Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко, О задаче идентификации для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2009, том 49, номер 10, 1796–1811

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 10, с. 1796–1811

УДК 519.628

О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ[1)]

Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко

(690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН)

e-mail: alekseev@iam.dvo.ru; ter@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 16.12.2008 г.

Формулируется и исследуется задача идентификации для стационарных уравнений магнитной гидродинамики (МГД) вязкой теплопроводной жидкости, рассматриваемых при неоднородных краевых условиях для скорости, электромагнитного поля и температуры. Доказывается ее разрешимость, выводится система оптимальности, устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решения. Библ. 21.

Ключевые слова: уравнения магнитной гидродинамики, вязкая теплопроводная жидкость, краевая задача, задача идентификации, система оптимальности, единственность, устойчивость.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В последние годы большое внимание уделяется исследованию задач оптимального управления течениями вязкой теплопроводной электропроводящей жидкости. Указанные задачи возникли в связи с необходимостью установления наиболее эффективных механизмов управления термогидродинамическими процессами в вязких тепло- и электрически проводящих жидкостях. Строгому теоретическому изучению указанных задач посвящен ряд работ (см., например, [1]–[9]).

Наряду с задачами оптимального управления важную роль играют задачи идентификации для моделей магнитной гидродинамики. Они заключаются в нахождении неизвестных коэффициентов, входящих в дифференциальные уравнения или граничные условия для рассматриваемой модели, по дополнительной информации о решении. Отметим, что изучение задач идентификации можно свести к исследованию экстремальных задач при соответствующем выборе минимизируемого функционала качества. На основе указанного подхода в [10]–[12] исследованы разрешимость, единственность и устойчивость решений задач идентификации для моделей тепловой конвекции и тепломассопереноса.

Целью настоящей работы является теоретический анализ задачи идентификации для стационарной модели МГД вязкой теплопроводной проводящей жидкости:

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \varkappa\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H} = \mathbf{f} - \beta T\mathbf{G}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \tag{1.1}$$

$$\nu_1\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \rho_0^{-1}\mathbf{E} + \varkappa\mathbf{H}\times\mathbf{u} = \nu_1\mathbf{J}_0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{1.2}$$

$$-\lambda\Delta T + \mathbf{u}\cdot\nabla T = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.3}$$

рассматриваемой в области Ω при следующих неоднородных краевых условиях:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = q \text{ и } \mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{k} \text{ на } \Gamma, \quad T = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda(\partial T/\partial n + \alpha T) = \chi \text{ на } \Gamma_N. \tag{1.4}$$

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей Γ, состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N, $\mathbf{u}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ – векторы скорости и напряженностей магнитного и электрического полей, $p = P/\rho_0$, где P – давление, $\rho_0 = \mathrm{const}$ – плотность, T – температура, $\varkappa = \mu/\rho_0$, $\nu_1 = 1/\rho_0\sigma$, ν, σ и λ – постоянные коэффициенты вязкости, проводимости и температуропроводности, μ – магнитная проницаемость,

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-2810.2008.1), Программы фундаментальных исследований РАН (программа 22, проект 3.7) и Интеграционного проекта ДВО РАН + СО РАН (06-II-СО-03-010).

$\mathbf{G}$ – вектор ускорения свободного падения, $\mathbf{J}_0$ – вектор плотности сторонних токов, β – коэффициент теплового расширения, $\mathbf{g}$, q, $\mathbf{k}$, ψ, χ и α – определенные на Γ либо на Γ_D или Γ_N функции. Ниже на задачу (1.1)–(1.4) при заданных функциях $\mathbf{f}$, $\mathbf{J}_0$, β, $\mathbf{g}$, $\mathbf{k}$, q, f, ψ, χ и α будем ссылаться как на **задачу 1**. Все величины, входящие в (1.1)–(1.4), считаются размерными, причем уравнения модели записаны в системе СИ.

Задача 1 исследована в [13], где доказана ее глобальная разрешимость при условии, что граничный вектор $\mathbf{g}$ в (1.4) тангенциален. При других краевых условиях для $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, моделирующих условия сопряжения на границе раздела двух сред, модель (1.1)–(1.3) исследовалась в [14], где доказана локальная (т.е. при условии "малости" данных) разрешимость соответствующей краевой задачи.

В данной работе формулируется задача идентификации для рассматриваемой модели МГД. Она заключается в восстановлении неизвестного коэффициента α, входящего в граничное условие III рода для температуры T на участке Γ_N границы Γ, и решения ($\mathbf{u}$, $\mathbf{H}$, p, T, $\mathbf{E}$) задачи 1 по дополнительной информации о решении. Указанная задача будет сведена к обратной экстремальной задаче минимизации определенного функционала качества, для которой будет доказана разрешимость и выведена система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума. Основное внимание будет уделено установлению достаточных условий на исходные данные, обеспечивающих локальную единственность и устойчивость решения указанной экстремальной задачи. Эти условия имеют громоздкий вид. Однако с использованием аналогов широко используемых в механике жидкости безразмерных параметров (чисел Рейнольдса, Гартмана и Рэлея) их удается записать в достаточно простом и наглядном виде.

При исследовании задачи 1 и задач управления будем использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$, и $L^r(D)$, $r = 2$ и 4, где D обозначает либо область Ω или ее подмножество Q, либо границу Γ, либо одну из частей Γ_D и Γ_N границы Γ. Соответствующие пространства вектор-функций будем обозначать через $\mathbf{H}^s(D)$ и $\mathbf{L}^r(D)$. Нормы в пространствах $H^s(\Omega)$, $H^s(\Gamma)$, $H^s(\Gamma_D)$ и в их векторных аналогах будем обозначать через $\|\cdot\|_{s,\Omega} \equiv \|\cdot\|_s$, $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$ и $\|\cdot\|_{s,\Gamma_D}$. При $s = 0$ полагаем $\|\psi\|_{0,\Omega} = \|\psi\|$, $\|\psi\|_{0,\Gamma} = \|\psi\|_\Gamma$, $\|\psi\|^2_{\Gamma_N} = \int_{\Gamma_N} \psi^2 d\sigma$. Скалярное произведение в $L^2(\Omega)$ и $\mathbf{L}^2(\Omega)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$, скалярные произведения в $L^2(\Gamma)$ и $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ либо в $L^2(\Gamma_N)$ – через $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ либо $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_N}$, норму в $L^2(\Omega)$, $L^2(\Gamma)$ либо $L^2(\Gamma_N)$ – через $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\Gamma$ либо $\|\cdot\|_{\Gamma_N}$. Через $(\cdot,\cdot)_1$, $\|\cdot\|_1$ и $|\cdot|_1$ будем обозначать скалярное произведение, норму и полунорму в $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Отношение двойственности между пространством X и двойственным к нему X^* будем обозначать через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ либо просто $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Введем следующие предположения на область Ω и разбиение $\{\Gamma_D, \Gamma_N\}$ границы Γ:

(i) Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, а открытые ее участки Γ_D и Γ_N удовлетворяют условиям $\Gamma_D \in C^{0,1}$, $\Gamma_D \neq \emptyset$, $\Gamma_N \in C^{0,1}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$;

(ii) Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{1,1}$, состоящей из $p_0 + 1$ связных компонент $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p_0}$, где Γ_0 – граница неограниченной компоненты множества $\mathbb{R}^3 \backslash \bar{\Omega}$, и существуют поверхности $\Sigma_i \in C^2$, $i = 1, 2, \ldots, q_0$, такие, что $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$ при $i \neq j$, причем множество $\tilde{\Omega} = \Omega \backslash \bigcup_{i=1}^{q_0} \Sigma_i$ односвязно и липшицево.

При выполнении условия (i) существуют линейные непрерывные операторы следа $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma|_{\Gamma_D} : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_D)$ и справедливы следующие неравенства, вытекающие из теоремы вложения и непрерывности оператора следа:

$$\|S\|_{L^4(\Omega)} \le C_\Omega \|S\|_1, \quad \|S\|_{L^4(\Gamma)} \le C_\Gamma \|S\|_1, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le C_\Omega \|\mathbf{v}\|_1, \quad C_\Omega = \text{const}, \quad C_\Gamma = \text{const}. \tag{1.5}$$

В дополнение к введенным выше пространствам будем использовать пространства $H_0^1(\Omega) =$ = пополнение $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H^1(\Omega) \equiv \operatorname{Ker}\gamma$, $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)^3$, $\mathcal{T} = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}$, $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : (p, 1) = 0\}$, $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma) = \{q \in H^{1/2}(\Gamma) : (q, 1)_\Gamma = 0\}$, $L_+^2(\Gamma_N) = \{\varphi \in L^2(\Gamma_N) : \varphi \ge 0$ на $\Gamma_N\}$, $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$, $\mathbf{H}(\operatorname{rot};\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{rot}\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$, $\mathbf{H}^0(\operatorname{rot};\Omega) = \{\mathbf{h} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot};\Omega) : \operatorname{rot}\mathbf{h} = \mathbf{0}\}$, а также подпространства $\mathbf{H}^1_T(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^{1/2}_T(\Gamma) \subset \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ тангенциальных на Γ векторов и двойственные пространства $\mathbf{H}^{-1}(\Omega) = \mathbf{H}^1_0(\Omega)^*$, $H^{-1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)^*$, $\mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma) = \mathbf{H}^{1/2}_T(\Gamma)^*$, $\mathbf{H}^{-1/2}_T(\mathrm{div}_\Gamma; \Gamma)$. Более подробно о введенных пространствах и свойствах их элементов можно прочитать в [3], [15], [16]. В частности, пространство $\mathbf{H}^{-1/2}_T(\mathrm{div}_\Gamma; \Gamma)$ состоит из элементов $\mathbf{q} \in \mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma)$, поверхностная дивергенция $\mathrm{div}_\Gamma \mathbf{q}$ которых принадлежит $H^{-1/2}_T(\Gamma)$. Оно является областью значений оператора тангенциального следа $\gamma_\tau : \mathbf{H}(\mathrm{rot}; \Omega) \longrightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$, действующего по формуле $\gamma_\tau \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_\Gamma$ (см. [17]). Указанный факт является основополагающим при исключении из рассмотрения вектора электрического поля $\mathbf{E}$, удовлетворяющего неоднородному граничному условию $\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{k}$, где $\mathbf{k} \in \mathbf{H}^{-1/2}_T(\mathrm{div}_\Gamma; \Gamma)$ (см. [3], [5]).

Обозначим через $\mathcal{H}(m) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ (либо $\mathcal{H}(e) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$) пространство, состоящее из решений однородной задачи магнитного (либо электрического) типа $\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$, $\mathrm{rot}\mathbf{v} = 0$ в Ω, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0$ (либо $\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$, $\mathrm{rot}\mathbf{v} = 0$ в Ω, $\mathbf{v} \times \mathbf{n}|_\Gamma = 0$); $\mathcal{H}(m)$ и $\mathcal{H}(e)$ конечномерны (см. [18]), причем $\dim\mathcal{H}(m) = q_0$, $\dim\mathcal{H}(e) = p_0$, где числа p_0 и q_0 введены в (ii). Положим $\mathbf{X}_T = \mathbf{H}^1_T(\Omega) \cap \mathcal{H}(m)^\perp$, $\mathbf{V}_T = \{\mathbf{h} \in \mathbf{X}_T : \mathrm{div}\mathbf{h} = 0\}$, $\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) = \{\mathbf{h} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathcal{H}(m)^\perp : \mathrm{div}\mathbf{h} = 0\}$, $H = \mathbf{H}^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$, $H_{0T} = \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times \mathbf{V}_T$, $V_{0T} = \mathbf{V} \times \mathbf{V}_T \subset H_{0T} \subset H$, причем норму в H, H_{0T} и V_{0T} определим, как в [13], формулой $\|(\mathbf{v}, \mathbf{H})\|_1 = (\|\mathbf{v}\|_1^2 + \kappa\|\mathbf{H}\|_1^2)^{1/2}$. (Смысл введения множителя κ в норму $\|(\mathbf{v}, \mathbf{H})\|_1$ состоит в том, чтобы уравнять размерности обоих слагаемых.) Введем билинейные формы $a_0 : \mathbf{H}^1(\Omega)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $a_1 : \mathbf{H}(\mathrm{rot}; \Omega)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $a_2 : H^1(\Omega)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, $b_1 : H^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ и трилинейные формы c, $c_1 : \mathbf{H}^1(\Omega)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ и $c_2 : \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ по формулам

$$a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathrm{rot}\mathbf{u} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad a_2(T, S) = \int_\Omega \nabla T \cdot \nabla S d\mathbf{x}, \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered} b(\mathbf{v}, r) = -\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{v} r d\mathbf{x}, \quad b_1(S, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} S d\mathbf{x}, \quad \mathbf{b} \equiv \beta\mathbf{G}, \quad c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_\Omega [(\mathbf{u} \cdot \mathrm{grad})\mathbf{v}] \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x}, \\ c_1(\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u}) = \int_\Omega (\mathrm{rot}\boldsymbol{\Psi} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}, \quad c_2(\mathbf{u}, T, S) = \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla T) S d\mathbf{x}. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Из результатов работ [15], [16] вытекает следующая техническая

Лемма 1. *При выполнении условий* (i), (ii) *существуют константы* $C_1 = C_1(\Omega)$ *и* $\delta_i = \delta_i(\Omega) > 0$, $\gamma_1' = \gamma_1'(\Omega) \ge 0$, $i = 0, 1, 2$, *с которыми выполняются неравенства*

$$|a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \le \|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{H}^1(\Omega)^2, \quad a_0(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \ge \delta_0\|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega), \tag{1.8}$$

$$|a_1(\mathbf{H}, \boldsymbol{\Psi})| \le C_1^2\|\mathbf{H}\|_1\|\boldsymbol{\Psi}\|_1 \quad \forall(\mathbf{H}, \boldsymbol{\Psi}) \in \mathbf{H}^1(\Omega)^2, \quad a_1(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Psi}) \ge \delta_1\|\boldsymbol{\Psi}\|_1^2 \quad \forall\boldsymbol{\Psi} \in \mathbf{V}_T, \tag{1.9}$$

$$|a_2(T, S)| \le \|T\|_1\|S\|_1 \quad \forall(T, S) \in H^1(\Omega)^2, \quad a_2(S, S) \ge \delta_2\|S\|_1^2 \quad \forall S \in \mathcal{T}, \tag{1.10}$$

$$|c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \le \gamma_0'\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_1\|\mathbf{w}\|_1 \le \gamma_0\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1\|\mathbf{w}\|_1 \quad \forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{H}^1(\Omega)^3, \tag{1.11}$$

$$|c_1(\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u})| \le \gamma_1'\|\boldsymbol{\Psi}\|_1\|\mathbf{H}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\mathbf{u}\|_1 \le \gamma_1\|\boldsymbol{\Psi}\|_1\|\mathbf{H}\|_1\|\mathbf{u}\|_1 \quad \forall(\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u}) \in \mathbf{H}^1(\Omega)^3, \tag{1.12}$$

$$|c_2(\mathbf{u}, S, T)| \le \gamma_2'\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|S\|_1\|T\|_1 \le \gamma_2\|\mathbf{u}\|_1\|S\|_1\|T\|_1 \quad \forall(\mathbf{u}, S, T) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega)^2, \tag{1.13}$$

$$|b_1(T, \mathbf{v})| \le \|\mathbf{b}\|\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|T\|_{L^4(\Omega)} \le \beta_1\|T\|_1\|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall T \in H^1(\Omega), \quad \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \tag{1.14}$$

$$|(\alpha T, S)_{\Gamma_N}| \le \|\alpha\|_{\Gamma_N}\|T\|_{L^4(\Gamma_N)}\|S\|_{L^4(\Gamma_N)} \le \gamma_3\|\alpha\|_{\Gamma_N}\|T\|_1\|S\|_1. \tag{1.15}$$

Здесь $\gamma_0 = C_\Omega\gamma_0'$, $\gamma_1 = C_\Omega\gamma_1'$, $\gamma_2 = C_\Omega\gamma_2'$, $\beta_1 = C_\Omega^2\|\mathbf{b}\|$, $\gamma_3 = C_\Gamma^2$, *где постоянные* C_Ω *и* C_Γ *введены в* (1.5). *Кроме того*,

$$c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{u}\in\mathbf{H}^1(\Omega) \;\; c \;\; \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{1.16}$$

$$c_1(\Psi,\mathbf{H},\mathbf{u}) = \int_\Omega (\mathbf{H}\times\mathbf{u})\cdot\operatorname{rot}\Psi d\mathbf{x}, \quad c_1(\Psi,\mathbf{H},\mathbf{u}) = -c_1(\Psi,\mathbf{u},\mathbf{H}) \quad \forall(\Psi,\mathbf{H},\mathbf{u})\in\mathbf{H}^1(\Omega)^3, \tag{1.17}$$

$$c_2(\mathbf{u},T,T) = 0 \quad \forall\mathbf{u}\in\mathbf{H}_T^1(\Omega) \;\; c \;\; \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad T\in\mathcal{T}. \tag{1.18}$$

Введем на пространстве $H\equiv\mathbf{H}^1(\Omega)\times\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$ билинейную форму a формулой

$$a((\mathbf{u},\mathbf{H}),(\mathbf{v},\Psi)) = \nu a_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \nu_1 a_1(\mathbf{H},\Psi) \equiv \nu a_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \kappa\nu_m a_1(\mathbf{H},\Psi).$$

Здесь величина $\nu_m = \nu_1/\kappa \equiv 1/(\mu\sigma)$ имеет смысл коэффициента магнитной вязкости (см. [19]). В силу леммы 1, форма a непрерывна на $H\times H$ и коэрцитивна на $H_{0T}\subset H$, причем

$$a((\mathbf{v},\Psi),(\mathbf{v},\Psi)) \ge \nu_*\|(\mathbf{v},\Psi)\|_1^2 \equiv \nu_*(\|\mathbf{v}\|_1^2 + \kappa\|\Psi\|_1^2) \quad \forall(\mathbf{v},\Psi)\in H_{0T}, \quad \nu_* = \min(\delta_0\nu,\delta_1\nu_m). \tag{1.19}$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ

Пусть в дополнение к условиям (i), (ii) выполняются следующие условия:

(iii) $\mathbf{k}\in\gamma_\tau\mathbf{H}^0(\mathrm{rot};\Omega)\subset\mathbf{H}^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma;\Gamma)$, $\mathbf{f}\in\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $\mathbf{b}\in\mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{J}_0\in\mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{g}\in\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$, $q\in\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$, $f\in L^2(\Omega)$, $\psi\in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\chi\in L^2(\Gamma_N)$;

(iv) $\alpha\in L_+^2(\Gamma_N)$.

Положим $\langle l,S\rangle = (f,S) + (\chi,S)_{\Gamma_N}$, $\langle\mathbf{F},(\mathbf{v},\Psi)\rangle = \langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle + (\nu_1\mathbf{J}_0,\operatorname{rot}\Psi) + \rho_0^{-1}\langle\mathbf{k},\Psi\rangle_\Gamma$ и предположим, что пятерка $(\mathbf{u},\mathbf{H},p,T,\mathbf{E})\in\mathbf{C}^2(\bar\Omega)\times(\mathbf{C}^1(\bar\Omega)\cap\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega))\times C^1(\bar\Omega)\times C^2(\bar\Omega)\times\mathbf{C}^1(\bar\Omega)$ является классическим решением задачи 1. Умножим первое уравнение в (1.1) на функцию $\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, первое уравнение в (1.2) – на $\operatorname{rot}\Psi$, где $\Psi\in\mathbf{V}_T$, уравнение (1.3) – на $S\in\mathcal{T}$, проинтегрируем по Ω, применим формулы Грина и сложим первые два соотношения. Учитывая, в силу формулы Грина, что $(\mathbf{E},\operatorname{rot}\Psi) = (\operatorname{rot}\mathbf{E},\Psi) + \langle\mathbf{E}\times\mathbf{n},\Psi\rangle_\Gamma = \langle\mathbf{k},\Psi\rangle_\Gamma \equiv \langle\mathbf{k},\Psi\rangle_{\mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma)\times\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)}$, приходим к слабой формулировке задачи 1. Она заключается в нахождении четверки $(\mathbf{u},\mathbf{H},p,T)\in\mathbf{H}_T^1(\Omega)\times\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)\times L_0^2(\Omega)\times H^1(\Omega)$ из соотношений

$$\begin{gathered} a((\mathbf{u},\mathbf{H}),(\mathbf{v},\Psi)) + c(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) + \kappa[c_1(\Psi,\mathbf{H},\mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H},\mathbf{H},\mathbf{v})] + \\ + b(\mathbf{v},p) + b_1(T,\mathbf{v}) = \langle\mathbf{F},(\mathbf{v},\Psi)\rangle \quad \forall(\mathbf{v},\Psi)\in H_{0T}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\lambda a_2(T,S) + \lambda(\alpha T,S)_{\Gamma_N} + c_2(\mathbf{u},T,S) = \langle l,S\rangle \quad \forall S\in\mathcal{T}, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad \mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = q \text{ на } \Gamma, \quad T|_{\Gamma_D} = \psi. \tag{2.3}$$

Тождество (2.1) не содержит вектора электрического поля $\mathbf{E}$, однако, используя условие на граничный вектор $\mathbf{k}$ в (iii), вектор $\mathbf{E}$ можно однозначно восстановить по четверке $(\mathbf{u},\mathbf{H},p,T)$, удовлетворяющей (2.1) (см. [3], [5]). Это позволяет корректно ввести

Определение 1. *Слабым* решением задачи 1 назовем любую четверку $(\mathbf{u},\mathbf{H},p,T)\in\mathbf{H}_T^1(\Omega)\times\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)\times L_0^2(\Omega)\times H^1(\Omega)$, удовлетворяющую соотношениям (2.1)–(2.3).

Следующая теорема дает достаточные условия существования и единственности решения задачи 1 (см. [13]).

Теорема 1. *При выполнении условий* (i)–(iv) *существует слабое решение* $(\mathbf{u},\mathbf{H},p,T)$ *задачи* 1 *и справедливы оценки* $\|\mathbf{u}\|_1\le M_\mathbf{u}$, $\|\mathbf{H}\|_1\le M_\mathbf{H}$, $\|T\|_1\le M_T$, $\|p\|\le M_p$. *Здесь* $M_\mathbf{u}$, $M_\mathbf{H}$, M_T *и* M_p *– непрерывные неубывающие функции норм* $\|\mathbf{f}\|_{-1}$, $\|\mathbf{J}_0\|$, $\|\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{k}\|_{-1/2,\Gamma}$, $\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$, $\|q\|_{1/2,\Gamma}$, $\|f\|$, $\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$, $\|\chi\|_{\Gamma_N}$, $\|\alpha\|_{\Gamma_N}$.

Если к тому же функции $\mathbf{f}$, $\mathbf{J}_0$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{g}$, q, f, ψ *и* χ *"малы" (либо "вязкости"* ν *и* ν_m *велики) в том смысле, что*

$$\gamma_0 M_{\mathbf{u}} + \gamma_1 \frac{\sqrt{\kappa}}{2} M_{\mathbf{H}} + \frac{\beta_1 \gamma_2}{\delta_2 \lambda} M_T < \delta_0 \nu, \quad \gamma_1 M_{\mathbf{u}} + \gamma_1 \frac{\sqrt{\kappa}}{2} M_{\mathbf{H}} < \delta_1 \nu_m,$$

где константы δ_0, δ_1, δ_2, γ_0, γ_1, γ_2, β_1 *введены в лемме* 1, *то слабое решение единственно.*

Рассмотрим слабую формулировку обобщенного линейного аналога задачи 1. Она заключается в нахождении четверки $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, T) \in \mathbf{H}_T^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ из условий

$$a((\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \Psi)) + c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \kappa[c_1(\Psi, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v})] + \\ + b(\mathbf{v}, p) + b_1(T, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{F}, (\mathbf{v}, \Psi) \rangle \quad \forall (\mathbf{v}, \Psi) \in H_{0T}, \tag{2.4}$$

$$\lambda a_2(T, S) + \lambda(\alpha T, S)_{\Gamma_N} + c_2(\hat{\mathbf{u}}, T, S) = \langle l, S \rangle \quad \forall S \in \mathcal{T}, \tag{2.5}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = s \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad \mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = q \text{ на } \Gamma, \quad T|_{\Gamma_D} = \psi. \tag{2.6}$$

Здесь $\mathbf{F} \in H_{0T}^*$ и $l \in \mathcal{T}^*$ – произвольные функционалы, а "скорость" $\hat{\mathbf{u}}$, "магнитное поле" $\hat{\mathbf{H}}$, функции $\mathbf{b}$, s и α – заданные функции, удовлетворяющие условиям

(v) $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_T^1(\Omega)$, $\operatorname{div}\hat{\mathbf{u}} = 0$, $\hat{\mathbf{H}} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{b} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\alpha \in L_+^2(\Gamma_N)$;

(vi) $s \in L_0^2(\Omega)$.

Полагая $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, T)$, введем оператор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6) : X \longrightarrow Y$, где

$$X = \mathbf{H}_T^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega), \quad Y = H_{0T}^* \times L_0^2(\Omega) \times \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D),$$

$$\langle \Phi_1(\mathbf{x}), (\mathbf{v}, \Psi) \rangle = a((\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \Psi)) + c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \kappa[c_1(\Psi, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v})], \\ \Phi_2(\mathbf{x}) \equiv \operatorname{div}\mathbf{u}, \quad \Phi_3(\mathbf{x}) = \mathbf{u}|_\Gamma, \quad \Phi_4(\mathbf{x}) = \gamma_n \mathbf{H} \equiv \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma, \\ \langle \Phi_5(\mathbf{x}), S \rangle = \lambda a_2(T, S) + \lambda(\alpha T, S)_{\Gamma_N} + c_2(\hat{\mathbf{u}}, T, S), \quad \Phi_6(\mathbf{x}) = T|_{\Gamma_D}. \tag{2.7}$$

По построению, оператор Φ линеен, определен и непрерывен на всем X, а из [13] следует, что он сюръективен и обратим. В таком случае из теоремы Банаха об обратном операторе вытекает, что оператор $\Phi : X \longrightarrow Y$ – изоморфизм. Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. *При выполнении условий* (i), (ii), (v) *и* (vi) *оператор* $\Phi : X \longrightarrow Y$, *определяемый соотношениями* (2.7), *осуществляет линейный и непрерывный изоморфизм.*

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ. СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ

Краевая задача (1.1)–(1.4) содержит ряд параметров и функций, описывающих плотности источников либо коэффициенты граничных условий. Для нахождения решения задачи (1.1)–(1.4) все параметры и функции должны быть заданы. На практике могут возникнуть ситуации, когда некоторые из этих параметров или функций неизвестны и их требуется восстановить по дополнительной информации о решении. Ниже рассмотрим случай, когда наряду с решением $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, T)$ неизвестна функция α, входящая в граничное условие III рода для температуры T на участке Γ_N границы Γ, и ее требуется определить вместе с $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, T)$, исходя из условия минимума некоторого функционала качества I.

Чтобы сформулировать соответствующую экстремальную задачу, отвечающую указанной задаче идентификации, разобьем множество данных задачи 1 на две группы: группу фиксированных данных, куда внесем функции $\mathbf{f}$, $\mathbf{b} \equiv \beta\mathbf{G}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{j} \equiv \nu_1 \mathbf{J}_0$, q, f, ψ, χ, и группу управлений, куда внесем функцию α, предполагая, что α может изменяться в некотором множестве K. Более точно: обозначим через $I : X \equiv \mathbf{H}_T^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ слабо полунепрерывный снизу функционал и предположим, что выполняются следующие условия:

(j) $K \subset L_+^2(\Gamma_N)$ – непустое выпуклое замкнутое множество;

(jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_1 = \text{const} \geq 0$ и K – ограниченное множество либо $\mu_1 > 0$ и функционал I ограничен снизу.

Полагая $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, T)$, $u_0 = (\mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, \mathbf{k}, \mathbf{j}, q, f, \psi, \chi)$, введем функционал $J: X \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$J(\mathbf{x}, \alpha) = \frac{\mu_0}{2} I(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1}{2} \|\alpha\|^2_{\Gamma_N}. \tag{3.1}$$

Здесь параметр $\mu_1 \geq 0$ служит для регулирования относительной "важности" каждого из слагаемых в (3.1), а также для уравнивания (физических) размерностей указанных слагаемых. Еще одна цель введения параметра μ_1 состоит в том, чтобы обеспечить единственность решения соответствующей экстремальной задачи (см. разд. 4). Рассматривая функционал J на слабых решениях задачи 1, запишем соответствующее ограничение, имеющее вид ее слабой формулировки (2.1)–(2.3), в виде

$$F(\mathbf{x}, \alpha) \equiv F(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, T, \alpha) = 0. \tag{3.2}$$

Здесь $F \equiv (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6) : X \times K \longrightarrow Y$ – оператор, действующий по формулам $\langle F_1(\mathbf{x}, \alpha), (\mathbf{v}, \Psi)\rangle = a((\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \Psi)) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + b_1(T, \mathbf{v}) + \kappa[c_1(\Psi, \mathbf{H}, \mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}, \mathbf{v})] - \langle \mathbf{F}, (\mathbf{v}, \Psi)\rangle$, $\langle F_2(\mathbf{x}, \alpha), s\rangle = b(\mathbf{u}, s)$, $F_3(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{u}|_\Gamma - \mathbf{g} \in \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$, $F_4(\mathbf{x}, \alpha) = \gamma_n \mathbf{H} - q \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$, $\langle F_5(\mathbf{x}, \alpha), S\rangle = \lambda a_2(T, S) + \lambda(\alpha T, S)_{\Gamma_N} + c_2(\mathbf{u}, T, S) - (f, S) - (\chi, S)_{\Gamma_N}$, $F_6(\mathbf{x}, \alpha) = T|_{\Gamma_D} - \psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$. Сформулируем следующую экстремальную задачу:

$$J(\mathbf{x}, \alpha) \equiv J(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, T, \alpha) \longrightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, \alpha) = 0, \quad (\mathbf{x}, \alpha) \in X \times K. \tag{3.3}$$

В качестве возможных функционалов качества I будем рассматривать следующие:

$$I_1(T) = \|T - T_d\|^2_Q, \quad I_2(T) = |T|_1^2 \equiv \int\limits_\Omega |\nabla T|^2 d\mathbf{x}, \quad I_3(T) = \|T\|_1^2. \tag{3.4}$$

Здесь $T_d \in L^2(Q)$ – функция, которая моделирует заданное (или создаваемое) поле температур в некоторой подобласти Q области течения Ω.

Введем множество $Z_{ad} = \{(\mathbf{x}, \alpha) \in X \times K: F(\mathbf{x}, \alpha) = 0, J(\mathbf{x}, \alpha) < \infty\}$ допустимых пар для задачи (3.3). Аналогично [3] доказываются две теоремы.

Теорема 3. *Пусть при выполнении условий* (i)–(iii), (j) *и* (jj) $I: X \longrightarrow \mathbb{R}$ – *слабо полунепрерывный снизу функционал и множество* Z_{ad} *не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение экстремальной задачи* (3.3).

Теорема 4. *Пусть при выполнении условий* (i)–(iii) *и* (j) $\mu_0 > 0$ *и, кроме того,* $\mu_1 > 0$ *либо* $\mu_1 \geq 0$ *и* K – *ограниченное множество. Тогда существует по крайней мере одно решение экстремальной задачи* (3.3) *при* $I = I_k$, $k = 1, 2, 3$.

Следующий этап в исследовании задачи (3.3) состоит в обосновании принципа Лагранжа и выводе системы оптимальности, описывающей необходимые условия существования минимума. Применим для этого методику, разработанную в [3], [5] на основе [20]. Следуя данной методике, обозначаем через $X^* = \mathbf{H}_T^1(\Omega)^* \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)^* \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)^*$, $Y^* = H_{0T} \times L_0^2(\Omega) \times \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)^* \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)^* \times \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$ двойственные пространства к введенным выше произведениям X и Y. В соответствии с общей теорией гладко-выпуклых экстремальных задач в гильбертовых пространствах введем в рассмотрение элемент $\mathbf{y}^* = ((\xi, \eta), s, \theta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in Y^*$ и лагранжиан $\mathcal{L}: X \times K \times \mathbb{R} \times Y^* \longrightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \alpha, \lambda_0, \mathbf{y}^*) &= \lambda_0 J(\mathbf{x}, \alpha) + \langle \mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, \alpha)\rangle_{Y^* \times Y} \equiv \lambda_0 J(\mathbf{x}, \alpha) + \langle F_1(\mathbf{x}, \alpha), (\xi, \eta)\rangle_{H_{0T}^* \times H_{0T}} + \\ &+ (F_2(\mathbf{x}, \alpha), s) + \langle \zeta_1, F_3(\mathbf{x}, \alpha)\rangle_\Gamma + \langle \zeta_2, F_4(\mathbf{x}, \alpha)\rangle_\Gamma + \tilde{\kappa}\langle F_5(\mathbf{x}, \alpha), \theta\rangle + \tilde{\kappa}\langle \zeta_3, F_6(\mathbf{x}, \alpha)\rangle_{\Gamma_D}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь и ниже $\langle \zeta_1, \mathbf{h}\rangle_\Gamma = \langle \zeta_1, \mathbf{h}\rangle_{\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)^* \times \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)}$, $\langle \zeta_2, h\rangle_\Gamma = \langle \zeta_2, h\rangle_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)^* \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}$, $\langle \zeta_3, S\rangle_{\Gamma_D} = \langle \zeta_3, S\rangle_{H^{1/2}(\Gamma_D)^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)}$ для $\zeta_1 \in \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)^*$, $\zeta_2 \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)^*$ и $\zeta_3 \in H^{1/2}(\Gamma_D)^*$, а введенный в (3.5) параметр $\tilde{\kappa}$ служит вместе с физическим параметром κ в (1.1) и параметром μ_0 в (3.1) для согласования размерностей магнитогидродинамических и температурных переменных основного и сопряженного состояний $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}^*$. Более конкретно: условимся размерности $[\tilde{\kappa}]$ параметра $\tilde{\kappa}$ и $[\mu_0]$ параметра μ_0 в (3.1) выбирать так, чтобы размерности величин ξ, η, s, θ сопряженного состояния $\mathbf{y}^*$

совпадали с размерностями величин $\mathbf{u}$, $\mathbf{H}$, p, T основного состояния $\mathbf{x}$, т.е. чтобы выполнялись соотношения

$$[\xi] = [\mathbf{u}] = L_0/T_0, \quad [\eta] = [\mathbf{H}] = I_0/T_0, \quad [s] = [p] = L_0^2/T_0^2, \quad [\theta] = [T] = K_0. \qquad (3.6)$$

Здесь и ниже через L_0, T_0, I_0, K_0 обозначают размерности в системе СИ единиц длины, времени, тока и температуры, выражаемые, соответственно, в метрах, секундах, амперах и градусах Кельвина. Это позволит ссылаться ниже на величины $\xi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $\eta \in \mathbf{V}_T$, $s \in L_0^2(\Omega)$ и $\theta \in \mathcal{T}$ как на "сопряженную скорость", "сопряженное магнитное поле", "сопряженное давление" и "сопряженную температуру". Нетрудно видеть, что необходимым условием выполнения (3.6) является условие $[\tilde{\kappa}] = = L_0^2/T_0^2K_0^2$. В частности, при выполнении этого условия все слагаемые тождества, полученного после умножения на $\tilde{\kappa}$ тождества (2.2) для T, имеют ту же размерность, что и все слагаемые в магнитогидродинамическом тождестве (2.1).

Простой анализ показывает, что производная Фреше по состоянию $\mathbf{x}$ от оператора $F: X \times K \longrightarrow Y$ в любой точке $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\alpha}) \equiv (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{p}, \hat{T}, \hat{\alpha}) \in X \times K$ есть линейный непрерывный оператор $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\alpha}):$ $X \longrightarrow Y$, ставящий в соответствие каждому элементу $(\mathbf{w}, \mathbf{h}, r, \tau) \in X$ элемент $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\alpha})(\mathbf{w}, \mathbf{h}, r, \tau) =$ $= (\hat{\mathbf{f}}_1, \hat{f}_2, \hat{\mathbf{f}}_3, \hat{f}_4, \hat{f}_5, \hat{f}_6) \in Y$, где

$$\begin{gathered}
\langle \hat{\mathbf{f}}_1, (\mathbf{v}, \Psi)\rangle = \nu a_0(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \nu_1 a_1(\mathbf{h}, \Psi) + [c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})] + b(\mathbf{v}, r) + b_1(\tau, \mathbf{v}) + \\
+ \kappa[c_1(\Psi, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{u}}) + c_1(\Psi, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{w})] - \kappa[c_1(\hat{\mathbf{H}}, \mathbf{h}, \mathbf{v}) + c_1(\mathbf{h}, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v})] \quad \forall(\mathbf{v}, \Psi) \in H_{0T}, \\
\langle \hat{f}_2, r\rangle = b(\mathbf{w}, r) \quad \forall r \in L_0^2(\Omega), \quad \hat{\mathbf{f}}_3 = \mathbf{w}|_\Gamma, \quad \hat{f}_4 = \gamma_n \mathbf{h} = \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma, \\
\langle \hat{f}_5, S\rangle = \lambda a_2(\tau, S) + \lambda(\alpha\tau, S)_{\Gamma_N} + c_2(\hat{\mathbf{u}}, \tau, S) + c_2(\mathbf{w}, \hat{T}, S), \quad f_6 = \tau|_{\Gamma_D}.
\end{gathered} \qquad (3.7)$$

Из (3.7) выводим, что $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\alpha}) = \Phi + \hat{\Phi} \equiv (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6) + (\hat{\Phi}_1, 0, 0, 0, \hat{\Phi}_5, 0)$. Здесь операторы Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_5 и Φ_6 определены в (2.7), а операторы $\hat{\Phi}_1 : X \longrightarrow H_{0T}^*$ и $\hat{\Phi}_5 : X \longrightarrow \mathcal{T}^*$ определяются соотношениями $\langle \hat{\Phi}_1(\mathbf{w}, \mathbf{h}, r, \tau), (\mathbf{v}, \Psi)\rangle = c(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \kappa[c_1(\Psi, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{u}}) - c_1(\hat{\mathbf{H}}, \mathbf{h}, \mathbf{v})]$, $\langle \hat{\Phi}_5(\mathbf{w}, \mathbf{h}, r, \tau), S\rangle = c_2(\mathbf{w}, \hat{T}, S)$. В силу теоремы 2 оператор $\Phi : X \longrightarrow Y$ является изоморфизмом, а в силу (1.11)–(1.13) оператор $(\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_5)$, зависящий только от $\mathbf{w}$ и $\mathbf{h}$, является непрерывным из $\mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega)$ в $H_{0T}^* \times \mathcal{T}^*$, а следовательно, компактным из $\mathbf{H}_T^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\Omega)$ в $H_{0T}^* \times \mathcal{T}^*$. Это эквивалентно фредгольмовости оператора $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\alpha})$.

Сформулируем полученный результат в виде леммы.

Лемма 2. *При выполнении условий* (i)–(iii) *и* (j) *оператор* $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\alpha}) : X \longrightarrow Y$ *является фредгольмовым для любой пары* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\alpha}) \in X \times K$.

Из леммы 2 вытекает следующая теорема о справедливости принципа Лагранжа.

Теорема 5. *Пусть при выполнении условий* (i)–(iii) *и* (j) *элемент* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\alpha}) \equiv (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{p}, \hat{T}, \hat{\alpha}) \in X \times K$ *является точкой локального минимума в задаче* (3.3), *причем функционал* J *определяется формулой* (3.1), *где функционал* I *непрерывно дифференцируем по* $\mathbf{x}$ *в точке* $\hat{\mathbf{x}}$. *Тогда существует ненулевой множитель Лагранжа* $(\lambda_0, \mathbf{y}^*) \in \mathbb{R} \times Y^*$, $\lambda_0 \geq 0$, *такой, что выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа*

$$\lambda_0 \langle I'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{x}\rangle_{X^* \times X} + \langle \mathbf{y}^*, F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\alpha})\mathbf{x}\rangle_{Y^* \times Y} = 0 \quad \forall \mathbf{x} = (\mathbf{w}, \mathbf{h}, r, \tau) \in X \qquad (3.8)$$

и справедлив принцип минимума $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\alpha}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \tilde{\alpha}, \lambda_0, \mathbf{y}^*)$ *для всех* $\tilde{\alpha} \in K$, *эквивалентный вариационному неравенству*

$$\mu_1(\hat{\alpha}, \tilde{\alpha} - \hat{\alpha})_{\Gamma_N} + \tilde{\kappa}\lambda((\tilde{\alpha} - \hat{\alpha})\hat{T}, \theta)_{\Gamma_N} \geq 0 \quad \forall \tilde{\alpha} \in K, \quad i = 1, 2. \qquad (3.9)$$

Доказательство. В силу теоремы из [20, с. 79] достаточно показать, что коядро оператора $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\alpha}) : X \longrightarrow Y$ конечномерно. Это вытекает из фредгольмовости оператора $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\alpha})$.

Уравнение Эйлера–Лагранжа (3.8) эквивалентно трем соотношениям. Они получаются, если в (3.8) последовательно полагать $r = 0$, $\tau = 0$, затем $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, $r = 0$ и $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, $\tau = 0$. В случае когда функционал J определяется формулой (3.1), где функционал I зависит только от T, указанные соотношения состоят из тождеств

$$\begin{gathered}\nu a_0(\mathbf{w},\xi)+\nu_1 a_1(\mathbf{h},\eta)+c(\hat{\mathbf{u}},\mathbf{w},\xi)+c(\mathbf{w},\hat{\mathbf{u}},\xi)+\kappa[c_1(\eta,\hat{\mathbf{H}},\mathbf{w})+c_1(\eta,\mathbf{h},\mathbf{u})]-\kappa[c_1(\hat{\mathbf{H}},\mathbf{h},\xi)+\\+c_1(\mathbf{h},\hat{\mathbf{H}},\xi)]+\tilde{\kappa}c_2(\mathbf{w},\hat{T},\theta)+b(\mathbf{w},\sigma)+\langle\zeta_1,\mathbf{w}\rangle_\Gamma+\langle\zeta_2,\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}\rangle_\Gamma=0\quad\forall(\mathbf{w},\mathbf{h})\in H_{0T},\end{gathered}\tag{3.10}$$

$$\tilde{\kappa}[\lambda a_2(\tau,\theta)+\lambda(\alpha\tau,\theta)_{\Gamma_N}+c_2(\hat{\mathbf{u}},\tau,\theta)+\langle\zeta_3,\tau\rangle_{\Gamma_D}]+b_1(\tau,\xi)+\lambda_0\langle I'_T(\hat{\mathbf{x}},\hat{u}),\tau\rangle=0\quad\forall\tau\in H^1(\Omega)\tag{3.11}$$

и тождества $b(\xi,r)=0\ \forall r\in L_0^2(\Omega)$. Оно эквивалентно условию $\xi\in\mathbf{V}$ (см. [15]).

Соотношения (3.10), (3.11) вместе с принципом минимума (3.9) и операторным ограничением (3.2) представляют собой систему оптимальности для задачи (3.3). Она описывает необходимые условия экстремума для задачи (3.3). Однако этим ее роль не ограничивается. Оказывается, что анализ ее свойств позволяет получить много новой дополнительной информации о свойствах решения задачи (3.3) и, в частности, выявить условия, обеспечивающие его единственность, как это будет показано в следующем разделе.

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Установим сначала достаточные условия на исходные данные, при которых любой нетривиальный множитель Лагранжа *регулярен*, т.е. имеет вид $(\lambda_0,\mathbf{y}^*)$, $\lambda_0>0$. В этом случае, заменив в (3.8), (3.9) $\mathbf{y}^*$ на $\mathbf{y}^*/\lambda_0$, можно считать, что $\lambda_0=1$ (см. [15]). Предположим, что элементы $u_0\equiv(\mathbf{f},\mathbf{b},\mathbf{g},\mathbf{k},\mathbf{j},q,f,\psi,\chi)$ и множество K удовлетворяют условиям

$$\frac{\gamma_0}{\delta_0\nu}M_\mathbf{u}+\frac{\gamma_1}{\delta_0\nu}\frac{\sqrt{\kappa}}{2}M_\mathbf{H}+\frac{\beta_1}{\delta_0\nu}\frac{\gamma_2}{\delta_2\lambda}M_T<1,\quad\frac{\gamma_1}{\delta_1\nu_m}M_\mathbf{u}+\frac{\gamma_1}{\delta_1\nu_m}\frac{\sqrt{\kappa}}{2}M_\mathbf{H}<1\quad\forall\alpha\in K,\tag{4.1}$$

обеспечивающим единственность решения задачи 1. Здесь величины $M_\mathbf{u}\equiv M_\mathbf{u}(u_0,\alpha)$, $M_\mathbf{H}\equiv M_\mathbf{H}(u_0,\alpha)$ и $M_T\equiv M_T(u_0,\alpha)$ введены в теореме 1. Для доказательства регулярности достаточно доказать, что любое решение системы (3.10), (3.11) при $\lambda_0=0$, где элементы $\hat{\mathbf{x}}=(\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{H}},\hat{p},\hat{T})$ и $\hat{\alpha}$ связаны соотношением $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}},\hat{\alpha})=0$, равно нулю. Для этого положим в (3.10), (3.11) $\mathbf{w}=\xi$, $\mathbf{h}=\eta$, $\tau=\theta$, $r=\sigma$ и $\lambda_0=0$. Учитывая (1.16), (1.18), получаем

$$\nu a_0(\xi,\xi)+\nu_1 a_1(\eta,\eta)+c(\xi,\hat{\mathbf{u}},\xi)-\kappa c_1(\hat{\mathbf{H}},\eta,\xi)+\kappa c_1(\eta,\eta,\hat{\mathbf{u}})+\tilde{\kappa}c_2(\xi,\hat{T},\theta)=0,\tag{4.2}$$

$$\lambda a_2(\theta,\theta)+\lambda(\alpha\theta,\theta)_{\Gamma_N}+\tilde{\kappa}^{-1}b_1(\theta,\xi)=0.\tag{4.3}$$

В силу (1.11)–(1.14) и теоремы 1, для решения $(\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{H}},\hat{p},\hat{T})$ справедливы оценки

$$|c(\xi,\hat{\mathbf{u}},\xi)|\le\gamma_0\|\hat{\mathbf{u}}\|_1\|\xi\|_1^2\le\gamma_0M_\mathbf{u}\|\xi\|_1^2,\quad\kappa|c_1(\hat{\mathbf{H}},\eta,\xi)|\le\frac{\gamma_1\sqrt{\kappa}}{2}M_\mathbf{H}(\|\xi\|_1^2+\kappa\|\eta\|_1^2),\tag{4.4}$$

$$\kappa|c_1(\eta,\eta,\hat{\mathbf{u}})|\le\gamma_1\kappa M_\mathbf{u}\|\eta\|_1^2,\quad|c_2(\xi,\hat{T},\theta)|\le\gamma_2M_T\|\xi\|_1\|\theta\|_1,\quad|b_1(\theta,\xi)|\le\beta_1\|\theta\|_1\|\xi\|_1.\tag{4.5}$$

Учитывая последнее соотношение в (4.5) и (1.10), из (4.3) выводим, что $\|\theta\|_1\le(\beta_1/\delta_2\lambda\tilde{\kappa})\|\xi\|_1$. Используя этот факт, а также (1.8), (1.9), (4.4) и (4.5) и соотношение $\nu_1=\mu\nu_m$, из (4.2) приходим к неравенству

$$\left(\delta_0\nu-\gamma_0M_\mathbf{u}-\frac{\gamma_1\sqrt{\kappa}}{2}M_\mathbf{H}-\frac{\beta_1\gamma_2}{\delta_2\lambda}M_T\right)\|\xi\|_1^2+\left(\delta_1\nu_m-\gamma_1M_\mathbf{u}-\frac{\gamma_1\sqrt{\kappa}}{2}M_\mathbf{H}\right)\kappa\|\eta\|_1^2\le0.\tag{4.6}$$

Оно возможно, в силу (4.1), только если $\xi=0$, $\eta=0$. Из (4.3), (3.10), (3.11) тогда выводим, что $\theta=0$, $s=0$, $\zeta_1=0$, $\zeta_2=0$, $\zeta_3=0$. Из фредгольмовости оператора $F'_\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}},\hat{\alpha})$ вытекает

Теорема 6. *Пусть при выполнении условий теоремы* 5 *и* (4.1) $(\hat{\mathbf{x}},\hat{\alpha})\in X\times K$ *есть решение задачи* (3.3). *Тогда верно следующее*: 1) *однородное (при* $\lambda_0=0$*) уравнение* (3.8) *имеет лишь тривиальное решение* $\mathbf{y}^*=0$; 2) *любой нетривиальный множитель Лагранжа* $(\lambda_0,\mathbf{y}^*)$, *удовлетворяющий* (3.8), *регулярен, т.е.* $\lambda_0=1$, *и определяется единственным образом.*

Будем предполагать ниже, что выполняются условия

$$\frac{\gamma_0}{\delta_0\nu}M_\mathbf{u}^0+\frac{\gamma_1}{\delta_0\nu}\frac{\sqrt{\kappa}}{2}M_\mathbf{H}^0+\frac{\beta_1}{\delta_0\nu}\frac{\gamma_2}{\delta_2\lambda}M_T^0<\frac{1}{2},\quad\frac{\gamma_1}{\delta_1\nu_m}M_\mathbf{u}^0+\frac{\gamma_1}{\delta_1\nu_m}\frac{\sqrt{\kappa}}{2}M_\mathbf{H}^0<\frac{1}{2},\tag{4.7}$$

имеющие смысл условий малости данных, где

$$M_{\mathbf{u}}^0 = \sup_{\alpha \in K} M_{\mathbf{u}}(u_0, \alpha), \quad M_{\mathbf{H}}^0 = \sup_{\alpha \in K} M_{\mathbf{H}}(u_0, \alpha), \quad M_T^0 = \sup_{\alpha \in K} M_T(u_0, \alpha).$$

Чтобы придать условиям (4.7) наглядный вид и существенно упростить дальнейшие выкладки, введем в рассмотрение следующие параметры:

$$\mathrm{Re} = \frac{\gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0}{\delta_0 \nu}, \quad \mathrm{Ha} = \frac{\gamma_1\sqrt{\kappa}}{\delta_0 \nu} M_{\mathbf{H}}^0, \quad \mathrm{Ra} = \frac{\beta_1}{\delta_0 \nu}\frac{\gamma_2}{\delta_2 \lambda} M_T^0, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\delta_0 \nu}{\delta_2 \lambda}, \quad \mathrm{Pr}_m = \frac{\delta_0 \nu}{\delta_1 \nu_m}. \tag{4.8}$$

Они являются аналогами широко используемых в гидромеханике безразмерных параметров: числа Рейнольдса Re, числа Гартмана Ha, числа Рэлея Ra, а также обычного и магнитного чисел Прандтля Pr и Pr_m. Простой анализ, аналогичный анализу в [5], [6], показывает, что все введенные в (4.8) параметры безразмерны, если норму $\|\cdot\|_1$ ввести формулой $\|u\|_1^2 = |u|_1^2 + l^{-2}\|u\|^2$. Здесь l – вспомогательный параметр с размерностью $[l] = L_0$, величина которого равна 1. С использованием (4.8) условия (4.7) принимают вид

$$\mathrm{Re} + (1/2)\mathrm{Ha} + \mathrm{Ra} < (1/2), \quad (\gamma_1/\gamma_0)\mathrm{Pr}_m\mathrm{Re} + (1/2)\mathrm{Pr}_m\mathrm{Ha} < (1/2). \tag{4.9}$$

Начнем с исследования единственности решения следующей экстремальной задачи:

$$J(T, \alpha) = \frac{\mu_0}{2}\|T\|_1^2 + \frac{\mu_1}{2}\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \longrightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, \alpha) = 0, \quad \mathbf{x} \in X, \quad \alpha \in K. \tag{4.10}$$

Предположим, что существуют два решения $(\mathbf{x}_i, \alpha_i) \equiv (\mathbf{u}_i, \mathbf{H}_i, p_i, T_i, \alpha_i)$, $i = 1, 2$, задачи (4.10). Обозначим через $(1, \mathbf{y}_i^*) \equiv (1, (\xi_i, \eta_i), s_i, \theta_i, \zeta_1^i, \zeta_2^i, \zeta_3^i)$ отвечающие парам $(\mathbf{x}_i, \alpha_i)$ множители Лагранжа. Они являются решениями системы (3.10), (3.11), где следует положить

$$\lambda_0 = 1, \quad I = I_3, \quad \langle I_T'(\mathbf{x}_i, \alpha_i), \tau\rangle = \mu_0(T_i, \tau)_1, \quad i = 1, 2. \tag{4.11}$$

В силу теоремы 1, для $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{H}_i$ и T_i справедливы оценки

$$\|\mathbf{u}_i\|_1 \le M_{\mathbf{u}}^0, \quad \|\mathbf{H}_i\|_1 \le M_{\mathbf{H}}^0, \quad \|T_i\|_1 \le M_T^0, \quad i = 1, 2. \tag{4.12}$$

Положим $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ $(\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$, $p = p_1 - p_2$, $T = T_1 - T_2)$, $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}_1^* - \mathbf{y}_2^* \equiv (1, (\xi, \eta), s, \theta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, где $\xi = \xi_1 - \xi_2$, $\eta = \eta_1 - \eta_2$, $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\zeta_1 = \zeta_1^1 - \zeta_1^2$, $\zeta_2 = \zeta_2^1 - \zeta_2^2$, $\zeta_3 = \zeta_3^1 - \zeta_3^2$. Вычтем соотношения (2.1)–(2.3), записанные для $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{H}_2$, p_2, T_2, α_2, из этих же соотношений для $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{H}_1$, p_1, T_1, α_1. Будем иметь

$$\begin{gathered}\nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu_1 a_1(\mathbf{H}, \Psi) + [c(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}, \mathbf{v})] - \kappa[c_1(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}, \mathbf{v}) + c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}_2, \mathbf{v})] + \\ + \kappa[c_1(\Psi, \mathbf{H}, \mathbf{u}_1) + c_1(\Psi, \mathbf{H}_2, \mathbf{u})] + b(\mathbf{v}, p) + b_1(T, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall(\mathbf{v}, \Psi) \in H_{0T},\end{gathered} \tag{4.13}$$

$$\lambda a_2(T, S) + \lambda(\alpha_1 T, S)_{\Gamma_N} + c_2(\mathbf{u}_1, T, S) = -\lambda(\alpha T_2, S)_{\Gamma_N} - c_2(\mathbf{u}, T_2, S) \quad \forall S \in \mathcal{T}, \tag{4.14}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = 0, \quad T|_{\Gamma_D} = 0. \tag{4.15}$$

В силу (4.15), $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{H} \in \mathbf{V}_T$. Положим в (4.13) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, $\Psi = \mathbf{H}$. Получим

$$\nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}) - \kappa c_1(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}, \mathbf{u}) + \nu_1 a_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}) + \kappa c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}, \mathbf{u}_1) + b_1(T, \mathbf{u}) = 0. \tag{4.16}$$

Рассуждая, как выше при выводе (4.6) из (4.2), из (4.16) заключаем, что

$$\left(\delta_0\nu - \gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0 - \frac{\gamma_1\sqrt{\kappa}}{2}M_{\mathbf{H}}^0\right)\|\mathbf{u}\|_1^2 + \left(\delta_1\nu_m - \gamma_1 M_{\mathbf{u}}^0 - \frac{\gamma_1\sqrt{\kappa}}{2}M_{\mathbf{H}}^0\right)\kappa\|\mathbf{H}\|_1^2 \le \beta_1\|T\|_1\|\mathbf{u}\|_1. \tag{4.17}$$

Из (4.7) вытекает, что

$$\frac{\delta_0\nu}{2} < \delta_0\nu - \gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0 - \gamma_1\frac{\sqrt{\kappa}}{2}M_{\mathbf{H}}^0 - \frac{\beta_1\gamma_2}{\delta_2\lambda}M_T^0, \quad \frac{\delta_1\nu_m}{2} < \delta_1\nu_m - \gamma_1 M_{\mathbf{u}}^0 - \gamma_1\frac{\sqrt{\kappa}}{2}M_{\mathbf{H}}^0. \tag{4.18}$$

Используя (4.18), из (4.17) выводим, что $\delta_0\nu\|\mathbf{u}\|_1^2 + \kappa\delta_1\nu_m\|\mathbf{H}\|_1^2 \le 2\beta_1\|T\|_1\|\mathbf{u}\|_1$. Отсюда получаем следующие оценки для $\|\mathbf{u}\|_1$ и $\|\mathbf{H}\|_1$ относительно $\|T\|_1$:

$$\|\mathbf{u}\|_1 \le \frac{2\beta_1}{\delta_0\nu}\|T\|_1, \quad \|\mathbf{H}\|_1 \le \frac{2\beta_1}{\delta_0\nu}\sqrt{\frac{\mathrm{Pr}_m}{\kappa}}\|T\|_1. \tag{4.19}$$

Рассмотрим далее уравнение (4.14) для разности $T = T_1 - T_2 \in \mathcal{T}$. Полагая в нем $S = T$, в силу (1.18), (1.13), (1.15), (4.12) и условия $\alpha_1 \geq 0$ имеем

$$\lambda a_2(T, T) \leq -\lambda(\alpha T_2, T) - c_2(\mathbf{u}, T_2, T) \leq \gamma_3\lambda M_T^0\|T\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \gamma_2 M_T^0\|\mathbf{u}\|_1\|T\|_1. \tag{4.20}$$

Используя первую оценку в (4.19), (1.10) и условие $T \in \mathcal{T}$, из этого неравенства получаем, что $\delta_2\lambda\|T\|_1^2 \leq \gamma_3\lambda M_T^0\|T\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N} + 2(\beta_1\gamma_2/\delta_0\nu)M_T^0\|T\|_1^2$. Отсюда выводим, что

$$\left(1 - \frac{2\gamma_2}{\delta_0\nu}\frac{\beta_1}{\delta_2\lambda}M_T^0\right)\|T\|_1^2 \equiv (1 - 2\mathrm{Ra})\|T\|_1 \leq \frac{\gamma_3\lambda}{\delta_2\lambda}M_T^0\|T\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N}. \tag{4.21}$$

Из (4.21) и (4.19) вытекают следующие оценки для $\|T\|_1$, $\|\mathbf{u}\|_1$, $\|\mathbf{H}\|_1$ через $\|\alpha\|_{\Gamma_N}$:

$$\|T\|_1 \leq \frac{\gamma_3\lambda M_T^0\|\alpha\|_{\Gamma_N}}{\delta_2\lambda(1 - 2\mathrm{Ra})}, \quad \|\mathbf{u}\|_1 \leq \frac{2\gamma_3\lambda\mathrm{Ra}\|\alpha\|_{\Gamma_N}}{\gamma_2(1 - 2\mathrm{Ra})}, \quad \|\mathbf{H}\|_1 \leq \sqrt{\frac{\mathrm{Pr}_m}{\kappa}}\frac{2\gamma_3\lambda\mathrm{Ra}\|\alpha\|_{\Gamma_N}}{\gamma_2(1 - 2\mathrm{Ra})}. \tag{4.22}$$

Обратимся к неравенству (3.9), в котором заменим $(\hat{T}, \hat{\alpha}, \theta)$ на $(T_i, \alpha_i, \theta_i)$. Получим

$$\mu_1(\alpha_i, \tilde{\alpha} - \alpha_i)_{\Gamma_N} + \tilde{\kappa}\lambda((\tilde{\alpha} - \alpha_i)T_i, \theta_i)_{\Gamma_N} \geq 0 \quad \forall\tilde{\alpha} \in K, \quad i = 1, 2. \tag{4.23}$$

Положим $\tilde{\alpha} = \alpha_1$ в неравенстве (4.23), записанном при $i = 2$, и $\tilde{\alpha} = \alpha_2$ в неравенстве (4.23), записанном при $i = 1$, и сложим. Получим

$$\mu_1\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \leq \tilde{\kappa}\lambda[(\alpha T_2, \theta_2) - (\alpha T_1, \theta_1)_{\Gamma_N}] = -\tilde{\kappa}\lambda(\alpha T, \theta_1)_{\Gamma_N} - \tilde{\kappa}\lambda(\alpha T_2, \theta)_{\Gamma_N}, \quad \alpha \equiv \alpha_1 - \alpha_2. \tag{4.24}$$

Рассмотрим далее тождества (3.10), (3.11) для ξ_i, η_i, σ_i, ζ_1^i, ζ_2^i, θ_i и ζ_3^i при $\lambda_0 = 1$, $I = I_3$, $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_i$, $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_i$, $\hat{T} = T_i$, $i = 1, 2$, и положим $\mathbf{w} = \xi_i \in \mathbf{V}$, $\mathbf{h} = \eta_i \in \mathbf{V}_T$, $\tau = \theta_i \in \mathcal{T}$. Учитывая (1.16), (1.18) и (4.11), получаем

$$\nu a_0(\xi_i, \xi_i) + \nu_1 a_1(\eta_i, \eta_i) + c(\xi_i, \mathbf{u}_i, \xi_i) - \kappa c_1(\mathbf{H}_i, \eta_i, \xi_i) + \kappa c_1(\eta_i, \eta_i, \mathbf{u}_i) + \tilde{\kappa}c_2(\xi_i, T_i, \theta_i) = 0, \tag{4.25}$$

$$\lambda a_2(\theta_i, \theta_i) + \lambda(\alpha\theta_i, \theta_i)_{\Gamma_N} + \tilde{\kappa}^{-1}b_1(\theta_i, \xi_i) = -\tilde{\kappa}^{-1}\mu_0(T_i, \theta_i)_1, \quad i = 1, 2. \tag{4.26}$$

Рассуждая, как при выводе (4.6), из (4.26) и (4.25) последовательно выводим, что

$$\begin{gathered}\|\theta_i\|_1 \leq \frac{\beta_1}{\delta_2\lambda\tilde{\kappa}}\|\xi_i\|_1 + \frac{\mu_0}{\delta_2\lambda\tilde{\kappa}}\|T_i\|_1, \quad \left(\delta_0\nu - \gamma_0 M_{\mathbf{u}}^0 - \gamma_1\frac{\sqrt{\kappa}}{2}M_{\mathbf{H}}^0 - \frac{\beta_1\gamma_2}{\delta_2\lambda}M_T^0\right)\|\xi_i\|_1^2 + \\ + \left(\delta_1\nu_m - \gamma_1 M_{\mathbf{u}}^0 - \gamma_1\frac{\sqrt{\kappa}}{2}M_{\mathbf{H}}^0\right)\kappa\|\eta_i\|_1^2 \leq \frac{\gamma_2\mu_0}{\delta_2\lambda}\|T_i\|_1^2\|\xi_i\|_1 \leq \frac{\gamma_2\mu_0}{\delta_2\lambda}(M_T^0)^2\|\xi_i\|_1.\end{gathered} \tag{4.27}$$

Из второго соотношения в (4.27) выводим с учетом (4.18), что

$$\frac{\delta_0\nu}{2}\|\xi_i\|_1^2 + \frac{\delta_1\nu_m}{2}\kappa\|\eta_i\|_1^2 \leq \frac{\gamma_2\mu_0}{\delta_2\lambda}(M_T^0)^2\|\xi_i\|_1. \tag{4.28}$$

Отсюда и из первого соотношения в (4.27) приходим с учетом обозначений в (4.8) к следующим оценкам для ξ_i, η_i, θ_i:

$$\|\xi_i\|_1 \leq \frac{2}{\delta_0\nu}\frac{\gamma_2\mu_0 M_T^0}{\delta_2\lambda}M_T^0 = \frac{2\mu_0 M_T^0\mathrm{Ra}}{\beta_1}, \quad \|\eta_i\|_1 \leq \frac{2\mu_0 M_T^0\mathrm{Ra}}{\beta_1}\sqrt{\frac{\mathrm{Pr}_m}{\kappa}}, \quad \|\theta_i\|_1 \leq \frac{\mu_0 M_T^0}{\delta_2\lambda\tilde{\kappa}}(2\mathrm{Ra} + 1). \tag{4.29}$$

Обратимся теперь к тождествам для разностей $\xi = \xi_1 - \xi_2$, $s = s_1 - s_2$, $\eta = \eta_1 - \eta_2$, $\theta = \theta_1 - \theta_2$ и $\zeta_k = \zeta_k^1 - \zeta_k^2$, $k = 1, 2, 3$. Они получаются вычитанием друг из друга тождеств (3.10), (3.11) при $\lambda_0 = 1$, записанных для $(\mathbf{x}_1, \alpha_1, \mathbf{y}_1^*)$ и $(\mathbf{x}_2, \alpha_2, \mathbf{y}_2^*)$, и имеют вид

$$\begin{gathered}\nu a_0(\mathbf{w}, \xi) + \nu_1 a_1(\mathbf{h}, \eta) + c(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}, \xi) + c(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \xi_2) + c(\mathbf{w}, \mathbf{u}_1, \xi) + c(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \xi_2) + \\ + \kappa c_1(\eta, \mathbf{H}_1, \mathbf{w}) + \kappa c_1(\eta_2, \mathbf{H}, \mathbf{w}) + \kappa c_1(\eta, \mathbf{h}, \mathbf{u}_1) + \kappa c_1(\eta_2, \mathbf{h}, \mathbf{u}) - \kappa c_1(\mathbf{H}_1, \mathbf{h}, \xi) - \kappa c_1(\mathbf{H}, \mathbf{h}, \xi_2) - \\ - \kappa c_1(\mathbf{h}, \mathbf{H}_1, \xi) - \kappa c_1(\mathbf{h}, \mathbf{H}, \xi_2) + \tilde{\kappa}c_2(\mathbf{w}, T_1, \theta) + \tilde{\kappa}c_2(\mathbf{w}, T, \theta_2) + \\ + b(\mathbf{w}, s) + \langle\zeta_1, \mathbf{w}\rangle_\Gamma + \langle\zeta_2, \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}\rangle_\Gamma = 0 \quad \forall(\mathbf{w}, \mathbf{h}) \in \mathbf{H}_T^1(\Omega \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega),\end{gathered} \tag{4.30}$$

$$\begin{gathered}\lambda a_2(\tau,\theta)+\lambda(\alpha_1\tau,\theta_1)_{\Gamma_N}+\lambda(\alpha_2\tau,\theta_2)_{\Gamma_N}+c_2(\mathbf{u}_1,\tau,\theta)+c_2(\mathbf{u},\tau,\theta_2)+\langle\zeta_3,\tau\rangle_{\Gamma_D}+\\+\tilde{\kappa}^{-1}b_1(\tau,\xi)=-\tilde{\kappa}^{-1}\mu_0(T,\tau)_1\quad\forall\tau\in H^1(\Omega).\end{gathered}\tag{4.31}$$

Полагая в (4.30) и (4.31) $\mathbf{w}=\xi\in\mathbf{V}$, $\mathbf{h}=\eta\in\mathbf{V}_T$, $\tau=\theta\in\mathcal{T}$ и $r=s\in L_0^2(\Omega)$, получаем с учетом (1.16), (1.18) соотношения

$$\begin{gathered}\nu a_0(\xi,\xi)+c(\xi,\mathbf{u}_1,\xi)+\nu_1a_1(\eta,\eta)+\kappa c_1(\eta,\eta,\mathbf{u}_1)-\kappa c_1(\mathbf{H}_1,\eta,\xi)=\\=-c(\mathbf{u},\xi,\xi_2)-c(\xi,\mathbf{u},\xi_2)-\kappa c_1(\eta_2,\mathbf{H},\xi)-\kappa c_1(\eta_2,\eta,\mathbf{u})+\\+\kappa c_1(\mathbf{H},\eta,\xi_2)+\kappa c_1(\eta,\mathbf{H},\xi_2)-\tilde{\kappa}c_2(\xi,T,\theta_2)-\tilde{\kappa}c_2(\xi,T_1,\theta),\end{gathered}\tag{4.32}$$

$$\lambda a_2(\theta,\theta)+\lambda(\alpha_1\theta,\theta)_{\Gamma_N}=-c_2(\mathbf{u},\theta,\theta_2)-\lambda(\alpha\theta,\theta_2)_{\Gamma_N}-\tilde{\kappa}^{-1}\mu_0(T,\theta)_1-\tilde{\kappa}^{-1}b_1(\theta,\xi).\tag{4.33}$$

Из (4.33) выводим с учетом условий $\theta\in\mathcal{T}$ и $\alpha_1\ge 0$, что

$$\delta_2\lambda\|\theta\|_1^2\le\gamma_2\|\mathbf{u}\|_1\|\theta\|_1\|\theta_2\|_1+\gamma_3\lambda\|\theta\|_1\|\theta_2\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N}+\mu_0\tilde{\kappa}^{-1}\|T\|_1\|\theta\|_1+\tilde{\kappa}^{-1}\beta_1\|\theta\|_1\|\xi\|_1.$$

Отсюда приходим к оценке

$$\|\theta\|_1\le\frac{1}{\delta_2\lambda}(\gamma_2\|\theta_2\|_1\|\mathbf{u}\|_1+\gamma_3\lambda\|\theta_2\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N}+\mu_0\tilde{\kappa}^{-1}\|T\|_1)+\frac{\beta_1}{\delta_2\lambda\tilde{\kappa}}\|\xi\|_1.\tag{4.34}$$

Рассуждая, как при выводе второго соотношения в (4.27) из (4.25), и используя (4.34), из (4.32) выводим, что

$$\begin{gathered}\left(\delta_0\nu-\gamma_0M_{\mathbf{u}}^0-\gamma_1\frac{\sqrt{\kappa}}{2}M_{\mathbf{H}}^0\right)\|\xi\|_1^2+\left(\delta_1\nu_m-\gamma_1M_{\mathbf{u}}^0-\gamma_1\frac{\sqrt{\kappa}}{2}M_{\mathbf{H}}^0\right)\kappa\|\eta\|_1^2\le\\\le 2\gamma_0\|\mathbf{u}\|_1\|\xi_2\|_1\|\xi\|_1+\gamma_1\kappa\|\mathbf{H}\|_1\|\eta_2\|_1\|\xi\|_1+\gamma_1\kappa\|\mathbf{u}\|_1\|\eta_2\|_1\|\eta\|_1+\\+2\gamma_1\kappa\|\mathbf{H}\|_1\|\xi_2\|_1\|\eta\|_1+\gamma_2\tilde{\kappa}\|T\|_1\|\theta_2\|_1\|\xi\|_1+\gamma_2M_T^0\tilde{\kappa}\|\theta\|_1\|\xi\|_1\le\\\le 2\gamma_0\|\mathbf{u}\|_1\|\xi_2\|_1\|\xi\|_1+\gamma_1\kappa\|\mathbf{H}\|_1\|\eta_2\|_1\|\xi\|_1+\gamma_1\kappa\|\mathbf{u}\|_1\|\eta_2\|_1\|\eta\|_1+2\gamma_1\kappa\|\mathbf{H}\|_1\|\xi_2\|_1\|\eta\|_1+\\+\tilde{\kappa}\gamma_2\|T\|_1\|\theta_2\|_1\|\xi\|_1+\frac{\gamma_2M_T^0\tilde{\kappa}}{\delta_2\lambda}(\gamma_2\|\theta_2\|_1\|\mathbf{u}\|_1+\gamma_3\lambda\|\theta_2\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N}+\mu_0\tilde{\kappa}^{-1}\|T\|_1)\|\xi\|_1+\frac{\beta_1\gamma_2M_T^0}{\delta_2\lambda}\|\xi\|_1^2.\end{gathered}$$

Из этого соотношения вытекает, что

$$\begin{gathered}\left(\delta_0\nu-\gamma_0M_{\mathbf{u}}^0-\gamma_1\frac{\sqrt{\kappa}}{2}M_{\mathbf{H}}^0-\frac{\beta_1\gamma_2}{\delta_2\lambda}M_T^0\right)\|\xi\|_1^2+\left(\delta_1\nu_m-\gamma_1M_{\mathbf{u}}^0-\gamma_1\frac{\sqrt{\kappa}}{2}M_{\mathbf{H}}^0\right)\kappa\|\eta\|_1^2\le\\\le 2\gamma_0\|\mathbf{u}\|_1\|\xi_2\|_1\|\xi\|_1+\gamma_1\kappa\|\mathbf{H}\|_1\|\eta_2\|_1\|\xi\|_1+\gamma_1\kappa\|\mathbf{u}\|_1\|\eta_2\|_1\|\eta\|_1+2\gamma_1\kappa\|\mathbf{H}\|_1\|\xi_2\|_1\|\eta\|_1+\\+\gamma_2\tilde{\kappa}\|T\|_1\|\theta_2\|_1\|\xi\|_1+\frac{\gamma_2M_T^0}{\delta_2\lambda}(\gamma_2\tilde{\kappa}\|\theta_2\|_1\|\mathbf{u}\|_1+\gamma_3\lambda\tilde{\kappa}\|\theta_2\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N}+\mu_0\|T\|_1)\|\xi\|_1.\end{gathered}\tag{4.35}$$

Используя оценки (4.29) для $\|\xi_2\|_1$, $\|\eta_2\|_1$, $\|\theta_2\|_1$ и (4.22) для $\|T\|_1$, $\|\mathbf{u}\|_1$, $\|\mathbf{H}\|_1$, имеем

$$\gamma_0\|\mathbf{u}\|_1\|\xi_2\|_1\le\gamma_0\frac{2\mathrm{Ra}\mu_0M_T^0}{\beta_1}\frac{2\gamma_3\lambda\mathrm{Ra}}{\gamma_2(1-2\mathrm{Ra})}\|\alpha\|_{\Gamma_N}=\frac{4\gamma_0\gamma_3\lambda\mu_0M_T^0\mathrm{Ra}^2}{\gamma_2\ \beta_1(1-2\mathrm{Ra})}\|\alpha\|_{\Gamma_N},\tag{4.36}$$

$$\gamma_1\kappa\|\mathbf{H}\|_1\|\eta_2\|_1\le\gamma_1\kappa\frac{2\mathrm{Ra}\mu_0M_T^0}{\beta_1}\sqrt{\frac{\mathrm{Pr}_m}{\kappa}}\frac{2\gamma_3\lambda\mathrm{Ra}}{\gamma_2(1-2\mathrm{Ra})}\sqrt{\frac{\mathrm{Pr}_m}{\kappa}}\|\alpha\|_{\Gamma_N}=\frac{4\gamma_1\gamma_3\lambda\mu_0M_T^0\mathrm{Pr}_m\mathrm{Ra}^2}{\beta_1\gamma_2(1-2\mathrm{Ra})}\|\alpha\|_{\Gamma_N},\tag{4.37}$$

$$\gamma_1\kappa\|\mathbf{u}\|_1\|\eta_2\|_1\le\gamma_1\kappa\frac{2\mathrm{Ra}\mu_0M_T^0}{\beta_1}\sqrt{\frac{\mathrm{Pr}_m}{\kappa}}\frac{2\gamma_3\lambda\mathrm{Ra}}{\gamma_2(1-2\mathrm{Ra})}\|\alpha\|_{\Gamma_N}=\frac{4\gamma_1\gamma_3\lambda\mu_0M_T^0\sqrt{\mathrm{Pr}_m}\mathrm{Ra}^2}{\beta_1\gamma_2(1-2\mathrm{Ra})}\sqrt{\kappa}\|\alpha\|_{\Gamma_N},\tag{4.38}$$

$$\gamma_1\kappa\|\mathbf{H}\|_1\|\xi_2\|_1\le\gamma_1\kappa\frac{2\mathrm{Ra}\mu_0M_T^0}{\beta_1}\frac{2\gamma_3\lambda\mathrm{Ra}}{\gamma_2(1-2\mathrm{Ra})}\sqrt{\frac{\mathrm{Pr}_m}{\kappa}}\|\alpha\|_{\Gamma_N}=\frac{4\gamma_1\gamma_3\lambda\mu_0M_T^0\sqrt{\mathrm{Pr}_m}\mathrm{Ra}^2}{\beta_1\gamma_2(1-2\mathrm{Ra})}\sqrt{\kappa}\|\alpha\|_{\Gamma_N},\tag{4.39}$$

$$\gamma_2\tilde{\kappa}\|T\|_1\|\theta_2\|_1\le\frac{\gamma_2M_T^0}{\delta_2\lambda}(2\mathrm{Ra}+1)\frac{\gamma_3\lambda M_T^0}{\delta_2\lambda(1-2\mathrm{Ra})}\|\alpha\|_{\Gamma_N}=\frac{\gamma_3\lambda\mu_0M_T^0\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ra}(2\mathrm{Ra}+1)}{\beta_1(1-2\mathrm{Ra})}\|\alpha\|_{\Gamma_N}.\tag{4.40}$$

Из (4.36)–(4.40) выводим, что

$$
\begin{gathered}
2\gamma_0\|\mathbf{u}\|_1\|\xi_2\|_1\|\xi\|_1 + \gamma_1\kappa\|\mathbf{H}\|_1\|\eta_2\|_1\|\xi\|_1 + \gamma_1\kappa\|\mathbf{u}\|_1\|\eta_2\|_1\|\eta\|_1 + \\
+ 2\gamma_1\kappa\|\mathbf{H}\|_1\|\xi_2\|_1\|\eta\|_1 + \gamma_2\tilde{\kappa}\|T\|_1\|\theta_2\|_1\|\xi\|_1 \le \\
\le \frac{\gamma_3\lambda\mu_0 M_T^0 \mathrm{Ra}}{\beta_1(1-2\mathrm{Ra})}\left[\frac{8\gamma_0\mathrm{Ra}}{\gamma_2}\|\xi\|_1 + \frac{4\gamma_1\mathrm{Pr}_m\mathrm{Ra}}{\gamma_2}\|\xi\|_1 + 12\frac{\gamma_1\sqrt{\mathrm{Pr}_m}\mathrm{Ra}}{\gamma_2}\sqrt{\kappa}\|\eta\|_1 + \mathrm{Pr}(2\mathrm{Ra}+1)\|\xi\|_1\right]\|\alpha\|_{\Gamma_N} \le \\
\le \frac{\gamma_3\lambda\mu_0 M_T^0\mathrm{Ra}M_0}{\beta_1(1-2\mathrm{Ra})}(\|\xi\|_1^2 + \kappa\|\eta\|_1^2)^{1/2}\|\alpha\|_{\Gamma_N},
\end{gathered} \tag{4.41}
$$

где

$$
M_0 \equiv \frac{8\gamma_0\mathrm{Ra}}{\gamma_2} + \frac{4\gamma_1\mathrm{Pr}_m\mathrm{Ra}}{\gamma_2} + \frac{12\gamma_1\sqrt{\mathrm{Pr}_m}\mathrm{Ra}}{\gamma_2} + \mathrm{Pr}(2\mathrm{Ra}+1).
$$

Аналогичным образом выводим, что

$$
\begin{gathered}
\frac{\gamma_2 M_T^0}{\delta_2\lambda}(\gamma_2\tilde{\kappa}\|\theta_2\|_1\|\mathbf{u}\|_1 + \gamma_3\lambda\tilde{\kappa}\|\theta_2\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \mu_0\|T\|_1) \le \frac{\gamma_3\lambda\mu_0 M_T^0\mathrm{PrRa}}{\beta_1}\left[\frac{2\mathrm{Ra}(2\mathrm{Ra}+1)}{1-2\mathrm{Ra}} + \right. \\
\left. + (2\mathrm{Ra}+1) + \frac{1}{1-2\mathrm{Ra}}\right]\|\alpha\|_{\Gamma_N} \le \frac{\gamma_3\lambda\mu_0 M_T^0\mathrm{PrRa}(2\mathrm{Ra}+2)}{\beta_1(1-2\mathrm{Ra})}\|\alpha\|_{\Gamma_N}.
\end{gathered} \tag{4.42}
$$

Учитывая (4.41), (4.42) и (4.18), из (4.35) получаем

$$
\frac{\delta_0\nu}{2}\|\xi\|_1^2 + \frac{\delta_1\nu_m}{2}\kappa\|\eta\|_1^2 \le \frac{\gamma_3\lambda\mu_0 M_T^0\mathrm{Ra}[M_0 + \mathrm{Pr}(2\mathrm{Ra}+2)]}{\beta_1(1-2\mathrm{Ra})}(\|\xi\|_1^2 + \kappa\|\eta\|_1^2)^{1/2}\|\alpha\|_{\Gamma_N}.
$$

Отсюда следует с учетом условий $\delta_0\nu \ge \nu_*$, $\delta_1\nu_m \ge \nu_*$, что

$$
\|\xi\|_1 \le \frac{2\gamma_3\lambda\mu_0 M_T^0\mathrm{Ra}M_1}{\nu_*\beta_1(1-2\mathrm{Ra})}\|\alpha\|_{\Gamma_N}, \quad M_1 \equiv \frac{8\gamma_0\mathrm{Ra}}{\gamma_2} + \frac{4\gamma_1\mathrm{Pr}_m\mathrm{Ra}}{\gamma_2} + \frac{12\gamma_1\sqrt{\mathrm{Pr}_m}\mathrm{Ra}}{\gamma_2} + \mathrm{Pr}(4\mathrm{Ra}+3). \tag{4.43}
$$

Используя (4.43), перепишем (4.34) в виде

$$
\|\theta\|_1 \le \frac{1}{\delta_2\lambda}(\gamma_2\|\theta_2\|_1\|\mathbf{u}\|_1 + \gamma_3\lambda\|\theta_2\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \mu_0\tilde{\kappa}^{-1}\|T\|_1) + \frac{\beta_1}{\delta_2\lambda\tilde{\kappa}}\frac{2\gamma_3\lambda\mu_0 M_T^0\mathrm{Ra}M_1}{\nu_*\beta_1(1-2\mathrm{Ra})}\|\alpha\|_{\Gamma_N}. \tag{4.44}
$$

Из (4.42) вытекает, что

$$
\frac{1}{\delta_2\lambda}(\gamma_2\|\theta_2\|_1\|\mathbf{u}\|_1 + \gamma_3\lambda\|\theta_2\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \mu_0\tilde{\kappa}^{-1}\|T\|_1) \le \frac{\gamma_3\lambda\mu_0\mathrm{PrRa}(2\mathrm{Ra}+2)}{\beta_1\gamma_2\tilde{\kappa}(1-2\mathrm{Ra})}\|\alpha\|_{\Gamma_N}. \tag{4.45}
$$

Учитывая (4.45), из (4.44) приходим к следующей оценке $\|\theta\|_1$ через $\|\alpha\|_{\Gamma_N}$:

$$
\|\theta\|_1 \le \left[\frac{\gamma_3\lambda\mu_0\mathrm{PrRa}(2\mathrm{Ra}+2)}{\beta_1\gamma_2\tilde{\kappa}(1-2\mathrm{Ra})} + \frac{2\beta_1\gamma_3\lambda\mu_0 M_T^0\mathrm{Ra}M_1}{\delta_2\lambda\tilde{\kappa}\nu_*\beta_1(1-2\mathrm{Ra})}\right]\|\alpha\|_{\Gamma_N} = \frac{\gamma_3\lambda\mu_0 M_2\|\alpha\|_{\Gamma_N}}{\beta_1\gamma_2\tilde{\kappa}(1-2\mathrm{Ra})}. \tag{4.46}
$$

Здесь $M_2 = \mathrm{PrRa}(2\mathrm{Ra}+2) + 2(\delta_0\nu/\nu_*)\mathrm{Ra}^2 M_1$.

Обратимся к неравенству (4.24). Используя (1.15), (4.22), (4.29) и (4.46), имеем

$$
\begin{gathered}
-\tilde{\kappa}\lambda[(\alpha T, \theta_1)_{\Gamma_N} + (\alpha T_2, \theta)_{\Gamma_N}] \le \gamma_3\lambda\tilde{\kappa}(\|T\|_1\|\theta_1\|_1 + \|T_2\|_1\|\theta\|_1)\|\alpha\|_{\Gamma_N} \le \\
\le \gamma_3\lambda\left[\frac{\gamma_3\lambda\mu_0(M_T^0)^2(2\mathrm{Ra}+1)}{(\delta_2\lambda)^2(1-2\mathrm{Ra})} + \frac{\gamma_3\lambda\mu_0 M_T^0 M_2}{\beta_1\gamma_2(1-2\mathrm{Ra})}\right]\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 = \frac{\gamma_3^2\lambda^2\mu_0 M_T^0 M_3}{\beta_1\gamma_2(1-2\mathrm{Ra})}\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2.
\end{gathered} \tag{4.47}
$$

Здесь $M_3 = M_3(\mathrm{Pr}, \mathrm{Pr}_m, \mathrm{Ra}, \nu, \nu_m)$ – безразмерная константа, определяемая формулой

$$
M_3 = \mathrm{PrRa}(4\mathrm{Ra}+3) + 2\frac{\delta_0\nu}{\nu_*}\mathrm{Ra}^2\left[\frac{8\gamma_0}{\gamma_2}\mathrm{Ra} + \frac{4\gamma_1}{\gamma_2}\mathrm{Pr}_m\mathrm{Ra} + \frac{12\gamma_1}{\gamma_2}\sqrt{\mathrm{Pr}_m}\mathrm{Ra} + \mathrm{Pr}(4\mathrm{Ra}+3)\right]. \tag{4.48}
$$

Предположим, что выполняется условие

$$\mu_1 \geq \mu_0 \frac{\gamma_3^2 \lambda^2 M_T^0 M_3}{\beta_1 \gamma_2 (1 - 2\mathrm{Ra})}. \tag{4.49}$$

Тогда из (4.24) и (4.47) вытекает, что $\alpha = 0$. Отсюда и из (4.22), (4.13) следует, что $T = 0$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ и $p = 0$. Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы и следствия.

Теорема 7. *Пусть в дополнение к условиям* (i)–(iii) *и* (j) *выполняются условия* (4.9), (4.49). *Тогда решение* $((\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, T), \alpha) \in X \times K$ *задачи* (4.10) *единственно.*

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 7 система оптимальности для задачи (4.10) имеет единственное решение.

По аналогичной схеме может быть исследована единственность решения экстремальной задачи (3.3) при замене в ее формулировке функционала $I_3(T) = \|T\|_1^2$ функционалом $I_2(T) = |T|_1^2$ либо функционалом $I_1(T) = \|T - T_d\|_Q^2$. Рассмотрим для конкретности задачу

$$J(T, \alpha) = \frac{\mu_0}{2}\|T - T_d\|_Q^2 + \frac{\mu_1}{2}\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \longrightarrow \inf, \quad F(\mathbf{x}, \alpha) = 0, \quad \mathbf{x} \in X, \quad \alpha \in K. \tag{4.50}$$

Покажем, что при выполнении условия типа (4.49) решение задачи (4.50) единственно и, более того, устойчиво относительно малых возмущений функции T_d в норме $L^2(Q)$.

Обозначим произвольное решение системы оптимальности для задачи (4.50), отвечающее функции $T_d^{(1)}$, через $(\mathbf{x}_1, \alpha_1, \mathbf{y}_1^*)$, а функции $T_d^{(2)}$ – через $(\mathbf{x}_2, \alpha_2, \mathbf{y}_2^*)$. Положим $T_d = T_d^{(1)} - T_d^{(2)}$, $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Простой анализ показывает, что в условиях задачи (4.50) соотношения (4.13)–(4.15), как и (4.25), (4.32), не изменяются, тогда как (4.26) и (4.33) переходят с учетом условий

$$I = I_1, \quad \langle I_T'(\mathbf{x}_i, \alpha_i), \tau\rangle = \mu_0(T_i - T_d, \tau)_Q, \quad \langle I_T'(\mathbf{x}_1, \alpha_1) - I_T'(\mathbf{x}_2, \alpha_2), \tau\rangle = \mu_0(T, \tau)_Q, \tag{4.51}$$

где $T = T_1 - T_2$, $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{H}_1, p_1, T_1)$, $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{u}_2, \mathbf{H}_2, p_2, T_2)$, в соотношения

$$\lambda a_2(\theta_i, \theta_i) + \lambda(\alpha_i\theta_i, \theta_i)_{\Gamma_N} = -\tilde{\kappa}^{-1} b_1(\theta_i, \xi_i) - \tilde{\kappa}^{-1}\mu_0(T_i - T_d^{(i)}, \theta_i)_Q, \tag{4.52}$$

$$\lambda a_2(\theta, \theta) + \lambda(\alpha_1\theta, \theta)_{\Gamma_N} = -c_2(\mathbf{u}, \theta, \theta_2) - \lambda(\alpha\theta, \theta_2)_{\Gamma_N} - \mu_0\tilde{\kappa}^{-1}(T, \theta)_Q - \mu_0\tilde{\kappa}^{-1}(T_d, \theta)_Q - \tilde{\kappa}^{-1} b_1(\theta, \xi). \tag{4.53}$$

Отсюда следует, что указанные изменения в постановке экстремальной задачи не приводят к изменениям в оценках (4.22) величин $\|T\|_1$, $\|\mathbf{u}\|_1$ и $\|\mathbf{H}\|_1$ через $\|\alpha\|_{\Gamma_N}$. В то же время из (4.52) выводим, используя очевидную оценку $\|T\|_Q \leq l\|T\|_1$, где l – введенный в начале разд. 4 размерный множитель, что (вместо первой оценки в (4.27)) выполняется оценка

$$\|\theta_i\|_1 \leq \frac{\beta_1}{\delta_2\lambda\tilde{\kappa}}\|\xi_i\|_1 + \frac{\mu_0\tilde{M}_T^0}{\delta_2\lambda\tilde{\kappa}}, \quad \tilde{M}_T^0 \equiv l^2 M_T^0 + l\max(\|T_d^{(1)}\|_Q, \|T_d^{(2)}\|_Q).$$

С учетом этого, рассуждая, как при выводе (4.29), приходим из (4.25), (4.52) к следующим оценкам для лагранжевых множителей ξ_i, η_i, θ_i:

$$\|\xi_i\|_1 \leq \frac{2\mu_0\tilde{M}_T^0\mathrm{Ra}}{\beta_1}, \quad \|\eta_i\|_1 \leq \frac{2\mu_0\tilde{M}_T^0\mathrm{Ra}}{\beta_1}\sqrt{\frac{\mathrm{Pr}_m}{\kappa}}, \quad \|\theta_i\|_1 \leq \frac{\mu_0\tilde{M}_T^0(2\mathrm{Ra} + 1)}{\delta_2\lambda\tilde{\kappa}}. \tag{4.54}$$

Обратимся теперь к соотношениям (4.32) и (4.53) для разностей $\xi = \xi_1 - \xi_2$, $\eta = \eta_1 - \eta_2$ и $\theta = \theta_1 - \theta_2$. Рассуждая, как и выше, при выводе (4.34), (4.35), но используя новые оценки (4.54) для $\|\xi_2\|_1$, $\|\eta_2\|_1$, $\|\theta_2\|_1$ и прежние оценки (4.22) для $\|T\|_1$, $\|\mathbf{u}\|_1$, из (4.53) и (4.32) приходим к следующим неравенствам:

$$\|\theta\|_1 \leq \frac{1}{\delta_2\lambda}(\gamma_2\|\theta_2\|_1\|\mathbf{u}\|_1 + \gamma_3\lambda\|\theta_2\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N} + \mu_0\tilde{\kappa}^{-1}l^2\|T\|_1 + \mu_0\tilde{\kappa}^{-1}l\|T_d\|_Q) + \frac{\beta_1}{\delta_2\lambda\tilde{\kappa}}\|\xi\|_1, \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_0\nu}{2}\|\xi\|_1^2+\frac{\delta_1\nu_m}{2}\kappa\|\eta\|_1^2 &\le 2\gamma_0\|\mathbf{u}\|_1\|\xi_2\|_1\|\xi\|_1+2\gamma_1\kappa\|\mathbf{H}\|_1\|\xi_2\|_1\|\eta\|_1+\\ &+\gamma_1\kappa\|\mathbf{H}\|_1\|\eta_2\|_1\|\xi\|_1+\gamma_1\kappa\|\mathbf{u}\|_1\|\eta_2\|_1\|\eta\|_1+\gamma_2\tilde\kappa\|T\|_1\|\theta_2\|_1\|\xi\|_1+\\ &+\frac{\gamma_2M_T^0}{\delta_2\lambda}(\gamma_2\tilde\kappa\|\theta_2\|_1\|\mathbf{u}\|_1+\gamma_3\lambda\tilde\kappa\|\theta_2\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N}+\mu_0l^2\|T\|_1+\mu_0l\|T_d\|_Q)\|\xi\|_1\end{aligned} \tag{4.56}$$

для $\|\theta\|_1$, $\|\xi\|_1$ и $\|\eta\|_1$. Они отличаются от (4.34) и (4.35) наличием дополнительного слагаемого с нормой $\|T_d\|_Q$ в круглых скобках. С учетом этого факта, рассуждая, как и выше, опять выводим соотношение (4.41), а вместо (4.42) получаем соотношение

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma_2\tilde\kappa M_T^0}{\delta_2\lambda}(\gamma_2\|\theta_2\|_1\|\mathbf{u}\|_1+\gamma_3\lambda\|\theta_2\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N}+\mu_0\tilde\kappa^{-1}l^2\|T\|_1+\mu_0\tilde\kappa^{-1}l\|T_d\|_Q)\le\\ &\le\frac{\gamma_3\lambda\mu_0\tilde M_T^0\mathrm{PrRa}(2\mathrm{Ra}+2)}{\beta_1(1-2\mathrm{Ra})}\|\alpha\|_{\Gamma_N}+\frac{\gamma_2\mu_0lM_T^0\|T_d\|_Q}{\delta_2\lambda}.\end{aligned} \tag{4.57}$$

Учитывая (4.41) и (4.57), из (4.56) выводим, в силу условий $\delta_0\nu\ge\nu_*$, $\delta_1\nu_m\ge\nu_*$, что

$$\begin{aligned}\|\xi\|_1&\le\frac{2\gamma_3\lambda\mu_0\tilde M_T^0\mathrm{Ra}M_1\|\alpha\|_{\Gamma_N}}{\nu^*\beta_1(1-2\mathrm{Ra})}+\frac{2}{\nu_*}\frac{\gamma_2l\mu_0M_T^0\|T_d\|_Q}{\delta_2\lambda}=\\ &=\frac{2\gamma_3\lambda\mu_0\tilde M_T^0\mathrm{Ra}M_1\|\alpha\|_{\Gamma_N}}{\nu_*\beta_1(1-2\mathrm{Ra})}+\frac{2\delta_0\nu}{\nu_*}\frac{\mu_0l\mathrm{Ra}\|T_d\|_Q}{\beta_1}.\end{aligned} \tag{4.58}$$

Используя (4.58), переписываем (4.55) в виде

$$\begin{aligned}\|\theta\|_1&\le\frac{1}{\delta_2\lambda}(\gamma_1\|\theta_2\|_1\|\mathbf{u}\|_1+\gamma_3\lambda\|\theta_2\|_1\|\alpha\|_{\Gamma_N}+\mu_0\tilde\kappa^{-1}l^2\|T\|_1+\mu_0\tilde\kappa^{-1}l\|T_d\|_Q)+\\ &+\frac{\beta_1}{\delta_2\lambda\tilde\kappa}\frac{2\gamma_3\lambda\mu_0\tilde M_T^0\mathrm{Ra}M_1\|\alpha\|_{\Gamma_N}}{\nu_*\beta_1(1-2\mathrm{Ra})}+\frac{\beta_1}{\delta_2\lambda\tilde\kappa}\frac{2\mu_0l\mathrm{Ra}\|T_d\|_Q}{\beta_1}.\end{aligned} \tag{4.59}$$

Оценивая первое слагаемое в (4.59) из (4.57), приходим к следующей оценке $\|\theta\|_1$:

$$\begin{aligned}\|\theta\|_1&\le\left[\frac{\tilde M_T^0}{M_T^0}\frac{\gamma_3\lambda\mu_0\mathrm{PrRa}(2\mathrm{Ra}+2)}{\beta_1\gamma_2\tilde\kappa(1-2\mathrm{Ra})}+\frac{\beta_1}{\delta_2\lambda\tilde\kappa}\frac{2\gamma_3\lambda\mu_0\tilde M_T^0\mathrm{Ra}M_1}{\nu_*\beta_1(1-2\mathrm{Ra})}\right]\|\alpha\|_{\Gamma_N}+\frac{2\mu_0l\mathrm{Ra}\|T_d\|_Q}{\delta_2\lambda\tilde\kappa}+\\ &+\frac{\mu_0l\|T_d\|_Q}{\delta_2\lambda\tilde\kappa}=\frac{\gamma_3\lambda\mu_0M_2}{\beta_1\gamma_2\tilde\kappa(1-2\mathrm{Ra})}\frac{\tilde M_T^0}{M_T^0}\|\alpha\|_{\Gamma_N}+\frac{\mu_0l(2\mathrm{Ra}+1)}{\delta_2\lambda\tilde\kappa}\|T_d\|_Q.\end{aligned} \tag{4.60}$$

Обратимся опять к неравенству (4.24) и оценим в нем правую часть. Используя (1.15), (4.22), (4.54) и (4.60), имеем

$$\begin{aligned}&-\tilde\kappa\lambda[(\alpha T,\theta_1)_{\Gamma_N}+(\alpha T_2,\theta)_{\Gamma_N}]\le\gamma_3\lambda\kappa(\|T\|_1\|\theta_1\|_1+\|T_2\|_1\|\theta\|_1)\|\alpha\|_{\Gamma_N}\le\\ &\le\frac{\gamma_3^2\lambda^2\mu_0\tilde M_T^0M_3}{\beta_1\gamma_2(1-2\mathrm{Ra})}\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2+\frac{\gamma_3\mu_0l\tilde M_T^0(2\mathrm{Ra}+1)}{\delta_2}\|T_d\|_Q\|\alpha\|_{\Gamma_N}.\end{aligned} \tag{4.61}$$

Учитывая (4.61), из (4.24) выводим, что

$$\left[\mu_1-\frac{\gamma_3^2\lambda^2\mu_0\tilde M_T^0M_3}{\beta_1\gamma_2(1-2\mathrm{Ra})}\right]\|\alpha\|_{\Gamma_N}^2\le\frac{\gamma_3\mu_0lM_T^0(2\mathrm{Ra}+1)}{\delta_2}\|T_d\|_Q\|\alpha\|_{\Gamma_N}. \tag{4.62}$$

Предположим, что выполняется условие

$$\mu_1\ge\frac{\gamma_3^2\lambda^2\mu_0M_3}{\beta_1\gamma_2(1-2\mathrm{Ra})}[l^2M_T^0+l\max(\|T_d^{(1)}\|_Q,\|T_d^{(2)}\|_Q)]+\varepsilon,\quad \varepsilon=\mathrm{const}>0. \tag{4.63}$$

Тогда из (4.62) и (4.22) приходим к искомым оценкам устойчивости. Они имеют вид

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\|_{\Gamma_N} \le \frac{\gamma_3\mu_0 l M_T^0(2\mathrm{Ra}+1)}{\delta_2\varepsilon}\|T_d^{(1)} - T_d^{(2)}\|_Q, \tag{4.64}$$

$$\|T_1 - T_2\|_1 \le \frac{\gamma_3\lambda M_T^0}{\delta_1\lambda(1-2\mathrm{Ra})}\frac{\gamma_3\mu_0 l M_T^0(1+2\mathrm{Ra})}{\delta_2\varepsilon}\|T_d^{(1)} - T_d^{(2)}\|_Q, \tag{4.65}$$

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_1 \le \frac{2\gamma_3\lambda\mathrm{Ra}}{\gamma_2(1-2\mathrm{Ra})}\frac{\gamma_3\mu_0 l M_T^0(1+2\mathrm{Ra})}{\delta_2\varepsilon}\|T_d^{(1)} - T_d^{(2)}\|_Q, \tag{4.66}$$

$$\|\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2\|_1 \le \frac{\sqrt{\mathrm{Pr}_m}}{\kappa}\frac{2\gamma_3\lambda\mathrm{Ra}}{\gamma_2(1-2\mathrm{Ra})}\frac{\gamma_3\mu_0 l M_T^0(1+2\mathrm{Ra})}{\delta_2\varepsilon}\|T_d^{(1)} - T_d^{(2)}\|_Q. \tag{4.67}$$

Тем самым теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть, в дополнение к условиям* (i)–(iii), (j), $T_d^{(i)} \in L^2(Q)$ – *заданные функции и выполняются условия* (4.9), (4.63), *где константа* M_3 *определена в* (4.48). *Обозначим через* $((\mathbf{u}_i, \mathbf{H}_i, p_i, T_i), \alpha_i) \in \in X \times K$ *решение задачи* (4.50), *отвечающее функции* $T_d^{(i)}$, $i = 1, 2$. *Тогда справедливы оценки устойчивости* (4.64)–(4.67).

Замечания. 1. Подчеркнем, что единственность решения задачи (4.10) доказана лишь при условии, что параметр μ_1 в (4.10) положителен и, более того, удовлетворяет условию (4.49). Точно так же единственность и устойчивость относительно малых возмущений функции T_d решения задачи (4.50) показаны при выполнении аналогичного условия (4.63) на параметр μ_1. Условия (4.49), (4.63) содержат сжатую информацию об исходной нелинейной модели МГД вязкой теплопроводной жидкости в виде безразмерной константы M_3, определенной в (4.48). Анализ приведенного выражения для M_3 говорит о важности использования при исследовании задач (4.10) и (4.50) безразмерных параметров Re, Ra, Ha, Pr и Pr_m, введенных в (4.8). Действительно, без их использования выражение для M_3 имело бы практически необозримый вид. Из (4.48) также видно, что число M_3 не зависит от модельных чисел Рейнольдса Re и Гартмана Ha. Это является спецификой рассматриваемых задач (4.10) и (4.50), которые относятся к экстремальным задачам температурного типа. Поэтому при фиксированных значениях параметров μ_0 и μ_1 неравенства (4.49), (4.63) представляют собой дополнительные ограничения, главным образом на модельное число Рэлея Ra, которые вместе с ограничениями в (4.9) служат для обеспечения единственности и устойчивости решений задач (4.10), (4.50). Наоборот, при фиксированных значениях чисел Ra, Pr и Pr_m условия (4.49) и (4.63) означают, что для обеспечения единственности и устойчивости решений задач (4.10) и (4.50) параметр μ_1 должен быть положительным и превосходить константы, стоящие в правых частях неравенств (4.49), (4.63).

2. По аналогичной схеме может быть исследована единственность и устойчивость более сложной многопараметрической экстремальной задачи, заключающейся в восстановлении как функции α, так и некоторых из функций f, ψ и χ, исходя из условия минимизации одного из "температурных" функционалов качества.

3. В случае когда $\delta_0\nu \le \delta_1\nu_m$, выражение (4.48) для константы M_3 упрощается, поскольку в этом случае $\delta_0\nu/\nu_* = 1$. Более того, поскольку, в силу (4.8), $\mathrm{Pr}_m \equiv \delta_0\nu/\delta_1\nu_m \longrightarrow 0$ при $\nu_m \longrightarrow \infty$ (или при $\sigma \longrightarrow 0$), то (4.48) при $\sigma \longrightarrow 0$ принимает вид

$$M_3 = M_3(\mathrm{Pr}, \mathrm{Ra}) \equiv \mathrm{Pr}\mathrm{Ra}(4\mathrm{Ra}+3) + 2\mathrm{Ra}^2\left[\frac{8\gamma_0\mathrm{Ra}}{\gamma_2} + \mathrm{Pr}(4\mathrm{Ra}+3)\right],$$

а условия (4.48) и (4.63) переходят в условия единственности и устойчивости соответствующих коэффициентных задач идентификации вида (4.10) и (4.50) для модели тепловой конвекции непроводящей жидкости, полученные в [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hou L.S., Meir A.J.* Boundary optimal control of MHD flows // Appl. Math. Optimizat. 1995. V. 32. P. 143–162.
2. *Алексеев Г.В.* Задачи управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости // Прикл. механ. и техн. физ. 2003. Т. 44. № 6. С. 170–179.
3. *Алексеев Г.В.* Разрешимость задач управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости // Сибирский матем. журнал. 2004. Т. 45. № 2. С. 243–262.
4. *Griesse R., Kunish K.* A practical optimal control approach to the stationary MHD system in velocity current formulation: Rpt: RICAM 2005-02, Linz: Johann Radon Inst. for Comput. and Appl. Math., 2005.
5. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В.* Задачи управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости со смешанными граничными условиями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 12. С. 2131–2147.

6. *Алексеев Г.В.* Задачи управления для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости // Успехи механ. 2006. № 2. С. 66–116.
7. *Алексеев Г.В.* Краевые задачи и задачи управления для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости // Докл. РАН. 2005. Т. 405. № 6. С. 744–748.
8. *Gunzburger M., Trenchea C.* Analysis of an optimal control problem for the three-dimensional coupled modified Navier–Stokes and Maxwell equations // J. Math. Analys. Appl. 2007. № 333. P. 295–310.
9. *Gunzburger M., Peterson J., Trenchea C.* The velocity tracking problem for MHD flows with distributed magnetic field controls // Internat. J. Pure Appl. Math. 2008. V. 42. № 2. P. 289–296.
10. *Алексеев Г.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепловой конвекции // Вестн. Новосибирского ун-та. Сер. матем., механ., информатики. 2006. Т. 6. № 2. С. 6–32.
11. *Алексеев Г.В.* Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 6. С. 1055–1076.
12. *Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А.* Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // Прикл. механ. и техн. физ. 2008. Т. 49. № 4. С. 24–35.
13. *Алексеев Г.В.* Разрешимость краевой задачи для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости // Сибирский ж. индустр. матем. 2006. Т. 9. № 1. С. 13–27.
14. *Meir A.J., Schmidt P.G.* On electromagnetically and thermally driven liquid-metal flows // Nonlinear Analys. 2001. V. 47. P. 3281–3294.
15. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Анализ и оптимизация в задачах гидродинамики вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008.
16. *Girault V., Raviart P.A.* Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms. Berlin: Springer, 1986.
17. *Alonso A., Valli A.* Some remarks on the characterization of the space of tangential traces of $\mathbf{H}(\mathrm{rot}; \Omega)$ and the construction of the extension operator // Manuscript Math. 1996. V. 89. P. 159–178.
18. *Valli A.* Orthogonal decompositions of $\mathbf{L}^2(\Omega)^3$: Preprint UTM 493. Dept. Math. Univ. of Toronto. Galamen, 1995.
19. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8. М.: Наука, 1982.
20. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
21. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973.