В. Н. Дубинин, Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1988, том 168, 48–66

В.Н.Дубинин

РАЗДЕЛЯЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ И ЗАДАЧИ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ

Введение

В последнее время в теории функций получил развитие метод кусочно-разделяющей симметризации. Суть этого метода заключается в следующем: исследуемый объект разбивается на части, которые отображаются на части специального вида; затем из последних конструируются симметричные объекты либо путем склеивания, либо с помощью известных способов симметризации (круговой, радиальной и др.). Простейшим и в то же время важным примером кусочно-разделяющей симметризации является преобразование конденсаторов, введенное в работе [I] . В дальнейшем это преобразование будем называть разделяющим преобразованием. Можно предполагать, что использование разделяющего преобразования совместно с другими видами симметризации существенно расширит границы применения симметризационных методов и позволит решить новые задачи. Кроме того, это преобразование имеет самостоятельный интерес. Важность разделяющего преобразования заключается в том, что в ряде случаев оно позволяет задачу с заданным количеством параметров свести к задаче с меньшим числом параметров. Например, методом работы [I] известную задачу Г.Сеге о покрытии радиальных отрезков можно свести к классической теореме об $1/4$ Кебе-Бибербаха.

В данной работе вводится разделяющее преобразование областей, аналогичное преобразованию в [I] , а также дается приложение этого преобразования к задачам о произведении степеней конформных радиусов неналегающих областей. Указанные задачи имеют богатую историю, достаточно полно изложенную в литературе [2 - 4] . Применение метода симметризации к решению этих задач вносит новые аспекты [5] . В отличие от работы [5] , мы рассматриваем в основном приложении к задачам со свободными полюсами (точнее, с полюсами, обладающими определенной степенью свободы).

§ I. Разделяющее преобразование конденсаторов и областей

Для полноты изложения приведем здесь определение разделяющего преобразования конденсаторов [I] , сделав при этом некоторые упрощения. Конденсатором на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$

называется всякая упорядоченная пара $C=(E_0,E_1)$ непересекающихся непустых замкнутых множеств E_0 и E_1. Обозначим через $\mathscr{L}_2^1(C)$ совокупность всех функций $\omega:\overline{\mathbb{C}}_z\longrightarrow\mathbb{R}^1$, непрерывных в $\overline{\mathbb{C}}_z$, равных нулю на множестве E_0, единице на E_1 и принадлежащих классу $L_2^1(\mathbb{C}_z\setminus(E_0\cup E_1))$ (см., например, [6; с.84, 122]). Емкость конденсатора C определяется следующим образом:

$$|C|=\inf_{\omega\in\mathscr{L}_2^1(C)}\iint\limits_{\mathbb{C}_z}|\nabla\omega|^2dx\,dy,\qquad z=x+iy.$$

Пусть $C=(E_0,E_1)$ – произвольный конденсатор на z-сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$; B_ℓ, $\ell=1,\dots,m$, – односвязные попарно непересекающиеся области на $\overline{\mathbb{C}}_z$, ограниченные конечным числом кусочно-гладких кривых и удовлетворяющие условию $E_j\cap\overline{B}_\ell\neq\emptyset$, $j=0,1$, $\ell=1,\dots,m$. Пусть $\{p_\ell\}_{\ell=1}^m$ – некоторое семейство функций $\zeta=p_\ell(z)$, конформно и однолистно отображающих соответственно области B_ℓ на правую полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta>0$. Обозначим через $E_j^{(\ell)}$ объединение множества $p_\ell(E_j\cap\overline{B}_\ell)$ с его отражением относительно мнимой оси. Результатом разделяющего преобразования конденсатора $C=(E_0,E_1)$ относительно семейства функций $\{p_\ell\}_{\ell=1}^m$ назовем семейство конденсаторов $\{C_\ell\}_{\ell=1}^m$, состоящее из m симметричных конденсаторов $C_\ell=(E_0^{(\ell)},E_1^{(\ell)})$, $\ell=1,\dots,m$. Этот вариант разделяющего преобразования наиболее удобен в данной работе. В отличие от [1], мы рассматриваем здесь конденсаторы более широкого класса и ограничиваемся односвязными областями B_ℓ. Иногда вместо полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta>0$ в определении некоторых функций $\zeta=p_\ell(z)$, $1\leqslant\ell\leqslant m$, будем рассматривать круг $|\zeta|<1$. В этом случае под $E_j^{(\ell)}$ понимаем объединение множества $p_\ell(E_j\cap\overline{B}_\ell)$ с его инверсией относительно окружности $|\zeta|=1$, $j=0,1$. Семейство конденсаторов $\{C_\ell\}_{\ell=1}^m$, $C_\ell=(E_0^{(\ell)},E_1^{(\ell)})$, $\ell=1,\dots,m$, по-прежнему будем называть результатом разделяющего преобразования конденсатора C.

ТЕОРЕМА 1. Справедливо неравенство

$$|C|\geqslant\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^m|C_\ell|\,.$$

Доказательство этого утверждения аналогично соответствующему доказательству в [1] и даже проще, так как не требует применения принципа Дирихле.

Рассмотрим теперь разделяющее преобразование областей. Пусть

a – произвольная фиксированная точка $\overline{\mathbb{C}}_z$; B_ℓ, $\ell = 1,\ldots,m$, – односвязные попарно непересекающиеся области, ограниченные конечным числом кусочно-гладких кривых, причем $a \in \partial B_\ell$, $\ell = 1,\ldots,m$, и точка a является носителем только одного граничного элемента для каждой области B_ℓ . Семейство функций $\{p_\ell\}_{\ell=1}^{m}$ назовем допустимым семейством для разделяющего преобразования областей относительно точки a , если эти функции конформно и однолистно отображают соответственно области B_ℓ на полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$ или на круг $|\zeta| < 1$ таким образом, что при $z \to a$, $z \in \overline{B}_\ell$, выполняются следующие асимптотические равенства:

$$|p_\ell(z) - p_\ell(a)| \sim c_\ell |z-a|^{1/\beta_\ell}$$

в случае $a \neq \infty$ и для всех ℓ , при которых $p_\ell(a) \neq \infty$;

$$|p_\ell(z)| \sim c_\ell^{-1} |z-a|^{-1/\beta_\ell}$$

в случае $a \neq \infty$ и для тех ℓ , при которых $p_\ell(a) = \infty$;

$$|p_\ell(z) - p_\ell(a)| \sim c_\ell |z|^{-1/\beta_\ell}.$$

в случае $a = \infty$, $p_\ell(a) \neq \infty$;

$$|p_\ell(z)| \sim c_\ell^{-1} |z|^{1/\beta_\ell}$$

в случае $a = \infty$, $p_\ell(a) = \infty$.

Здесь c_ℓ, β_ℓ, $\ell = 1,\ldots,m$, – некоторые положительные числа и $\sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell = 2$. В дальнейшем мы рассматриваем только такие области B_ℓ , для которых указанное семейство функций существует. Пусть $\{p_\ell\}_{\ell=1}^{m}$ – допустимое семейство функций, D – произвольная область, $a \in D \subset \overline{\mathbb{C}}_z$. Для тех ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant m$, при которых $p_\ell(B_\ell)$ – полуплоскость, обозначим через D_ℓ объединение связной компоненты множества $p_\ell(D \cap \overline{B}_\ell)$, содержащей точку $p_\ell(a)$, с ее отражением относительно мнимой оси. В случае, когда $p_\ell(B_\ell)$ – круг, обозначим через D_ℓ объединение связной компоненты множества $p_\ell(D \cap \overline{B}_\ell)$, содержащей точку $p_\ell(a)$, с ее инверсией относительно окружности $|\zeta| = 1$. Семейство симметричных областей $\{D_\ell\}_{\ell=1}^{m}$ назовем результатом разделяющего преобразования области D относительно семейства функций $\{p_\ell\}_{\ell=1}^{m}$. Пусть $r(\Omega, b)$ – внутренний радиус произвольной области Ω расширенной комплексной плоскости относительно точки b . При $b = \infty$ имеем $r(\Omega, b) = e^{\gamma}$, где γ – постоянная Робэна для области Ω .

ТЕОРЕМА 2. Справедливо неравенство

$$r(D,a) \leq \prod_{l=1}^{m} \left[r(D_l, p_l(a))/c_l \right]^{\beta_l^2/2}. \qquad (I)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что область D имеет классическую функцию Грина. Такую область будем называть допустимой. Рассмотрим конденсатор $C(r) = (\overline{\mathbb{C}}_z \setminus D, \{z : |z-a| \leq r\})$, где $r > 0$ настолько мало, что круг $\{z : |z-a| \leq r\}$ целиком принадлежит области D (при $a = \infty$ полагаем $C(r) = (\overline{\mathbb{C}}_z \setminus D, \{z : |z| \geq 1/r\})$). Если для некоторого l пересечение $(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus D) \cap \overline{B}_l$ пусто, то $r(D_l, p_l(a)) = \infty$ и неравенство (I) тривиально. В противном случае к конденсатору $C(r)$ применимо разделяющее преобразование относительно семейства функций $\{p_l\}_{l=1}^{m}$. Пусть $\{C_l(r)\}_{l=1}^{m}$ – результат такого преобразования. Из теоремы I и выпуклости функции $1/x$ следует

$$|C(r)|^{-1} \leq \left\{ \sum_{l=1}^{m} \frac{\beta_l}{2} |C_l(r)|/\beta_l \right\}^{-1} \leq \sum_{l=1}^{m} \frac{\beta_l^2}{2} |C_l(r)|^{-1}.$$

Учитывая известную связь между емкостью конденсатора и внутренним радиусом допустимой области, а также асимптотические оценки для функций $\zeta = p_l(z)$, имеем

$$|C(r)|^{-1} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r(D,a)}{r} + o(1), \quad r \longrightarrow 0,$$

$$|C_l(r)|^{-1} \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{r(D_l, p_l(a))}{c_l\, r^{1/\beta_l}} + o(1), \; r \longrightarrow 0,$$

$$l = 1, \dots, m.$$

Суммируя выписанные соотношения, получим неравенство (I). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение разделяющего преобразования и способ доказательства теоремы 2 позволяют обобщить это преобразование в различных направлениях, при этом будут иметь место неравенства, аналогичные неравенству (I). Например, точка a в определении разделяющего преобразования может быть носителем не одного, а нескольких граничных элементов для каждой области B_l. Пусть $a_{l1}, a_{l2}, \dots, a_{ls_l}$ – такие граничные элементы. Для функций в окрестности каждого граничного элемента a_{ls} естественно потребовать выполнения асимптотического условия, аналогичного приведенным выше. Пусть C_{ls} и β_{ls} – соответствующие коэффициенты и пусть $\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=1}^{s_l}\beta_{ls}=2$. Аналогично предыдущему, пусть область D_{ls} есть объединение связной компоненты множества $p_l(D\cap\overline{B}_l)$, содержащей точку $p_l(a_{ls})$, с ее симметричным образом. Однако на этот раз необходимо потребовать, чтобы для каждого фиксированного l $(1\leqslant l\leqslant m)$ множества $D_{ls}, s=1,\dots,s_l$, попарно не пересекались. В этом случае, повторяя доказательство теоремы 2 в новых обозначениях и с естественными добавлениями, получаем неравенство

$$r(D,a)\leqslant\prod_{l=1}^{m}\prod_{s=1}^{s_l}\left[r(D_{ls},p_l(a_{ls}))/C_{ls}\right]^{\beta_{ls}^2/2}.$$

В следующем параграфе мы ограничимся применением неравенства (I). Отметим частные случаи этого неравенства. Так, при $m=1$, $\beta_1=2$ оно принимает вид

$$r(D,a)\leqslant(r(D_1,p_1(a))/C_1)^2. \tag{2}$$

В случае, когда $m=2$, $\beta_1=\beta_2=1$, а функции $p_l(z)$ дифференцируемы в точке a, имеем

$$r(D,a)\leqslant\sqrt{\prod_{l=1}^{2}r(D_l,p_l(a))/|p_l'(a)|}. \tag{3}$$

§ 2. Задачи об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности

Пусть a_1 и a_2 – точки плоскости $\mathbb{C}_z$, и пусть D_k, $a_k\in D_k$, $k=1,2$, – произвольные непересекающиеся области на $\overline{\mathbb{C}}_z$. Из классической теоремы М.А.Лаврентьева [7, с.156], [2, с.32, 224] следует, что

$$r(D_1,a_1)r(D_2,a_2)\leqslant|a_1-a_2|^2, \tag{4}$$

причем для допустимых областей D_k знак равенства в (4) имеет место тогда и только тогда, когда области D_1, D_2 ограничены окружностью $|(z-a_1)/(z-a_2)|=c$, где c – произвольная положительная постоянная.

Фиксируем теперь некоторое компактное множество E и рассмотрим задачу о нахождении максимума произведения $r(D_1,a_1)r(D_2,a_2)$ по всевозможным различным точкам $a_k\in E, k=1,2,$ и всевозможным непересекающимся областям D_k, $a_k\in D_k$, $k=1,2$. Ввиду неравенства (4) такой максимум равен квадрату диаметра множества E. Что можно сказать об аналогичном максимуме для произвольного фиксированного числа точек $a_k\in E$, $k=1,\dots,n$, и попарно непересекающихся областей $D_k, a_k\in D_k, k=1,\dots,n$? Интересна также следующая задача. Пусть $a_1,\dots,a_n$ – различные точки $\overline{\mathbb{C}}_z$, причем некоторые из этих точек, пусть $a_1,\dots,a_\ell$, фиксированы, а остальные точки $a_{\ell+1}$, $\dots$, a_n принадлежат заданному множеству E (свободные точки). Пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ – фиксированные положительные числа. Рассмотрим задачу:

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k}(D_k,a_k)\longrightarrow \sup;$$

$$a_k\in E,\ k=\ell+1,\dots,n,\quad a_k\in D_k,\ k=1,\dots,n,$$

$$D_k\cap D_\ell=\emptyset,\ k\neq\ell,\ \ k,\ell=1,\dots,n.$$

Отметим, что точное значение верхней грани выписанного произведения при любых фиксированных точках a_k и попарно непересекающихся областях D_k известно лишь для малых значений n. Тем не менее, в ряде частных случаев указанная задача может быть решена для любых n. В данном параграфе рассматриваются некоторые варианты этой задачи в том случае, когда множество E есть окружность. Такие задачи естественно называть задачами со свободными полюсами на окружности, поскольку точки a_k являются полюсами ассоциированного квадратичного дифференциала в соответствующей задаче при фиксированных a_k, а также полюсами функций Грина, фигурирующих в определении внутренних радиусов рассматриваемых областей. Приведем сначала простейший пример такого рода.

ТЕОРЕМА 3. Для любых различных точек a_k, $k=1,\dots,n$ $(n\geqslant 3)$, лежащих на окружности $|z|=1$, и любых попарно непересекающихся областей D_k, $a_k\in D_k\subset\overline{\mathbb{C}}_z, k=1,\dots,n$, справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k,a_k)\leqslant (4/n)^n. \tag{5}$$

Если, дополнительно, области $D_k, k=1,\dots,n$, имеют классические функции Грина, то равенство в (5) достигается в том и только в том случае, когда $a_k=\exp(i(\theta+2\pi k/n))$, $D_k=\{z:|\arg z-\theta-2\pi k/n|<\pi/n\}$,

$k=1,\dots,n$, где θ – произвольная вещественная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения $\theta_k=\arg a_k, k=1,\dots,n, \theta_0=\theta_n-2\pi$, $\theta_{n+1}=2\pi$, $\varphi_k=\theta_{k+1}-\theta_k, k=0,1,\dots,n$. Можно считать, что $0=\theta_1<\theta_2<\dots<\theta_n<2\pi$. Положим

$$B_k=\{z:\theta_k<\arg z<\theta_{k+1}\},$$

$$\zeta=p_k(z)\equiv-i(ze^{-i\theta_k})^{\pi/\varphi_k},\quad z\in B_k,\quad k=0,1,\dots,n.$$

Каждая пара функций $\{p_{k-1},p_k\}$ образует допустимое семейство функций для разделяющего преобразования областей относительно точки a_k. Пусть $\{D_k^{(1)},D_k^{(2)}\}$ – результат такого преобразования области $D_k, k=1,\dots,n$. Неравенство (3) дает

$$r(D_k,a_k)\leqslant\sqrt{(\varphi_{k-1}\varphi_k/\pi^2)r(D_k^{(1)},i)r(D_k^{(2)},-i)},\quad k=1,\dots,n.$$

Отсюда

$$\prod_{k=1}^{n}r(D_k,a_k)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k}{\pi}\sqrt{r(D_k^{(2)},-i)r(D_{k+1}^{(1)},i)}\tag{6}$$

$(D_{n+1}^{(1)}=D_1^{(1)})$. Применяя неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, получаем

$$\prod_{k=1}^{n}r(D_k,a_k)\leqslant(2/n)^n\prod_{k=1}^{n}\sqrt{r(D_k^{(2)},-i)r(D_{k+1}^{(1)},i)}.$$

Области $D_k^{(2)}$ и $D_{k+1}^{(1)}$ не пересекаются. По теореме М.А.Лаврентьева,

$$r(D_k^{(2)},-i)\,r(D_{k+1}^{(1)},i)\leqslant 4$$

(см. (4)). Суммируя выписанные соотношения, получим неравенство (5). Предположим теперь, что каждая область D_k имеет классическую функцию Грина $g_{D_k}(z,a_k)$, и пусть в неравенстве (5) достигается знак равенства. Тогда знак равенства имеет место во всех предыдущих соотношениях. В частности, из равенства между средним геометрическим и средним арифметическим следует, что все φ_k равны между собой. Далее воспользуемся теоремой I работы [5], положив в ней $G=\overline{\mathbb{C}}_z$ и $Q(z)dz^2=-z^{n-2}(z^n-1)^{-2}dz^2$, $n\geqslant3$. Согласно условиям равенства в этой теореме, множество $P=\{z: \arg z^n = \pi\}$ либо является линией уровня некоторой функции $g_{D_{k_n}}(z,a_k), 1\leqslant k\leqslant \pi$, либо не содержит ни одной точки из объединения $\bigcup\limits_{k=1} D_k$. В первом случае из поведения гармонической функции $g_{D_k}(z,a_k)$ в окрестности начала координат и условия $n\geqslant 3$ заключаем, что существуют некоторый угол Λ, ограниченный двумя соседними лучами из P, $a_k\notin\Lambda$, и точка z_0, принадлежащая этому углу и такая, что $g_{D_k}(z_0,a_k)>g_{D_k}(0,a_k)$. Это обстоятельство противоречит принципу максимума в $\Lambda\cap D_k$. Во втором случае в силу принципа Линделефа имеем: $D_k=\{z: |\arg z - 2\pi(k-1)/n|<\pi/n\}, k=1,\dots,n$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для таких областей D_k и соответствующих точек $a_k=\exp(i(2\pi(k-1)/n))$ в неравенстве (5) действительно имеет место знак равенства. Теорема доказана.

При $n=3$ и для односвязных областей D_k полученный результат равносилен известной теореме Г.М.Голузина (см. [7, с.164-165], а также [2, с.32]). Случай четырех односвязных областей рассматривался Г.П.Бахтиной [8]. Для произвольных n неравенство (5) доказано в работе [9]. Заметим, что в [9] получено более сильное утверждение. Именно, области D_k лежат в кольце $r\leqslant|z|\leqslant R$ $(0\leqslant r<R\leqslant\infty)$ и допускается частичное налегание их друг на друга. Е.Г.Емельянов [10] рассмотрел связь между двумя задачами об экстремальном разбиении, из которой следует ряд теорем и, в частности, неравенство (5) при любом n и для односвязных областей D_k.

Добавим теперь к областям $D_1,\dots,D_n$ теоремы 3 область D_0, содержащую начало координат, и рассмотрим следующую задачу:

$$\prod_{k=0}^{n} r(D_k,a_k)\longrightarrow \sup;$$

$$a_0=0,\ |a_k|=1,\ k=1,\dots,n,\ \ a_k\in D_k,\ k=0,1,\dots,n,$$

$$D_k\cap D_l=\varnothing,\ k\neq l,\ k,l=0,1,\dots,n.$$

Эта задача существенно сложнее предыдущей. В самом деле, можно предполагать, что области $D_k, k=1,\dots,n$, расположенные несимметрично, имеют меньшее произведение внутренних радиусов, чем некоторые симметричные области. С другой стороны, внутренний радиус области D_0 при диссимметризации строго увеличивается [11]. Тем не менее, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. Для любых различных точек $a_k, k=1,\dots,n$ $(n\geqslant 2)$, лежащих на окружности $|z|=1$, и любых попарно непересекающихся областей $D_k, a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}_z, k=0,1,\dots,n (a_0=0)$, справедливо неравенство

$$\prod_{k=0}^{n} r(D_k, a_k) \leqslant \frac{4^{1/n+n} n^n}{(n^2-1)^{1/n+n}} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2. \qquad (7)$$

Если, дополнительно, области $D_k, k=0,1,\dots,n$, имеют классические функции Грина, то равенство в (7) достигается в том и только в том случае, когда области D_k и точки a_k являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(\alpha z)^n (n^2-1)+1}{z^2((\alpha z)^n - 1)^2} dz^2,$$

где α – произвольная постоянная, удовлетворяющая условию $|\alpha|=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta_k, \varphi_k, B_k, p_k(z), D_k^{(1)}, D_k^{(2)}$ – такие же, как и при доказательстве теоремы 3. Семейство функций $\{p_k\}_{k=1}^{n}$ является допустимым для разделяющего преобразования областей относительно точки $z=0$. Обозначим через $\{D_0^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ результат такого преобразования области D_0. Из теоремы 4 следует

$$r(D_0, a_0) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left[r(D_0^{(k)}, 0)\right]^{\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_k}{\pi}\right)^2}. \qquad (8)$$

Для каждого k рассмотрим квадратичный дифференциал

$$Q_k(\zeta)d\zeta^2 = -\frac{-\zeta^2(4-(\varphi_k/\pi)^2)+(\varphi_k/\pi)^2}{\zeta^2(1+\zeta^2)^2} d\zeta^2.$$

Этот дифференциал регулярен всюду на $\overline{\mathbb{C}}_\zeta$, за исключением полюсов второго порядка в точках $\zeta = 0, -i, i$, в окрестностях которых имеют место соответственно разложения

$$Q_k(\zeta) = -(\varphi_k/\pi)^2/\zeta^2 + \dots, \quad Q_k(\zeta) = -1/(\zeta+i)^2 + \dots,$$

$$Q_k(\zeta) = -1/(\zeta-i)^2 + \dots .$$

Далее, области $\mathcal{D}_0^{(K)}$, $\mathcal{D}_K^{(2)}$, $\mathcal{D}_{K+1}^{(1)}$ являются (вообще говоря, многосвязными) попарно непересекающимися областями на $\overline{\mathbb{C}}_\zeta$. Объединение этих областей содержит не более чем конечное число замыканий ортогональных траекторий дифференциала $Q_K(\zeta)d\zeta^2$, так как указанные траектории имеют либо концевую точку в начале координат, либо концевые точки в обоих направлениях в различных полюсах $Q_K(\zeta)d\zeta^2$ $(\varphi_K < 2\pi)$. Из теоремы I работы [5], учитывая результат Л.И.Колбиной [I2], получаем

$$\left(\frac{\varphi_K}{\pi}\right)^2\left[r(\mathcal{D}_0^{(K)},0)\right]^{(\varphi_K/\pi)^2} r(\mathcal{D}_K^{(2)},-i)\,r(\mathcal{D}_{K+1}^{(1)},i)\leqslant \Phi(\varphi_K/\pi), \tag{9}$$

где

$$\Phi(u)=2^{u^2+6}u^{u^2+2}(2-u)^{-(2-u)^2/2}(2+u)^{-(2+u)^2/2}, \quad 0<u<2 .$$

Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\prod_{K=1}^{n}\Phi(u_K)\longrightarrow \sup\,; \quad \sum_{K=1}^{n}u_K=2. \tag{I0}$$

Необходимые условия имеют вид

$$\Phi'(u_K)/\Phi(u_K)=-\lambda\Big/\prod_{K=1}^{n}\Phi(u_K), \quad K=1,\ldots,n . \tag{II}$$

Покажем, что все u_K равны между собой. Легко проверить, что функция $F(u)=\Phi'(u)/\Phi(u)$ строго убывает на некотором промежутке $(0,u_0]$ и возрастает на $[u_0,2)$, $u_0>1$. Введем вспомогательную функцию $\mathcal{F}(u)=F(u)-F(2-u)$, $0<u\leqslant 1$. Простые вычисления показывают, что $\mathcal{F}(u)$ положительна на интервале $(0,1)$. Если теперь хотя бы одно из u_K больше I, например, $u_{K'}>1$, то для остальных u_K имеет неравенства $u_K\leqslant 2-u_{K'}<1<u_0$ и потому $F(u_K)\geqslant F(2-u_{K'})>$ $>F(2-(2-u_{K'}))=F(u_{K'})$. Получили противоречие с равенствами (II). Поэтому для любого K справедливо условие $u_K\in(0,1]$ и в силу равенств (II), а также монотонности $F(u)$ на $(0,u_0]$ в точке предполагаемого экстремума, имеем $u_K=2/n$, $K=1,\ldots,n$. Нетрудно видеть, что точка $(2/n,\ldots,2/n)$ действительно является решением задачи (I0). Совместно с неравенствами (6), (8) и (9) это дает неравенство теоремы.

Предположим теперь, что области $D_k, k=0,1,\ldots,n$, имеют классические функции Грина, а в неравенстве (7) достигается знак равенства. Тогда необходимо имеем $\varphi_k=2\pi/n, k=1,\ldots,n$, и утверждение теоремы следует из теоремы I работы [5] , примененной к квадратичному дифференциалу $Q(z)dz^2$, где α – некоторая постоянная, $|\alpha|=1$. При этом выражение для правой части неравенства (I) теоремы I в [5] легко получить, если воспользоваться вычислениями в [I2] и тем фактом, что дифференциал $Q(z)dz^2$ получается из $Q_k(\zeta)d\zeta^2$ $(\varphi_k=2\pi/n)$ заменой переменной $\zeta=i(\alpha z)^{n/2}$. Теорема доказана.

Отметим, что для $n=2$ и для односвязных областей D_k неравенство (7) следует из теоремы Г.М.Голузина [7, с.I65] . В случае $n=3$ и односвязных D_k это неравенство вытекает из результата Г.В.Кузьминой [I3] . Для $n>3$ теорема 4 доказана впервые. Постановка следующей задачи заимствована автором из работы Г.П.Бахтиной [I4] :

$$\prod_{k=0}^{n} r(D_k,a_k)\longrightarrow \sup; \tag{I2}$$

$$a_0=0,\ |a_k|=1,\ k=1,\ldots,n,\quad a_k\in D_k,\ k=0,1,\ldots,n,$$

$$D_k\cap D_\ell=\varnothing,\ k\neq\ell,\ k,\ell=0,1,\ldots,n,\quad D_k=\{z: 1/\bar z\in D_k\},\ k=1,\ldots,n.$$

В работе [I4] методом вариаций получены некоторые условия, при которых произведение в (I2) достигает своей верхней грани. Эти условия позволяют решить поставленную задачу при некоторых ограничениях на области D_k и при малых значениях n . Однако уже при $n=3$ такой подход встречает значительные трудности. Решение указанной задачи для этого частного случая (даже для односвязных областей D_k) в литературе, по-видимому, не встречалось. Разделяющее преобразование дает возможность решить задачу для любых n . Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 5. Пусть $a_k, k=1,\ldots,n\ (n\geq 2)$, – произвольные различные точки окружности $|z|=1$; D_k, $k=0,1,\ldots,n$, – попарно непересекающиеся области на $\overline{\mathbb{C}}_z$ такие, что $a_k\in D_k$, $k=0,1,\ldots,n$ $(a_0=0)$ и D_k, $k=1,\ldots,n$, симметричны относительно окружности $|z|=1$. Тогда

$$\prod_{k=0}^{n} r(D_k,a_k)\leqslant \frac{2^{2n+1/n}}{(n^2-2)^{1/n+n/2}}\left(\frac{n-\sqrt2}{n-\sqrt2}\right)^{\sqrt2}.$$

Если, дополнительно, области $\mathfrak{D}_k$, $k=0,1,\dots,n$, имеют классические функции Грина, то равенство достигается в том и только в том случае, когда области $\mathfrak{D}_k$ и точки a_k являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Q(z)\,dz^2=-\frac{(\alpha z)^{2n}+(\alpha z)^n(2n^2-2)+1}{z^2((\alpha z)^n-1)^2}\,dz^2, \tag{13}$$

где α – произвольная постоянная, $|\alpha|=1$.

Это утверждение непосредственно вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Для любых различных точек a_k, $k=1,\dots,n$ $(n\geq 2)$, лежащих на окружности $|z|=1$, и любых попарно непересекающихся областей $\mathfrak{D}_k$, $a_k\in\mathfrak{D}_k\subset\overline{\mathbb{C}}_z$, $k=0,1,\dots,n+1$ $(a_0=0,\ a_{n+1}=\infty)$, справедливо неравенство

$$\sqrt{r(\mathfrak{D}_0,a_0)\,r(\mathfrak{D}_{n+1},a_{n+1})}\;\prod_{k=1}^{n} r(\mathfrak{D}_k,a_k)\leq\frac{2^{2n+1/n}}{(n^2-2)^{1/n+n/2}}\left(\frac{n-\sqrt{2}}{n+\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}.$$

Если, дополнительно, области $\mathfrak{D}_k$, $k=0,1,\dots,n+1$, имеют классические функции Грина, то равенство достигается в том и только в том случае, когда области $\mathfrak{D}_k$ и точки a_k являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала (13), где α – произвольная постоянная, $|\alpha|=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всюду ниже пользуемся обозначениями, принятыми при доказательстве теорем 3 и 4. Семейство функций $\{p_k\}_{k=1}^{n}$ является допустимым для разделяющего преобразования областей относительно точки $z=\infty$. Пусть $\{\mathfrak{D}_{n+1}^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ – результат такого преобразования области $\mathfrak{D}_{n+1}$. По теореме 2,

$$r(\mathfrak{D}_{n+1},a_{n+1})\leq\prod_{k=1}^{n}\left[r(\mathfrak{D}_{n+1}^{(k)},\infty)\right]^{\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_k}{\pi}\right)^2}. \tag{14}$$

Для каждого k рассмотрим квадратичный дифференциал

$$R_k(\zeta)\,d\zeta^2=-\frac{\zeta^4(\varphi_k/\pi)^2/2-\zeta^2(4-(\varphi_k/\pi)^2)+(\varphi_k/\pi)^2/2}{\zeta^2(1+\zeta^2)^2}\,d\zeta^2.$$

Этот дифференциал регулярен всюду в $\overline{\mathbb{C}}_\zeta$, за исключением полюсов второго порядка в точках $\zeta = 0, \infty, -i, i$, в окрестностях которых имеют место соответственно разложения

$$R_\kappa(\zeta) = -[(\varphi_\kappa/\pi)^2/2]/\zeta^2 + \ldots, \quad R_\kappa(\zeta) = -[(\varphi_\kappa/\pi)^2/2]/\zeta^2 + \ldots$$

$$R_\kappa(\zeta) = -1/(\zeta+i)^2 + \ldots, \qquad R_\kappa(\zeta) = -1/(\zeta-i)^2 + \ldots .$$

Для круговых областей $G_\kappa^{(\ell)}$ относительно дифференциала $R_\kappa(\zeta)d\zeta^2$ имеем

$$\left[r(G_\kappa^{(0)},0)\,r(G_\kappa^{(3)},\infty)\right]^{(\varphi_\kappa/\pi)^2/2} r(G_\kappa^{(1)},-i)\,r(G_\kappa^{(2)},i) = (\pi/\varphi_\kappa)^2\,\Psi(\varphi_\kappa/\pi\sqrt{2}),$$

где

$$\Psi(\vartheta) = 8\,\vartheta^{2\vartheta^2+2}\,|1-\vartheta|^{-(1-\vartheta)^2}\,(1+\vartheta)^{-(1+\vartheta)^2}, \quad 0 < \vartheta \leqslant \sqrt{2}$$

(при $\vartheta = 1$ $\Psi(\vartheta) = 1/2$).

В этом легко убедиться, если воспользоваться вычислениями Л.И.Колбиной [I2] и тем фактом, что дифференциал $R_\kappa(\zeta)d\zeta^2$ с помощью замены $\zeta^2 = (1+\sqrt{w})/(\sqrt{w}-1)$ приводится дифференциалу

$$P(w)dw^2 = -\frac{w((\varphi_\kappa/\pi)^2/2 - 1) + 1}{4w^2(1-w)^2}\,dw^2,$$

определяющему экстремальную конфигурацию в соответствующей задаче [I2]. Теорема I работы [5] дает

$$\left(\frac{\varphi_\kappa}{\pi}\right)^2 \left[r(D_0^{(\kappa)},0)\,r(D_{n+1}^{(\kappa)},\infty)\right]^{\frac{1}{8}\left(\frac{\varphi_\kappa}{\pi}\right)^2} r(D_\kappa^{(2)},-i)\,r(D_{\kappa+1}^{(1)},i) \leqslant \Psi\left(\frac{\varphi_\kappa}{\pi\sqrt{2}}\right). \quad (I5)$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{\kappa=1}^{n} \Psi(v_\kappa) \longrightarrow \sup; \quad \sum_{\kappa=1}^{n} v_\kappa = \sqrt{2}.$$

Введем функцию $H(\vartheta) = \Psi'(\vartheta)/\Psi(\vartheta)$. Элементарные вычисления показывают, что эта функция убывает на промежутке $(0, \vartheta_0]$ и возрастает на $[\vartheta_0, \sqrt{2}]$. Здесь v_0 удовлетворяет условию $0{,}85 < v_0 < 1$. Учитывая также, что $H(0{,}564)>0$, $H(\sqrt{2})<0$, получаем, что разность $H(\vartheta)-H(\sqrt{2}-\vartheta)$ положительна на промежутке $0<\vartheta<\sqrt{2}/2$. Аналогично доказательству теоремы 4, убеждаемся, что единственным решением экстремальной задачи является точка $(\sqrt{2}/n,\dots,\sqrt{2}/n)$. Совместно с неравенствами (6), (8), (I4) и (I5) это дает неравенство теоремы 6. Случай равенства как и при доказательстве теорем 3 и 4 вытекает из теоремы I работы [5]. Теорема доказана.

§ 3. Некоторые замечания и дополнения

Доказательства теорем, предложенные в предыдущем параграфе, далеко не исчерпывают возможностей разделяющего преобразования. Отметим здесь лишь "близкие" приложения, непосредственно связанные с задачами об экстремальном разбиении. Например, способ доказательства теоремы 3, где разделяющее преобразование применяется вместе с теоремой М.А.Лаврентьева, нетрудно распространить на довольно общий случай. Нам понадобятся некоторые определения [I5, I6]. Двуугольником называется любая односвязная область P на плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$ с двумя отмеченными граничными элементами $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$, носителями которых являются различные или совпадающие точки a_1 и a_2. Для простоты изложения точки a_1 и a_2 будем считать конечными, а рассматриваемые ниже двуугольники P - ограниченными конечным числом кусочно-гладких кривых. Граничные элементы $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ назовем вершинами двуугольника P. Пусть функция $w=g(z)$ конформно и однолистно отображает P на полосу $h_1<\operatorname{Im} w<h_2$ так, что вершина $\tilde{a}_1$ переходит в $-\infty$, а вершина $\tilde{a}_2$ - в $+\infty$. Кривые $\operatorname{Im} g(z)=c$ $(h_1<c<h_2)$ назовем траекториями двуугольника P. Следуя работе Г.В.Кузьминой [I5], будем предполагать, что рассматриваемые двуугольники P удовлетворяют условию (ж), т.е. в окрестности граничного элемента $\tilde{a}_j$, $j=1,2$, имеет место равенство

$$g(z)=\frac{h_2-h_1}{\varphi_j}\left\{(-1)^{j-1}\log(z-\tilde{a}_j)+\tilde{g}_j(z)\right\},$$

где φ_j - внутренний угол области P в граничном элементе $\tilde{a}_j$, а $\tilde{g}_j(z)$ - регулярная функция [I5, с.II2]. В этом случае определен приведенный модуль-П двуугольника P и он равен

$$\mu(P)=\frac{1}{\varphi_2}\operatorname{Re}\tilde{g}_2(\tilde{a}_2)-\frac{1}{\varphi_1}\operatorname{Re}\tilde{g}_1(\tilde{a}_1) \tag{I6}$$

[15, с.114] (по поводу определения приведенного модуля двуугольника см. также работу Е.Г.Емельянова [16]).

Пусть $A=\{a_k\}_{k=1}^{n}$ – совокупность различных фиксированных точек на плоскости $\mathbb{C}_z$. Рассмотрим конечную совокупность $\{P\}$ попарно непересекающихся двуугольников P с вершинами в точках из A. Пусть каждая точка из A является носителем некоторой вершины. Пронумеруем двуугольники из $\{P\}$, а также углы при их вершинах, следующим образом. При достаточно малом $\varepsilon>0$ пересечение окружности $|z-a_k|=\varepsilon$ с множествами из $\{P\}$ состоит из конечного числа дуг $S_{k\ell}, \ell=1,\dots,m_k$. Обозначим через $P_{k\ell}$ область из $\{P\}$, содержащую дугу $S_{k\ell}$; $\varphi_{k\ell}$ – внутренний угол области $P_{k\ell}$ в точке a_k, соответствующий дуге $S_{k\ell}$. Ясно, что при такой нумерации каждый двуугольник учитывается дважды.

ТЕОРЕМА 7. Пусть A и $\{P\}$ – введенные выше множества, $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ – совокупность положительных чисел. Предположим, что выполняются равенства

$$\sum_{\ell=1}^{m_k}\varphi_{k\ell}=2\pi, \qquad k=1,\dots,n,$$

$$\alpha_k\varphi_{k\ell}^2=\alpha_{k'}\varphi_{k'\ell'}^2,\ \ \ell=1,\dots,m_k,\ \ k=1,\dots,n,$$

где $\varphi_{k\ell}$ и $\varphi_{k'\ell'}$ – углы при вершинах одного и того же двуугольника $P_{k\ell}\,(P_{k'\ell'})$. Пусть $\{D_k\}_{k=1}^{n}$, $a_k\in D_k\subset\overline{\mathbb{C}}_z, k=1,\dots,n,$ – произвольная совокупность областей, объединение которых не содержит ни одной кривой, лежащей в двуугольнике из $\{P\}$ и соединяющей его противоположные вершины. Тогда справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k}(D_k,a_k)\leqslant\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m_k}\frac{\alpha_k\varphi_{k\ell}^2}{4\pi}\mu(P_{k\ell})\right\}. \qquad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функции $\zeta=p_{k\ell}(z), \ell=1,\dots,m_k, k=1,\dots,n$, конформно и однолистно отображающие соответственно двуугольники $P_{k\ell}$ на круг $|\zeta|<1$ таким образом, что при $z\to a_k$ по пути, пересекающемуся с $S_{k\ell}$, имеем $p_{k\ell}(z)\to -1$, а противоположная вершина двуугольника переходит в точку $\zeta=1$. Мы полагаем также, что $p_{k\ell}(z)=-p_{k'\ell'}(z)$, где функции $p_{k\ell}(z)$ и $p_{k'\ell'}(z)$ соответствуют одному и тому же двуугольнику, но с разной нумерацией ($P_{k\ell}$ и $P_{k'\ell'}$). Ввиду условий теоремы, семейство функций $\{p_{k\ell}\}_{\ell=1}^{m_k}$ является допустимым для разделяющего преобразования областей относительно точки a_k. Обозначим через $c_{k\ell}$ коэффициенты в соответствующих асимптотических равенствах для функций $P_{k\ell}(z)$, и пусть $\{D_{k\ell}\}_{\ell=1}^{m_k}$ - результат разделяющего преобразования области D_k относительно семейства функций $\{P_{k\ell}\}_{\ell=1}^{m_k}$. Учитывая замечание к теореме 2, имеем

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k}(D_k,a_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{m_k}\left[r(D_{k\ell},-1)/c_{k\ell}\right]^{\alpha_k(\varphi_{k\ell}/\pi)^2/2} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{m_k}\left\{\left[r(D_{k\ell},-1)/c_{k\ell}\right]^{\alpha_k(\varphi_{k\ell}/\pi)^2/4}\left[r(D_{k'\ell'},-1)/c_{k'\ell'}\right]^{\alpha_{k'}(\varphi_{k'\ell'}/\pi)^2/4}\right\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{m_k}\left\{\left[r(D_{k\ell},-1)r(\{\zeta:-\zeta\in D_{k'\ell'}\},1)\right]/(c_{k\ell}\,c_{k'\ell'})\right\}^{\alpha_k(\varphi_{k\ell}/\pi)^2/4}$$

Неравенство М.А.Лаврентьева (4) дает

$$r(D_{k\ell},-1)r(\{\zeta:-\zeta\in D_{k'\ell'}\},1)\leqslant 4.$$

Осталось воспользоваться формулой (I6), согласно которой

$$4/(c_{k\ell}\,c_{k'\ell'}) = \exp[\pi\mu(P_{k\ell})].$$

Теорема доказана.

В случае односвязных непересекающихся областей D_k неравенство (I7) (с указанием всех случаев равенства) получено Е.Г.Емельяновым в работе [I0]. В [I0] получены также некоторые приложения этого неравенства. В частности, из него вытекает оценка трансфинитного диаметра континуума [I]. Указанные приложения можно было бы дополнить. Вместе с тем следует отметить, что эффективность применения неравенства (I7) сдерживается двумя обстоятельствами. Во-первых, существенными являются ограничения на величины противоположных углов двуугольников. Во-вторых, число двуугольников порой превышает число особенностей данной задачи, что ведет к искусственному увеличению объема вычислений. В связи с этим представляется полезным наряду с двуугольниками рассмотреть односвязные области с тремя и большим количеством вершин. Такой путь прослеживается при доказательстве теорем 4 и 6, где плоскость разбивается на односвязные области с тремя (теорема 4) или четырьмя (теорема 6) отмеченными граничными элементами. Простейший пример разбиения плоскости на "четырехугольники" можно получить, если применить разделяющее преобразование из доказательства теоремы 3 к ситуации, описанной в теореме 3 работы [10] (при $n \geqslant 2$). Неравенство (3) нашей работы совместно с известным результатом З.Нехари [17, с.279] дает обобщение указанной теоремы из [10] на случай областей произвольной связности.

Отметим, что для простоты изложения во втором параграфе рассматриваются лишь попарно непересекающиеся области. Легко видеть, что способ доказательства теорем 3 – 6 позволяет выделить некоторые зоны, в которых возможно налегание областей друг на друга. Например, теорема 4 верна и в том случае, когда для любых соседних точек $a_{k'}, a_{k''}$ на окружности $|z|=1$ области $D_0, D_{k'}$ и $D_{k''}$ пересекаются в части плоскости, ограниченной лучами $\arg z = \arg a_{k'}$, $\arg z = \arg a_{k''}$ и содержащей другие точки a_k. Если же точки $a_{k'}$ и $a_{k''}$ разделены на окружности $|z|=1$ остальными точками a_k, то области $D_{k'}$ и $D_{k''}$ могут пересекаться в любой части плоскости. Возможность налегания другого рода вытекает из применения симметризации Штейнера. Так, способом работы [5] можно показать, что неравенство (17) имеет место и в том случае, когда объединение областей $D_k, k=1,\dots,n$, не содержит ни одной траектории' двуугольников из $\{P\}$.

В заключение укажем, что теорема 2 обнаруживает зависимость между некоторыми задачами об экстремальном разбиении и граничным поведением функций. Следующий результат является простым примером такой зависимости.

ТЕОРЕМА 8. Пусть функция $w=f(z)$ конформно и однолистно отображает круг $|z|<1$ на некоторую область на $\overline{\mathbb{C}}_w$, ограниченную конечным числом кусочно-аналитических кривых, и пусть в окрестности некоторых точек $z_k, |z_k|=1, k=1,\dots,n$, выполняются асимптотические равенства

$$|f(z)-f(z_k)| \sim c_k |z-z_k|^2, \quad z \to z_k, \; k=1,\dots,n,$$

где $c_k, k=1,\dots,n,$ – положительные постоянные. Тогда для любых попарно непересекающихся областей $D_k, f(z_k) \in D_k, k=1,\dots,n, n>1$, имеет место оценка

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k, f(z_k)) \leqslant \prod_{k=1}^{n} (16 c_k / n^2).$$

Для доказательства этого утверждения необходимо к каждой области D_K применить разделяющее преобразование относительно функции $z = f^{-1}(w)$, после чего воспользоваться неравенством (2) и теоремой 3.

Литература

1. Д у б и н и н В.Н. Метод симметризации и трансфинитный диаметр. - Сиб. мат.журн., 1986, т.27, № 2, с.39-46.
2. Л е б е д е в Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. М., 1975.
3. К у з ь м и н а Г.В. Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. - Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1980, т.139, 240 с.
4. К у з ь м и н а Г.В. Геометрическая теория функций: методы и результаты. - Изв. вузов.Математика, 1986, № 10, с.17-33.
5. Д у б и н и н В.Н. Метод симметризации в задачах о неналегающих областях. - Мат.сб., 1985, т.128, № 1, с.110-123.
6. Г о л ь д ш т е й н В.М., Р е ш е т н я к Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М., 1983.
7. Г о л у з и н Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-ое изд. М., 1966.
8. Б а х т и н а Г.П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях. - Автореф. канд. дисс., Киев, 1975, 12 с.
9. Д у б и н и н В.Н. О произведении внутренних радиусов "частично неналегающих" областей. - В кн.: Вопросы метрической теории отображений и ее применение. Киев, 1978, с.24-31.
10. Е м е л ь я н о в Е.Г. О связи двух задач об экстремальном разбиении. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 8. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1987, т.160, с.91-98.
11. Д у б и н и н В.Н. Об изменении гармонической меры при симметризации. - Мат. сб., 1984, т.124, № 2, с.272-279.
12. К о л б и н а Л.И. Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении. - Докл. АН СССР, 1952, т.84, № 5, с.865-868.
13. К у з ь м и н а Г.В. К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 3. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1980, т.100, с.131-145.
14. Б а х т и н а Г.П. О конформных радиусах симметричных неналегающих областей. - В кн.: Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. Сб. научн.тр. Ин-т мат. АН УССР, Киев,

I5. К у з ь м и н а Г.В. Об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с полосообразными областями в структуре траекторий. – В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 7. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I986, т.I54, с.II0 – I29.

I6. Е м е л ь я н о в Е.Г. К задачам об экстремальном разбиении. – В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций.7. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I986, т.I54, с.76–89.

17. N e h a r i Z. Some inequalities in the theory of functions. – Trans.Amer.Math.Soc., 1953, vol.75, N 2, p.256–286.