994 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arnold V.I.* Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications. Zürich, 1993. 58 p. (Prepr. /Forschungsinst. für Math. ETH).
2. *Табачников С.Л.* Вычисление обобщенного инварианта Беннекена при помощи фронтов //Функцион. анализ и его прил. 1988. Т. 22, № 3. С. 89–90.
3. *Bennequin D.* Entrelacements et équation de Pfaff //Astérisque. 1983. Vol. 107/109. P. 87–162.
4. *Arnold V.I.* Sur les propriétés topologiques des projections lagrangiennes en géométrie symplectique des caustiques //Cah. math. decision. 1993. N 9320. P. 1–9.
5. *Табачников С.Л.* Вокруг четырех вершин //УМН. 1990. Т. 45, № 1. С. 229–230.
6. *Громов М.Л.* Неравенства с частными производными. М.: Мир, 1991.
7. *Smale S.* A classification of immersions of the 2-sphere //Trans. Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 90. P. 281–290.
8. *Whitney H.* On regular closed curves in the plane //Compos. Math. 1937. Vol. 4. P. 276–284.
9. *Aicardi F.* Classification and invariants of tree-like plane curves. Trieste, 1993. 17 p. (Prepr. /ICTP).
10. *Арнольд В.И.* Лагранжев и лежандров кобордизм — II //Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, № 4. С. 8–17.
11. *Якоби К.* Лекции о динамике. М.: ОНТИ, 1936. (B.: Reimer, 1884).
12. *Braunmuhl A.V.* Geodatische Linien und ihre Enveloppen auf Dreiaxigen Flachen Zweiten Grades //Math. Ann. 1982. Bd. 20. S. 557–586.
13. *Арнольд В.И.* Пространства функций с умеренными критическими точками //Функцион. анализ и его прил. 1989. Т. 23, № 3. С. 1–10.
14. *Arnold V.I.* Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique //C.r. Acad. sci. 1965. Vol. 261. P. 3719–3722.