Н. В. Глотко, В. И. Кузьминов, О когомологической последовательности в полуабелевой категории, *Сиб. матем. журн.*, 2002, том 43, номер 1, 41–50

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 512.66

О КОГОМОЛОГИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ПОЛУАБЕЛЕВОЙ КАТЕГОРИИ

Н. В. Глотко, В. И. Кузьминов

Аннотация: В полуабелевой категории строго точной последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$ коцепных комплексов соответствует когомологическая последовательность

$$\dots \to H^n(A) \to H^n(B) \to H^n(C) \to H^{n+1}(A) \to \dots.$$

Исследуются условия точности гомологической последовательности в заданном ее члене. Библиогр. 6.

Будем рассматривать аддитивные категории, в которых выполнена

Аксиома 1. *Каждый морфизм α имеет ядро $\ker\alpha$ и коядро $\operatorname{coker}\alpha$.*

В аддитивной категории, удовлетворяющей аксиоме 1, каждый морфизм α допускает каноническое разложение $\alpha = (\operatorname{im}\alpha)\bar{\alpha}(\operatorname{coim}\alpha)$, где $\operatorname{im}\alpha = \ker\operatorname{coker}\alpha$, $\operatorname{coim}\alpha = \operatorname{coker}\ker\alpha$.

Морфизм α называется *строгим*, если $\bar{\alpha}$ — изоморфизм.

Будем использовать следующие обозначения: O_c, M, M_c, P, P_c — классы всех строгих морфизмов, мономорфизмов, строгих мономорфизмов, эпиморфизмов и строгих эпиморфизмов соответственно.

Аддитивная категория называется *полуабелевой*, если в ней кроме аксиомы 1 выполнены еще следующие две аксиомы.

Аксиома 2. *В каждом универсальном квадрате*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \xrightarrow{\beta} & D \end{array} \tag{1}$$

$\alpha \in M_c \Longrightarrow \beta \in M_c$.

Аксиома 2*. *В каждом коуниверсальном квадрате*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\beta} & C \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xrightarrow{\alpha} & A \end{array} \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00795).

$\alpha \in P_c \Longrightarrow \beta \in P_c$.

Последовательность $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ называется *точной*, если $\operatorname{im}\varphi = \ker\psi$. В полуабелевой категории последовательность $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ точна тогда и только тогда, когда $\operatorname{coim}\psi = \operatorname{coker}\varphi$.

Последовательность $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ называется *строго точной*, если $\varphi = \ker\psi$ и $\psi = \operatorname{coker}\varphi$.

Строго точной последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0 \tag{3}$$

коцепных комплексов в полуабелевой категории соответствует *когомологическая последовательность*

$$\ldots \to H^n(A) \xrightarrow{H^n(\varphi)} H^n(B) \xrightarrow{H^n(\psi)} H^n(C) \xrightarrow{\Delta^n} H^{n+1}(A) \to \ldots\ . \tag{4}$$

Д. А. Райков в [1] показал, что последовательность (4) точна и морфизмы, ее образующие, являются строгими, если все дифференциалы комплексов A, B и C будут строгими морфизмами. В [2] дано следующее обобщение этого результата:

1) если дифференциал d_A^n комплекса A является строгим морфизмом, то последовательность (4) точна в членах $H^n(B)$ и $H^n(C)$, а $H^n(\psi)$ — строгий морфизм;

2) если дифференциал d_B^n комплекса B является строгим морфизмом, то последовательность (4) точна в членах $H^n(C)$ и $H^{n+1}(A)$, а Δ^n — строгий морфизм;

3) если дифференциал d_C^n комплекса C является строгим морфизмом, то последовательность (4) точна в членах $H^{n+1}(A)$ и $H^{n+1}(B)$, а $H^{n+1}(\varphi)$ — строгий морфизм.

Ясно, что условие строгости в указанном уточнении результата Д. А. Райкова в общем случае не может быть отброшено. Соответствующие примеры легко построить в категории $\mathscr{B}an$ банаховых пространств и непрерывных линейных операторов. Однако существуют полуабелевы категории, в которых каждой строго точной последовательности (3) соответствует точная последовательность (4). Так обстоит дело, например, в полуабелевых категориях, удовлетворяющих следующим условиям.

Аксиома 3. *В каждом универсальном квадрате* (1) $\alpha \in M \Longrightarrow \beta \in M$.

Аксиома 3*. *В каждом коуниверсальном квадрате* (2) $\alpha \in P \Longrightarrow \beta \in P$.

Полуабелева категория называется *специальной*, если в ней выполнены аксиомы 3 и 3*.

В настоящей работе мы заменяем условие строгости дифференциалов комплексов A, B и C более слабым условием их универсальности и в результате получаем вариант теоремы о точности когомологической последовательности (4), охватывающий случай специальных полуабелевых категорий.

В следующей лемме перечислены используемые в дальнейшем известные свойства морфизмов в полуабелевой категории.

Лемма 1 [1–3]. *В полуабелевой категории справедливы следующие утверждения и им двойственные*:

1) $\ker\alpha \in M_c$ *для каждого морфизма* α, $\beta \in M_c \Longleftrightarrow \beta = \operatorname{im}\beta$;

2) *если* $\alpha, \beta \in M_c$ *и морфизм* $\alpha\beta$ *определен, то* $\alpha\beta \in M_c$;

3) $\alpha\beta \in M_c \Longrightarrow \beta \in M_c$;

4) *в коуниверсальном квадрате* (2) $\alpha \in M \Longrightarrow \beta \in M$, $\alpha \in M_c \Longrightarrow \beta \in M_c$;

5) $\alpha\beta \in O_c$ *и* $\beta \in P \Longrightarrow \alpha \in O_c$;

6) *морфизм* $\bar\alpha$ *из канонического разложения произвольного морфизма* α *является биморфизмом, т. е.* $\bar\alpha \in M \cap P$.

Мономорфизм $\alpha : A \to B$ называется *универсальным* [4], если для любого морфизма $f : A \to C$ в универсальном квадрате (1) $\beta \in M$.

Эпиморфизм $\alpha : B \to A$ называется *универсальным*, если для любого морфизма $f : C \to A$ в коуниверсальном квадрате (2) $\beta \in P$.

Морфизм α назовем M-*универсальным*, если $\bar\alpha$ — универсальный мономорфизм, и P-*универсальным*, если $\bar\alpha$ — универсальный эпиморфизм.

Будем использовать следующие обозначения: M_u, P_u, MO_u, PO_u — классы универсальных мономорфизмов, универсальных эпиморфизмов, M-универсальных морфизмов и P-универсальных морфизмов соответственно.

Очевидно, в полуабелевой категории $M_c \subset M_u$, $P_c \subset P_u$, $O_c \subset MO_u \cap PO_u$.

Лемма 2. *В полуабелевой категории справедливы следующие утверждения и им двойственные*:

1) *если морфизм* $\alpha\beta$ *определен и* $\alpha, \beta \in P_u$, *то* $\alpha\beta \in P_u$;

2) *если* $\alpha\beta \in P_u$, *то* $\alpha \in P_u$;

3) $P_u = P \cap PO_u$;

4) *если морфизм* $\alpha\beta\gamma$ *определен,* $\alpha \in M_c$, $\gamma \in P_c$, *то* $\alpha\beta\gamma \in PO_u \Longleftrightarrow \beta \in PO_u$;

5) *в коуниверсальном квадрате* (2) $\alpha \in PO_u \Longrightarrow \beta \in PO_u$;

6) $\beta\alpha \in PO_u$, $\beta \in M \Longrightarrow \alpha \in PO_u$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 доказаны в [4, предложения 2.8 и 2.9]. Пусть $\alpha : B \to A$ — P-универсальный морфизм. Для произвольного морфизма $f : C \to A$ рассмотрим коуниверсальные квадраты

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\beta_1} & C \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \operatorname{Im}\alpha & \xrightarrow{\operatorname{im}\alpha} & A, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\beta_2} & E \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \operatorname{Coim}\alpha & \xrightarrow{\bar\alpha} & \operatorname{Im}\alpha, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\beta_3} & F \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ B & \xrightarrow{\operatorname{coim}\alpha} & \operatorname{Coim}\alpha. \end{array}$$

Квадрат

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\beta} & C \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xrightarrow{\alpha} & A, \end{array}$$

где $\beta = \beta_3\beta_2\beta_1$, коуниверсален [4, с. 44]. По лемме 1 $\beta_1 \in M_c$, β_2 — биморфизм, $\beta_3 \in P_c$. Следовательно, $\beta_2 = \bar\beta$. Легко видеть, что $\beta_2 \in P_u$. Доказано утверждение 5 леммы.

Если морфизм $\alpha\beta\gamma$ определен, $\alpha \in M_c$, $\gamma \in P_c$, то $\bar\beta = \overline{\alpha\beta\gamma}$. Поэтому $\alpha\beta\gamma \in PO_u \Longleftrightarrow \beta \in PO_u$.

Если морфизм $\beta\alpha$ определен и $\beta \in M$, то квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \beta} \\ A & \xrightarrow{\beta\alpha} & C \end{array}$$

коуниверсален. Согласно утверждению 5 $\beta\alpha \in PO_u \Longrightarrow \alpha \in PO_u$. Доказано утверждение 6.

Если $\alpha \in P$, то $\alpha = \bar{\alpha}\,\mathrm{coim}\,\alpha$. Так как $\mathrm{coim}\,\alpha \in P_c$, то по 1 и 2 $\alpha \in P_u \Longleftrightarrow \bar{\alpha} \in P_u$. Доказано утверждение 3.

Лемма доказана.

Аксиома 4. *В универсальном квадрате* (1) $\alpha \in P_u \Longrightarrow \beta \in P_u$.

Аксиома 4*. *В коуниверсальном квадрате* (2) $\alpha \in M_u \Longrightarrow \beta \in M_u$.

Доказательство следующих двух лемм аналогично доказательству пп. 5 и 6 леммы 2.

Лемма 3. *Если полуабелева категория удовлетворяет аксиоме* 4, *то в универсальном квадрате* (1) *в этой категории* $\alpha \in PO_u \Longrightarrow \beta \in PO_u$.

Лемма 4. *Если полуабелева категория удовлетворяет аксиоме* 4^*, *то* $\beta\alpha \in MO_u, \beta \in M \Longrightarrow \alpha \in MO_u$.

Лемма 5. *Пусть диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc} & & D & \xrightarrow{\gamma} & E \\ & {\scriptstyle \alpha}\nearrow & {\scriptstyle \beta}\downarrow & & {\scriptstyle \delta}\downarrow \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\psi} & C \end{array} \tag{5}$$

в полуабелевой категории коммутативна, $\psi = \mathrm{coker}\,\varphi$, $\gamma = \mathrm{coker}\,\alpha$. *Тогда*

1) *квадрат*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\gamma} & E \\ {\scriptstyle \beta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \delta} \\ B & \xrightarrow{\psi} & C \end{array} \tag{6}$$

универсален;

2) *если* $\varphi \in M_c$, *то квадрат* (6) *коуниверсален.*

Доказательство. 1. Пусть $u : B \to X$ и $v : E \to X$ — морфизмы такие, что $u\beta = v\gamma$. Так как $\psi = \mathrm{coker}\,\varphi$ и $u\varphi = u\beta\alpha = v\gamma\alpha = 0$, существует единственный морфизм $w : C \to X$, для которого $u = w\psi$. Поскольку $w\delta\gamma = w\psi\beta = u\beta = v\gamma$ и $\gamma \in P$, то $w\delta = v$. Квадрат (6) универсален.

2. Пусть $\varphi \in M_c$. Тогда по лемме 1 $\alpha \in M_c$, $\alpha = \ker\gamma$, $\varphi = \ker\psi$. Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & E \\ {\scriptstyle \beta_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \delta} \\ B & \xrightarrow{\psi} & C. \end{array}$$

Существует такой морфизм $\varepsilon : D \to D_1$, что $\gamma_1\varepsilon = \gamma$, $\beta_1\varepsilon = \beta$. Кроме того, существует такой единственный морфизм $\alpha_1 : A \to D_1$, что $\beta_1\alpha_1 = \varphi$ и $\gamma_1\alpha_1 = 0$.

Так как $\beta_1\varepsilon\alpha = \beta\alpha = \varphi$ и $\gamma_1\varepsilon\alpha = \gamma\alpha = 0$, в силу единственности морфизма α_1 имеем $\alpha_1 = \varepsilon\alpha$.

В коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ A \arrow[r, "\alpha_1"] & D_1 \arrow[r, "\gamma_1"] & E \end{tikzcd} \tag{7}$$

имеем

$$\alpha = \ker\gamma, \quad \gamma = \operatorname{coker}\alpha, \quad \alpha_1 = \ker\gamma_1, \quad \gamma_1 = \operatorname{coker}\alpha_1. \tag{8}$$

В произвольной диаграмме (7), удовлетворяющей условиям (8), морфизм ε является изоморфизмом. Это утверждение является аксиомой полуабелевой категории Д. А. Райкова. В [5] установлено, что эта аксиома в случае аддитивной категории следует из аксиом 1, 2 и 2^*.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть диаграмма*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha"'] & D \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"'] & E \arrow[d, "\delta"'] \\ A \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[r, "\psi"] & C \end{tikzcd}$$

в полуабелевой категории коммутативна, $\gamma = \operatorname{coker}\varepsilon$, $\ker\psi = \operatorname{im}\varphi$, $\varphi \in PO_u$, $\beta \in M$ *и квадрат*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha"'] & D \arrow[d, "\beta"'] \\ A \arrow[r, "\varphi"] & B \end{tikzcd}$$

коуниверсален. Тогда $\delta \in M$.

Эта лемма является обобщением леммы 6 из [3]. Там предполагалось, что $\varphi \in O_c$ и $\psi = \operatorname{coker}\varphi$. Оба эти отличия несущественны, и доказательство остается прежним.

Пусть диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A_0 \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "\alpha"'] & B_0 \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, "\beta"'] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & B_1 \arrow[r, "\psi_1"] & C_1 & \end{tikzcd} \tag{9}$$

в полуабелевой категории коммутативна, $\psi_0 = \operatorname{coker}\varphi_0$, $\varphi_1 = \ker\psi_1$.

Так же, как и в случае абелевой категории [6], для диаграммы (9) определен связывающий морфизм $\delta : \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha$, причем Ker-Coker-последовательность

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\tau} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker}\gamma \tag{10}$$

полуточна.

Теорема 1. *Если в диаграмме* (9) *в полуабелевой категории* $\alpha \in MO_u$ ($\alpha \in PO_u$), *то последовательность* (10) *точна в члене* $\operatorname{Ker}\beta$ ($\operatorname{Ker}\gamma$). *Если* $\beta \in MO_u$ ($\beta \in PO_u$), *то последовательность* (10) *точна в члене* $\operatorname{Ker}\gamma$ ($\operatorname{Coker}\alpha$).

Если $\gamma \in MO_u$ ($\gamma \in PO_u$), *то последовательность* (10) *точна в члене* $\operatorname{Coker}\alpha$ ($\operatorname{Coker}\beta$).

Доказательство. Пусть $\beta = \beta_1\bar{\beta}\beta_3$ — каноническое разложение морфизма β, квадраты

$$\begin{array}{ccccccc} A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & B_2 & \quad & A_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & B_3 \\ {\scriptstyle \alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_1} & & {\scriptstyle \alpha_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\beta}} \\ A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1, & & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & B_2 \end{array} \qquad (11)$$

коуниверсальны, $\psi_2 = \operatorname{coker}\varphi_2$, $\psi_3 = \operatorname{coker}\varphi_3$. Существуют такие морфизмы α_3, γ_1, γ_2, γ_3, для которых диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \alpha_3}\downarrow & & {\scriptstyle \beta_3}\downarrow & & {\scriptstyle \gamma_3}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & C_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \alpha_2}\downarrow & & {\scriptstyle \bar{\beta}}\downarrow & & {\scriptstyle \gamma_2}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & C_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \alpha_1}\downarrow & & {\scriptstyle \beta_1}\downarrow & & {\scriptstyle \gamma_1}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_1 & & \end{array} \qquad (12)$$

коммутативна. Так как $\varphi_1 \in M$ и $\varphi_1\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \beta\varphi_0 = \varphi_1\alpha$, то $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha$. Аналогично $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma$. Поскольку квадраты (11) коуниверсальны и $\varphi_1 \in M_c$, то $\varphi_2, \varphi_3 \in M_c$, $\alpha_1 \in M_c$, $\alpha_2 \in M$. По лемме 6 $\gamma_1, \gamma_2 \in M$. Так как $\alpha_1\alpha_2, \beta_1\bar{\beta}, \gamma_1\gamma_2 \in M$, то $\ker\alpha = \ker\alpha_3$, $\ker\beta = \ker\beta_3$, $\ker\gamma = \ker\gamma_3$.

Диаграмме, образованной первыми двумя строками диаграммы (12), соответствует Ker-Coker-последовательность, связанная с последовательностью (10) диаграммой

$$\begin{array}{ccccccccccc} \operatorname{Ker}\alpha_3 & \xrightarrow{\varepsilon'} & \operatorname{Ker}\beta_3 & \xrightarrow{\zeta'} & \operatorname{Ker}\gamma_3 & \xrightarrow{\delta'} & \operatorname{Coker}\alpha_3 & \rightarrow & 0 & & \\ \| & & \| & & \| & & {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow & & \\ \operatorname{Ker}\alpha & \xrightarrow{\epsilon} & \operatorname{Ker}\beta & \rightarrow & \operatorname{Ker}\gamma & \xrightarrow{\delta} & \operatorname{Coker}\alpha & \xrightarrow{\tau} & \operatorname{Coker}\beta & \xrightarrow{\theta} & \operatorname{Coker}\gamma. \end{array} \qquad (13)$$

Морфизм a в этой диаграмме определен условием $a(\operatorname{coker}\alpha_3) = (\operatorname{coker}\alpha)\alpha_1\alpha_2$.

Так как $\beta_3 \in P_c$, то по теореме 1 работы [3] верхняя строка диаграммы (13) точна в членах $\operatorname{Ker}\gamma_3$ и $\operatorname{Coker}\alpha_3$, причем $\delta' \in P_c$. Определим морфизмы $\widehat{\alpha}_1 : \operatorname{Coker}(\alpha_2\alpha_3) \to \operatorname{Coker}\alpha$ и $\widehat{\alpha}_2 : \operatorname{Coker}\alpha_3 \to \operatorname{Coker}(\alpha_2\alpha_3)$ условиями $\widehat{\alpha}_1 \operatorname{coker}(\alpha_2\alpha_3) = (\operatorname{coker}\alpha)\alpha_1$ и $\widehat{\alpha}_2 \operatorname{coker}\alpha_3 = (\operatorname{coker}(\alpha_2\alpha_3))\alpha_2$. Тогда $a = \widehat{\alpha}_1\widehat{\alpha}_2$. В [3, лемма 10] установлено, что $\widehat{\alpha}_1 = \ker\tau$.

Если $\beta \in PO_u$, то $\alpha_2 \in P$. Но тогда и $\widehat{\alpha}_2 \in P$. Итак, $\delta = (\ker\tau)\widehat{\alpha}_2\delta'$, $\widehat{\alpha}_2\delta' \in P$. Следовательно, $\operatorname{coker}\delta = \operatorname{coim}\tau$. Последовательность (10) точна в члене $\operatorname{Coker}\alpha$.

Пусть $\alpha \in PO_u$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} A_0 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_3 & \xrightarrow{\operatorname{coker}\alpha_3} & \operatorname{Coker}\alpha_3 \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha_2}\downarrow & & {\scriptstyle \widehat{\alpha}_2}\downarrow \\ A_0 & \xrightarrow{\alpha_2\alpha_3} & A_2 & \xrightarrow{\operatorname{coker}(\alpha_2\alpha_3)} & \operatorname{Coker}(\alpha_2\alpha_3). \end{array} \qquad (14)$$

Так как $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha$, $\alpha \in PO_u$, $\alpha_1 \in M_c$, то по п. 6 леммы 2 $\alpha_2\alpha_3 \in PO_u$. Ввиду того, что $\alpha_2 \in M$, левый квадрат диаграммы (14) коуниверсален. По лемме 6 $\widehat{\alpha}_2 \in M$. Итак, $\delta = \widehat{\alpha}_1\widehat{\alpha}_2(\operatorname{coker}\zeta)$, $\widehat{\alpha}_1\widehat{\alpha}_2 \in M$. Следовательно, $\ker\delta = \operatorname{im}\zeta$. Последовательность (10) точна в члене $\operatorname{Ker}\gamma$.

Пусть $\gamma \in PO_u$. Представим морфизм ψ_1 в виде $\psi_1 = \psi_1' \operatorname{coim}\psi_1$, где $\psi_1' = (\operatorname{im}\psi_1)\bar{\psi}_1$ — мономорфизм. Так как $\psi_0 = \operatorname{coker}\varphi_0$ и $(\operatorname{coim}\psi_1)\beta\varphi_0 = 0$, существует морфизм $\gamma' : C_0 \to \operatorname{Coim}\psi_1$, для которого $\gamma'\psi_0 = (\operatorname{coim}\psi_1)\beta$. Поскольку $\psi_1'\gamma'\psi_0 = \psi_1'(\operatorname{coim}\psi_1)\beta = \psi_1\beta = \gamma\psi_0$ и $\psi_0 \in P$, то $\psi_1'\gamma' = \gamma$.

Диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & A_0 \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "\alpha"'] & B_0 \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, "\beta"'] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & B_1 \arrow[r, "\operatorname{coim}\varphi_1"] & \operatorname{Coim}\varphi_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

соответствует Ker-Coker-последовательность, которая по теореме 2 работы [3] точна в члене $\operatorname{Coker}\beta$. Эта последовательность связана с последовательностью (10) коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\gamma' \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, equal] & \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, equal] & \operatorname{Coker}\beta \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, equal] & \operatorname{Coker}\gamma' \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\psi}_1{}'"'] & 0 \\
\operatorname{Ker}\gamma \arrow[r, "\delta"] & \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r, "\tau"] & \operatorname{Coker}\beta \arrow[r, "\theta"] & \operatorname{Coker}\gamma,
\end{tikzcd}$$

где морфизм $\widehat{\psi}_1{}'$ определен так, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \operatorname{Coim}\psi_1 \arrow[r, "\operatorname{coim}\gamma'"] \arrow[d, "\psi_1'"'] & \operatorname{Coker}\gamma' \arrow[d, "\widehat{\psi}_1{}'"'] \\
C_0 \arrow[r, "\gamma"] & C_1 \arrow[r, "\operatorname{coim}\gamma"] & \operatorname{Coker}\gamma
\end{tikzcd}$$

коммутативна. По лемме 6 $\widehat{\psi}_1{}' \in M$. Но тогда $\ker\theta = \ker\theta' = \operatorname{im}\tau$ и последовательность (10) точна в члене $\operatorname{Coker}\beta$.

Доказаны три из шести утверждений теоремы 1. Остальные три следуют из доказанных по двойственности.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если в полуабелевой категории выполнена аксиома* 4^*, *то для* Ker-Coker-*последовательности* (10) *диаграммы* (9) $\alpha \in MO_u \Longrightarrow \zeta \in MO_u$, $\beta \in MO_u \Longrightarrow \delta \in MO_u$, $\gamma \in MO_u \Longrightarrow \tau \in MO_u$. *Если выполнена аксиома* 4, *то* $\alpha \in PO_u \Longrightarrow \zeta \in PO_u$, $\beta \in PO_u \Longrightarrow \delta \in PO_u$, $\gamma \in PO_u \Longrightarrow \tau \in PO_u$.

Доказательство. В доказательстве теоремы 1 морфизм δ был представлен в виде $\delta = \widehat{\alpha}_1\widehat{\alpha}_2\delta'$, где $\widehat{\alpha}_1 \in M_c$, $\delta' \in P_c$. Если выполнена аксиома 4 и $\beta \in MO_u$, то $\alpha_2 \in MO_u$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & A_3 \arrow[r, "\operatorname{coker}\alpha_3"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & \operatorname{Coker}\alpha_3 \arrow[d, "\widehat{\alpha}_2"'] \\
A_0 \arrow[ur, "\alpha_3"] \arrow[dr, "\alpha_2\alpha_3"'] & & \\
 & A_2 \arrow[r, "\operatorname{coker}(\alpha_2\alpha_3)"] & \operatorname{Coker}(\alpha_2\alpha_3).
\end{tikzcd}$$

По лемме 5 квадрат

$$\begin{tikzcd}
A_3 \arrow[r, "\operatorname{coker}\alpha_3"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & \operatorname{Coker}\alpha_3 \arrow[d, "\widehat{\alpha}_2"'] \\
A_2 \arrow[r, "\operatorname{coker}(\alpha_2\alpha_3)"] & \operatorname{Coker}(\alpha_2\alpha_3)
\end{tikzcd}$$

универсален. Но тогда $\widehat{\alpha}_2 \in MO_u$ по утверждению, двойственному п. 5 леммы 2. По утверждению, двойственному п. 4 этой леммы, $\delta \in MO_u$.

Предположим теперь, что $\alpha \in MO_u$ и выполнена аксиома 4*. Используя каноническое разложение морфизма φ_0, представим этот морфизм в виде $\varphi_0 = (\operatorname{im}\varphi_0)\varphi_0'$, где $\varphi_0' \in P$. Так как $\psi_3\beta_3(\operatorname{im}\varphi_0) = 0$ и $\varphi_3 = \ker\psi_3$, существует такой морфизм $\alpha_3' : \operatorname{Im}\varphi_0 \to A_3$, что $\varphi_3\alpha_3' = \beta_3 \operatorname{im}\varphi_0$. Поскольку $\varphi_3\alpha_3'\varphi_0' = \beta_3(\operatorname{im}\varphi_0)\varphi_0' = \varphi_3\alpha_3$ и $\varphi_3 \in M$, то $\alpha_3'\varphi_0' = \alpha_3$. По лемме 4 $\alpha_3' \in MO_u$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker}\beta \oplus \alpha_0' \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "j"] & A_0' \arrow[d, "\varphi_3\alpha_3'"] \\
\operatorname{Ker}\beta \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r, "\ker\beta"] & B_0 \arrow[r, "\beta_3"] & B_3,
\end{tikzcd}$$

в которой i_1 — каноническое вложение первого слагаемого в прямую сумму, p_2 — каноническая проекция на второе слагаемое, $j = (\ker\beta, \operatorname{im}\varphi_0)$. По лемме 5 квадрат

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\beta \oplus A_0' \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "j"'] & A_0' \arrow[d, "\varphi_3\alpha_3'"'] \\
B_0 \arrow[r, "\beta_3"] & B_3
\end{tikzcd}$$

коуниверсален. Так как $\varphi_3 \in M_c$, по лемме 2 $\varphi_3\alpha_3' \in MO_u$. По аксиоме 4* $j \in MO_u$.

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker}\beta \oplus \alpha_0' \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "j"] & \operatorname{Ker}\beta \arrow[d, "\psi_0(\ker\beta)"] \\
A_0' \arrow[ur, "i_2"] \arrow[r, "\operatorname{im}\varphi_0"] & B_0 \arrow[r, "\psi_0"] & C_0,
\end{tikzcd}$$

в которой i_2 — каноническое вложение второго слагаемого в прямую сумму, p_1 — каноническая проекция на первое слагаемое. По лемме 5 квадрат

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\beta \oplus A_0' \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "j"'] & \operatorname{Ker}\beta \arrow[d, "\psi_0(\ker\beta)"'] \\
B_0 \arrow[r, "\psi_0"] & C_0
\end{tikzcd}$$

универсален. Так как $j \in MO_u$, то $\psi_0(\ker\beta) \in MO_u$. Поскольку $\psi_0(\ker\beta) = (\ker\gamma)\zeta$, по лемме 2 $\zeta \in MO_u$. Установлено, что при выполнении аксиомы 4* $\alpha \in MO_u \Longrightarrow \zeta \in MO_u$. Доказательство следования $\alpha \in PO_u \Longrightarrow \zeta \in PO_u$ при выполнении аксиомы 4 аналогично. Доказаны три из шести утверждений теоремы 2. Остальные двойственны доказанным.

Теорема доказана.

Пусть $A = (A^n, d_A^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — коцепной комплекс в аддитивной категории, удовлетворяющей аксиоме 1. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ существует единственный морфизм $a_A^n : \operatorname{Coker} d_A^{n-1} \to \operatorname{Ker} d_A^{n+1}$, удовлетворяющий условию

$$\bigl(\ker d_A^{n+1}\bigr) a_A^n \bigl(\operatorname{coker} d_A^{n-1}\bigr) = d_A^n. \tag{15}$$

Определены когомологии $H^n(A) = \operatorname{Coker} a_A^{n-1}$ и $\widetilde{H}^n(A) = \operatorname{Ker} a_A^n$ комплекса A. Существует канонический морфизм $m_A^n : H^n(A) \to \widetilde{H}^n(A)$, определенный условием

$$\bigl(\ker a_A^n\bigr) m_A^n \bigl(\operatorname{coker} a_A^{n-1}\bigr) = \bigl(\operatorname{coker} d_A^{n-1}\bigr)\bigl(\ker d_A^n\bigr).$$

Если категория полуабелева, то m_A^n — изоморфизм [2].

Произвольный морфизм $\varphi : A \to B$ комплексов индуцирует морфизмы $\widehat{\varphi}^n : \operatorname{Ker} d_A^n \to \operatorname{Ker} d_B^n$ и $\widetilde{\varphi}^n : \operatorname{Coker} d_A^{n-1} \to \operatorname{Coker} d_B^{n-1}$. Строго точной последовательности комплексов

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0 \tag{16}$$

в полуабелевой категории соответствуют коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \operatorname{Coker} d_A^{n-1} & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}^n} & \operatorname{Coker} d_B^{n-1} & \xrightarrow{\widetilde{\psi}^{n-1}} & \operatorname{Coker} d_C^{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle a_A^n}\big\downarrow & & {\scriptstyle a_B^n}\big\downarrow & & {\scriptstyle a_C^n}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} d_A^{n+1} & \xrightarrow{\widehat{\varphi}^{n+1}} & \operatorname{Ker} d_B^{n+1} & \xrightarrow{\widehat{\psi}^{n+1}} & \operatorname{Ker} d_C^{n+1} & &
\end{array}$$

и ее Ker-Coker-последовательность

$$\widetilde{H}^n(A) \xrightarrow{\varepsilon^n} \widetilde{H}^n(B) \xrightarrow{\zeta^n} \widetilde{H}^n(C) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A) \xrightarrow{\tau^{n+1}} H^{n+1}(B) \xrightarrow{\theta^{n+1}} H^{n+1}(C). \tag{17_n}$$

Наличие изоморфизмов m_C^n позволяет объединить последовательности (17_n) в одну последовательность

$$\ldots \to H^n(A) \xrightarrow{\tau^n} H^n(B) \xrightarrow{\zeta^n} H^n(C) \xrightarrow{\Delta^n} H^{n+1}(A) \to ..., \tag{18}$$

где $\Delta^n = \delta^n m_C^n$.

Теорема 3. *Для когомологической последовательности* (18), *соответствующей строго точной последовательности* (16), *выполнены следующие утверждения.*

1. *Если* $d_A^n \in MO_u$ $(d_A^n \in PO_u)$, *то последовательность* (18) *точна в члене* $H^n(B)$ (*в члене* $H^n(C)$). *Если при этом выполнена аксиома* 4^* (*аксиома* 4), *то* $\theta^n \in MO_u$ $(\theta^n \in PO_u)$.

2. *Если* $d_B^n \in MO_u$ $(d_B^n \in PO_u)$, *то последовательность* (18) *точна в члене* $H^n(C)$ (*в члене* $H^{n+1}(A)$). *Если при этом выполнена аксиома* 4^* (*аксиома* 4), *то* $\Delta^n \in MO_u$ $(\Delta^n \in PO_u)$.

3. *Если* $d_C^n \in MO_u$ $(d_C^n \in PO_u)$, *то последовательность* (18) *точна в члене* $H^{n+1}(A)$ (*в члене* $H^{n+1}(B)$). *Если при этом выполнена аксиома* 4^* (*аксиома* 4), *то* $\tau^{n+1} \in MO_u$ $(\tau^{n+1} \in PO_u)$.

Доказательство. Пусть $d_B^n \in MO_u$. Из (15) следует, что $a_B^n \in MO_u$. По теореме 1 последовательность (17_n) точна в члене $\widetilde{H}^n(C)$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
H^n(A) & \xrightarrow{\tau^n} & H^n(B) & \xrightarrow{\theta^n} & H^n(C) & & \\
{\scriptstyle m_A^n}\big\downarrow & & {\scriptstyle m_B^n}\big\downarrow & & {\scriptstyle m_C^n}\big\downarrow & \searrow{\scriptstyle \Delta^n} & \\
\widetilde{H}^n(A) & \xrightarrow{\varepsilon^n} & \widetilde{H}^n(B) & \xrightarrow{\zeta^n} & \widetilde{H}^n(C) & \xrightarrow{\delta^n} & H^{n+1}(A)
\end{array}$$

коммутативна. Так как m_C^n и m_B^n — изоморфизмы, последовательность (18) точна в члене $H^n(C)$. Если выполнена аксиома 4*, то по теореме 2 $\delta^n \in MO_u$. Но тогда и $\Delta^n \in MO_u$. Одно из утверждений теоремы 3 доказано. Остальные доказываются аналогично.

Следствие. *В специальной полуабелевой категории когомологическая последовательность* (18), *соответствующая строго точной последовательности* (16), *точна.*

В заключение отметим, что вопрос о том, выполнены ли аксиомы 4 и 4* в произвольной полуабелевой категории, остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Райков Д. А.* Полуабелевы категории // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, № 5. С. 1006–1009.
2. *Копылов Я. А., Кузьминов В. И.* О точности когомологической последовательности для короткой точной последовательности комплексов в полуабелевой категории // Тр. конференции «Геометрия и приложения». Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001. С. 76–83.
3. *Копылов Я. А., Кузьминов В. И.* О Ker-Coker-последовательности в полуабелевой категории // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 615–624.
4. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972.
5. *Кузьминов В. И., Черевикин А. Ю.* О полуабелевых категориях // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 6. С. 1284–1294.
6. *Гельфанд С. И., Манин Ю. И.* Методы гомологической алгебры. Т. I. Введение в теорию когомологий и производные функторы. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 2 августа 2001 г.

Глотко Николай Владимирович
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090

Кузьминов Владимир Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
kuzminov@math.nsc.ru