

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Зелик, О. В. Починка, А. А. Ягилев, О размерности Минковского некоторых инвариантных подмножеств динамических систем, *Журнал СВМО*, 2024, том 26, номер 1, 32–43

DOI: 10.15507/2079-6900.26.202401.32-43

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

19 января 2025 г., 02:55:55



DOI 10.15507/2079-6900.26.202401.32-43

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.163

## О размерности Минковского некоторых инвариантных подмножеств динамических систем

С. В. Зелик, О. В. Починка, А. А. Ягилев

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Хорошо известно, что фрактальное множество не является подмножеством объемлющего пространства. Однако фракталы возникают как инвариантные подмножества, даже в бесконечно гладких динамических системах; размерность Минковского служит в этом случае характеристикой сложности такого множества. Например, в момент потери устойчивости состоянием равновесия при бифуркации Андронова-Хопфа замыкание неособой траектории является параметрически заданной кривой фрактального типа. В настоящей работе вычислена фрактальная размерность таких кривых. Кроме того, исследовано двухпараметрическое семейство функций, размерность Минковского графиков которых варьируется в промежутке от 1 до 2. Полученный результат позволяет реализовать регулярную динамическую систему, замыкание двумерного устойчивого многообразия изолированной гиперболической точки которой может иметь размерность Минковского больше 2. Вычисление размерности графика основано на разбиении отрезка аргумента, его задающего, на две части. Размерность одной части графика при этом возможно оценить сверху с помощью непосредственного вычисления длины соответствующей кривой. Размерность другой оценивается сверху через площадь прямоугольника, в которой она лежит. Оценка размерности Минковского снизу основана на вычислении мощности  $\varepsilon$ -различимого множества точек графика.

**Ключевые слова:** размерность Минковского, покрытие множества,  $\varepsilon$ -различимое множество, бифуркация Андронова-Хопфа

**Для цитирования:** Зелик С. В., Починка О. В., Ягилев А. А. О размерности Минковского некоторых инвариантных подмножеств динамических систем // Журнал Средневожского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 32–43. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.32-43>

*Об авторах:*

**Зелик Сергей Витальевич**, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник международной лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4884-5040>, [s.zelik@surrey.ac.uk](mailto:s.zelik@surrey.ac.uk).

**Починка Ольга Витальевна**, доктор физико-математических наук, заведующий международной лабораторией динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, [olga-pochinka@yandex.ru](mailto:olga-pochinka@yandex.ru).

**Ягилев Андрей Александрович**, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5088-8075>, [agilevandrej@gmail.com](mailto:agilevandrej@gmail.com).

© С. В. Зелик, О. В. Починка, А. А. Ягилев



MSC2020 57N10

# On the Minkowski dimension of some invariant sets of dynamical systems

S. V. Zelik, O. V. Pochinka, A. A. Yagilev

*Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** It is well known that a fractal set is not a submanifold of the ambient space. However, fractals arise as invariant subsets even in infinitely smooth conditions and the Minkowski dimension serves in this case as a characteristic of complexity of this scale. For example, when the equilibrium state during the Andronov-Hopf bifurcation loses its stability, the closure of the non-singular trajectory is a parametrically defined curve of the fractal type. In this work the fractal dimension of such curves is calculated. In addition, special two-parameter family of functions is studied such that Minkowski dimension of their graphs varies from 1 to 2. The obtained result allows us to implement a regular dynamic system with an isolated hyperbolic point such that the closure of two-dimensional stable manifold of this point may have Minkowski dimension greater than 2. To calculate the graph dimension, the segment of the argument defining the graph is split into two parts. The dimension of the first part of the graph can be estimated from above by direct calculation of the corresponding curve's length. The upper estimation of the other part's dimension is provided by means of the area of rectangle containing this curve. The lower estimation of the Minkowski dimension is based on calculating the cardinality of  $\varepsilon$ -distinguishable set of graph points.

**Keywords:** Minkowski dimension, set coverage,  $\varepsilon$ -distinguishable set, Andronov-Hopf bifurcation

**For citation:** S. V. Zelik, O. V. Pochinka, A. A. Yagilev. On the Minkowski dimension of some invariant sets of dynamical systems. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:1(2024), 32–43. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.32-43>

*About the authors:*

**Zelik Sergey Vitalievich**, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Researcher at the International Laboratory of Dynamic Systems and Applications, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4884-5040>, [s.zelik@surrey.ac.uk](mailto:s.zelik@surrey.ac.uk).

**Pochinka Olga Vitalievna**, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the International Laboratory of Dynamic Systems and Applications, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, [olga-pochinka@yandex.ru](mailto:olga-pochinka@yandex.ru).

**Yagilev Andrey Alexandrovich**, Student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5088-8075>, [agilevandrej@gmail.com](mailto:agilevandrej@gmail.com).

## 1. Введение

Топологическая размерность – это наиболее привычная всем величина, которая апеллирует к нашим представлениям о линии, поверхности, объемном теле. Однако,

она нечувствительна к гладкости множества, “не чувствует” извилистости линии, шероховатости поверхности, пористости объемного тела. Более “чувствительный” подход определяется посредством покрытий и приводит к понятию размерности Минковского для точных определений).

Напомним определение размерности Минковского (см., например, [1]).

Для любого множества  $C$  будем обозначать через  $\text{card}(C)$  *мощность множества*  $C$ .

Пусть  $\mathbb{R}^m = \{x = (x_1, \dots, x_m) : x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}\}$  – евклидово пространство с метрикой

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - y_k)^2}.$$

Пусть  $X \subset \mathbb{R}^m$ . *Диаметром* множества  $X$  называется величина

$$\text{diam}(X) = \sup \{d(x, y) : x, y \in X\}$$

Множество  $X$  называется  $\varepsilon$ -различимым ( $\varepsilon > 0$ ), если  $d(x, y) \geq \varepsilon$  для любых  $x, y \in X$ .

Покрытие  $U = \{U_j\}_{j \in J}$  множества  $X$  называется  $\varepsilon$ -покрытием, если  $\text{diam}(U_j) \leq \varepsilon$  для любого  $j \in J$ .

Везде далее речь пойдет об ограниченном множестве  $E \subset \mathbb{R}^m$ . Для любого такого множества  $E$  и любого  $\varepsilon > 0$  корректно определены числа

$$N(E, \varepsilon) = \min \{\text{card}(U) : U - \varepsilon\text{-покрытие множества } E\}, \quad (1.1)$$

$$M(E, \varepsilon) = \max \{\text{card}(A) : A \subset E - \varepsilon\text{-различно}\}, \quad (1.2)$$

и имеет место следующее неравенство

$$N(E, \varepsilon) \leq M(E, \varepsilon) \leq N\left(E, \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (1.3)$$

*Верхней (нижней) размерностью Минковского* множества  $E$  называют верхний (нижний) предел:

$$\overline{\dim}_M(E) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\ln N(E, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad \left( \underline{\dim}_M(E) = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\ln N(E, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right). \quad (1.4)$$

Когда верхний и нижний пределы совпадают, то предел

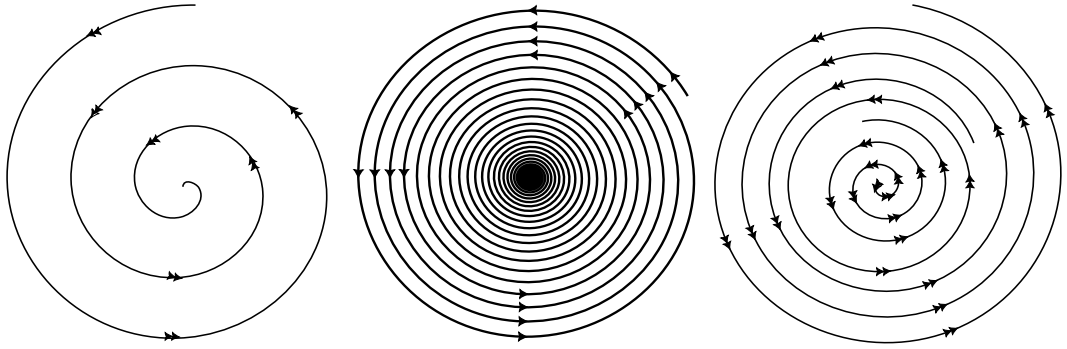
$$\dim_M(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\ln N(E, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (1.5)$$

называется *размерностью Минковского*.

Множества, для которых размерность Минковского строго больше топологической размерности, называются *фрактальными множествами или фракталами*.

Размерность Минковского  $n$ -мерного подмногообразия совпадает с его топологической размерностью  $n$ . Таким образом, фрактальное множество не является подмногообразием объемлющего пространства. Однако, фракталы возникают, как инвариантные подмножества, даже в бесконечно гладких динамических системах и размерность Минковского служит в этом случае характеристикой сложности такого множества. На сегодняшний день хорошо известно появление фрактального инвариантного подмножества у непрерывной динамической системы в момент бифуркации.

Одна из самых известных бифуркаций двумерных систем на плоскости – это *бифуркация Андронова-Хопфа* [2], [3], [4]. Устойчивое состояние равновесия  $(0, 0)$  с чисто мнимыми комплексно сопряженными собственными значениями становится неустойчивым и потеря устойчивости сопровождается рождением устойчивого предельного цикла, к которому стремятся все траектории, кроме самой особой точки (см. Рис. 1.1).



**Рис. 1.1.** Бифуркация Андронова-Хопфа

**Fig 1.1.** Andronov-Hopf bifurcation

В момент потери устойчивости замыкание неособой траектории является параметрически заданной фрактальной кривой [5] следующего вида.

Рассмотрим параметрически заданную кривую  $\phi(t) = \phi_a(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , для любого параметра  $a \in (0, 1)$  определенную формулой

$$\phi(t) = \begin{cases} (t^a \cos(\frac{2\pi}{t}), t^a \sin(\frac{2\pi}{t})), & 0 < t \leq 1; \\ (0, 0), & t = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Обозначим через

$$\Gamma_\phi = \{\phi(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, 1]\}$$

график кривой  $\phi(t)$ . Вычисление размерности Минковского графика  $\Gamma_\phi$  представлено во втором параграфе.

На рисунке 1.2 изображен фазовый портрет потока в  $\mathbb{R}^3$ . Гиперболическая седловая точка  $\sigma$  рассматриваемого потока имеет двумерное устойчивое многообразие, которое трансверсально пересекает плоскость  $z = 1$  по кривой, заданной непрерывной функцией  $f = f_{a,b} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , для положительных параметров  $a, b$  определенную формулой

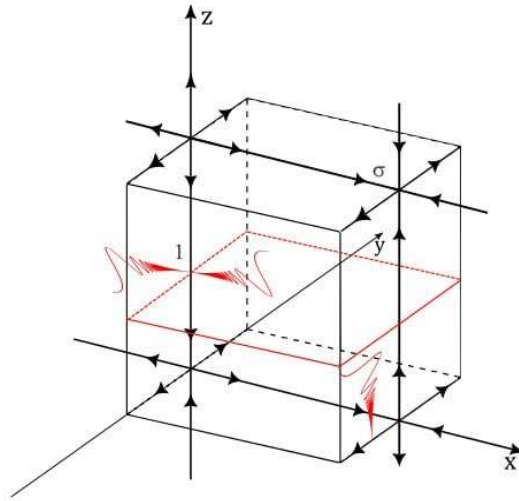
$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}), & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Обозначим через

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, x \in [0, 1]\}$$

график функции  $f$ .

Вычисление размерности Минковского графика  $\Gamma_f$  функции  $f(x)$  представлено в третьем параграфе.



**Рис. 1.2.** Фазовый портрет потока в  $\mathbb{R}^3$ .

**Fig 1.2.** Phase portrait of the flow in  $\mathbb{R}^3$

Полученный результат позволяет реализовать регулярную динамическую систему, замыкание двумерного устойчивого многообразия изолированной гиперболической точки которой может иметь размерность Минковского больше 2.

Заметим, что приведенные примеры систем с фрактальной размерностью инвариантных подмножеств, не являются структурно устойчивыми. На сегодняшний день широко известны примеры структурно устойчивых систем с дико вложенными инвариантными инвариантными подмножествами (см., например, [6], [7]). Однако, топологическая размерность таких подмножеств во всех известных случаях совпадает с размерностью Минковского.

## 2. Вычисление размерности Минковского графика $\Gamma_\phi$

**Л е м м а 2.1.** Для любого  $\gamma \in (\mathbb{R} \setminus 0)$  существует  $r_\gamma > 0$  такое, что для всех  $x > r_\gamma$  выполняется следующее неравенство:

$$\frac{|\gamma|}{2}x^{\gamma-1} < |(x+1)^\gamma - x^\gamma| < \frac{3|\gamma|}{2}x^{\gamma-1}. \quad (2.1)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Поскольку

$$(x+1)^\gamma - x^\gamma = x^\gamma \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^\gamma - 1 \right) = x^{\gamma-1} (\gamma + \alpha(x)),$$

где  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$ , то существует  $r_\gamma > 0$  такое, что

$$|\alpha(x)| < \frac{|\gamma|}{2}, \quad \forall x > r_\gamma.$$

Так как

$$||\gamma| - |\alpha(x)|| < |\gamma + \alpha(x)| < |\gamma| + |\alpha(x)|,$$

то

$$\frac{|\gamma|}{2} < |\gamma + \alpha(x)| < \frac{3|\gamma|}{2}, \forall x > r_\gamma.$$

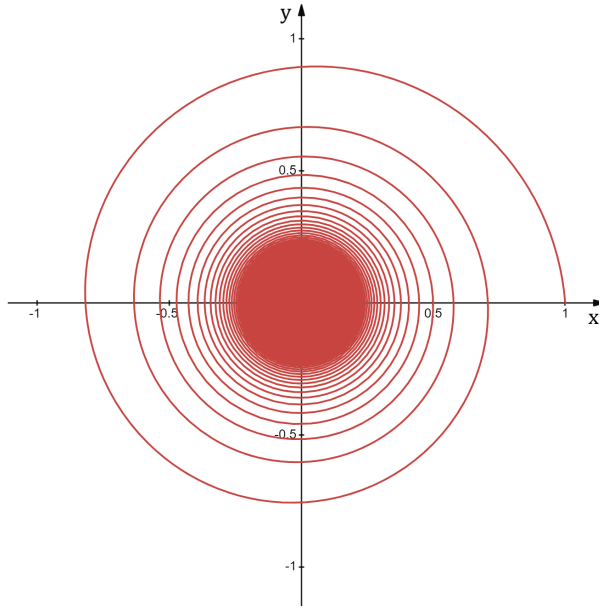
Таким образом,

$$\frac{|\gamma|}{2}x^{\gamma-1} < |(x+1)^\gamma - x^\gamma| < \frac{3|\gamma|}{2}x^{\gamma-1}, \forall x > r_\gamma.$$

Доказательство завершено.

**Т е о р е м а 2.1.** *Размерность Минковского графика  $\Gamma_\phi$  кривой  $\phi(t) = \phi_a(t)$  вида (1.6) равна (см. Рис. 2.1)*

$$\dim_M(\Gamma_\phi) = \frac{2}{a+1}. \tag{2.2}$$



**Рис. 2.1.** График кривой  $\phi(t)$  с параметром  $a = \frac{1}{2}$ ,  $\dim_M(\Gamma_\phi) = \frac{4}{3}$ .

**Fig 2.1.** Graph of the curve  $\phi(t)$  with the parameter  $a = \frac{1}{2}$ ,  $\dim_M(\Gamma_\phi) = \frac{4}{3}$

Доказательство. Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Непосредственно проверяется, что кривая  $\phi(t)$  пересекает ось абсцисс при значениях параметра  $t_k = \frac{1}{k}$  в точках  $(x_k, 0)$ , где

$$x_k = k^{-a}, k \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

В силу леммы 2.1, для всех  $k$ , начиная с некоторого, справедливо неравенство

$$c_1 k^{-a-1} \leq x_k - x_{k+1} \leq c_2 k^{-a-1}$$

(здесь и всюду ниже  $c_i$  — некоторые положительные величины, зависящие от  $a$ , но не зависящие от  $k$  и  $\varepsilon$ ).

Так как последовательность  $k^{-a-1}$  монотонно убывает и  $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-a-1} = 0$ , то найдётся  $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$  такое, что  $(k_\varepsilon + 1)^{-a-1} \leq \varepsilon \leq k_\varepsilon^{-a-1}$ . Откуда

$$c_3 \varepsilon^{-\frac{1}{a+1}} \leq k_\varepsilon \leq c_4 \varepsilon^{-\frac{1}{a+1}} \quad (2.4)$$

и, в силу (2.3),

$$c_5 \varepsilon^{\frac{a}{a+1}} \leq x_{k_\varepsilon} \leq c_6 \varepsilon^{\frac{a}{a+1}} \quad (2.5)$$

Обозначим через  $S_\varepsilon$  график кривой  $\phi(t)$  на отрезке  $t \in \left[\frac{1}{k_\varepsilon}, 1\right]$  и через  $l(S_\varepsilon)$  — его длину. Тогда,

$$l(S_\varepsilon) = \int_{\frac{1}{k_\varepsilon}}^1 \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \int_{\frac{1}{k_\varepsilon}}^1 t^{a-2} \sqrt{a^2 t^2 + 4\pi^2} dt.$$

Из условия  $t \leq 1$  получим, что

$$l(S_\varepsilon) \leq \sqrt{a^2 + 4\pi^2} \int_{\frac{1}{k_\varepsilon}}^1 t^{a-2} dt = \frac{\sqrt{a^2 + 4\pi^2}}{1-a} (k_\varepsilon^{a-1} - 1).$$

Откуда, в силу неравенства (2.4),

$$l(S_\varepsilon) \leq c_7 \varepsilon^{\frac{a-1}{a+1}}$$

и, следовательно,

$$N(S_\varepsilon, \varepsilon) \leq \frac{l(S_\varepsilon)}{\varepsilon} \leq c_7 \varepsilon^{\frac{a-1}{a+1}-1} = c_7 \varepsilon^{-\frac{2}{a+1}}. \quad (2.6)$$

Положим  $\Sigma_\varepsilon = \Gamma_\phi \setminus S_\varepsilon$ . Тогда график  $\Sigma_\varepsilon$  лежит в квадрате  $[-k_\varepsilon^a, k_\varepsilon^a] \times [-k_\varepsilon^a, k_\varepsilon^a]$ , площадь которого равна  $4k_\varepsilon^{-2a}$ . В силу неравенства (2.4), получаем, что

$$4k_\varepsilon^{-2a} \leq c_8 \varepsilon^{\frac{2a}{a+1}}$$

и, следовательно

$$N(\Sigma_\varepsilon, \varepsilon) \leq c_8 \frac{\varepsilon^{\frac{2a}{a+1}}}{\varepsilon^2} = c_8 \varepsilon^{-\frac{2}{a+1}}. \quad (2.7)$$

Из неравенств (2.6), (2.7) следует, что

$$N(\Gamma_\phi, \varepsilon) \leq c_9 \varepsilon^{-\frac{2}{a+1}}. \quad (2.8)$$

Из формулы (1.3) следует, что

$$N(\Gamma_\phi, \varepsilon) \geq M(\Gamma_\phi, 2\varepsilon) \geq M(S_\varepsilon, 2\varepsilon).$$

Покажем, что  $M(S_\varepsilon, 2\varepsilon) \geq c_{10} \varepsilon^{-\frac{2}{a+1}}$ , тогда из формулы (1.5) будет следовать, что  $\dim_M(\Gamma_\phi) = \frac{2}{a+1}$ .

Действительно, обозначим через  $S_k$  график кривой  $\phi(t)$  на отрезке

$$\Delta_k = [t_k, t_{k+1}], \quad k \in \mathbb{N}$$



и через  $l(S_k)$  – длину дуги этой кривой. Непосредственно проверяется, что  $l(S_k)$  не меньше длины окружности с центром в начале координат радиуса  $x_{k+1}$ . Откуда следует, что

$$M(S_k, 2\varepsilon) \geq \frac{\pi x_{k+1}}{\varepsilon}. \tag{2.9}$$

По построению  $S_\varepsilon$  – график кривой  $\phi(t)$  на отрезке  $[t_{k_\varepsilon}, 1]$  и этот отрезок содержит все отрезки  $\Delta_k, k = 1, \dots, k_\varepsilon$ . Тогда  $M(S_\varepsilon, 2\varepsilon) \geq \frac{\pi k_\varepsilon x_{k_\varepsilon}}{\varepsilon}$ , откуда, в силу неравенств (2.4), (2.5),  $M(S_\varepsilon, 2\varepsilon) \geq c_{10} \varepsilon^{-\frac{2}{a+1}}$ .

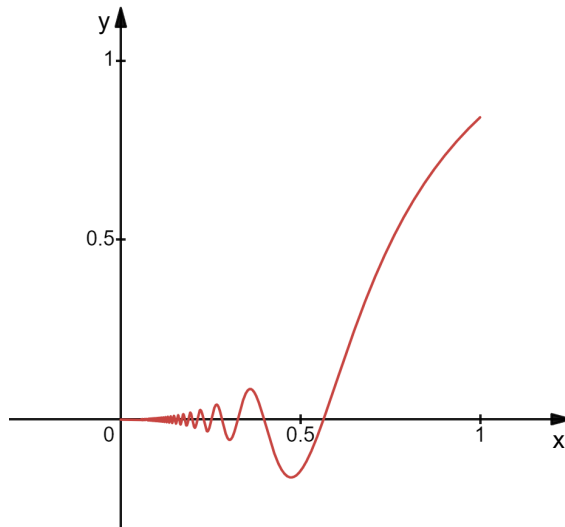
Доказательство завершено.

### 3. Вычисление размерности Минковского графика $\Gamma_f$

**Теорема 3.1.** *Размерность Минковского графика  $\Gamma_f$  функции  $f(x) = f_{a,b}(x)$  (1.7) равна (см. Рис. 3.1, 3.2)*

$$\dim_M(\Gamma_f) = 2 - \frac{a+1}{b+1}, \quad a < b; \tag{3.1}$$

$$\dim_M(\Gamma_f) = 1, \quad a \geq b. \tag{3.2}$$



**Рис. 3.1.** График функции  $f(x)$  с параметрами  $a = \frac{12}{5}, b = 2, \dim_M(\Gamma_f) = 1$

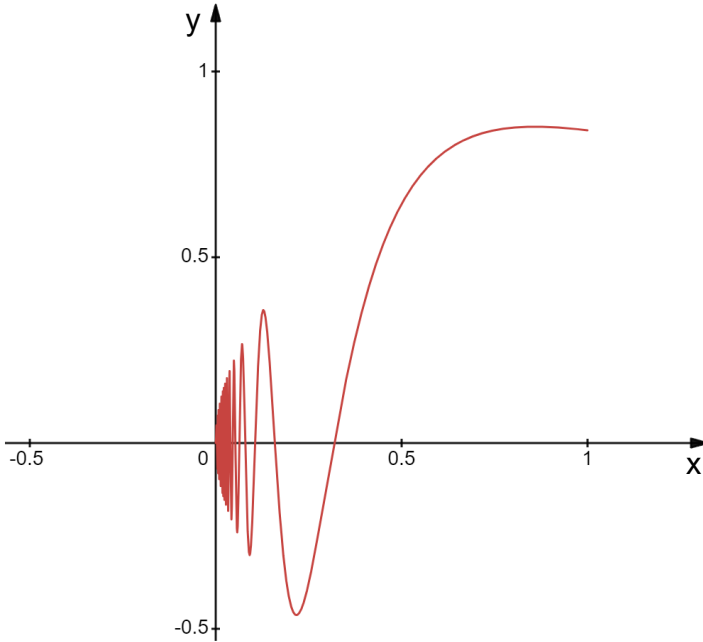
**Fig 3.1.** Graph of the function  $f(x)$  with parameters  $a = \frac{12}{5}, b = 2, \dim_M(\Gamma_f) = 1$

**Доказательство.** Заметим, что функция  $f(x)$  является гладкой, когда  $a > b + 1$  и, следовательно (см. например, [8]),  $\dim_M(\Gamma_f) = 1$  в этом случае.

Рассмотрим случай  $a \leq b + 1$ .

Положим  $d = b + 1 - a$ . Тогда  $d \geq 0$  и для  $x \in (0, 1]$

$$f'(x) = x^{-d} (ax^b \sin(x^{-b}) - b \cos(x^{-b})).$$



**Рис. 3.2.** График функции  $f(x)$  с параметрами  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ ,  $\dim_M(\Gamma_f) = 1,25$

**Fig 3.2.** Graph of the function  $f(x)$  with parameters  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ ,  $\dim_M(\Gamma_f) = 1,25$

Откуда

$$0 \leq |f'(x)| \leq x^{-d}(a+b).$$

Поскольку  $1 \leq x^{-2d}$ , то

$$1 \leq \sqrt{1 + (f'(x))^2} \leq x^{-d} \sqrt{1 + (a+b)^2}. \quad (3.3)$$

Обозначим через  $l(\Gamma_f)$  длину графика  $\Gamma_f$ . По определению

$$l(\Gamma_f) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

В силу неравенства (3.3), для  $0 \leq d \leq 1$  величина  $l(\Gamma_f)$  конечна. Откуда

$$\frac{1}{\varepsilon} \leq N(\Gamma_f, \varepsilon) \leq \frac{l(\Gamma_f)}{\varepsilon}$$

и, следовательно,

$$1 \leq \frac{\ln N(\Gamma_f, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \leq \frac{\ln(l(\Gamma_f)/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

Тогда из формулы (1.5) следует, что  $\dim_M(\Gamma_f) = 1$ .

Далее рассмотрим случай  $d > 1$ .

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Непосредственно проверяется, что график функции  $f(x)$  пересекает ось абсцисс в точках  $x_0 = 0$  и

$$x_k = (\pi k)^{-\frac{1}{b}}, k \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Поскольку

$$x_k - x_{k+1} = (\pi)^{-\frac{1}{b}} \left( k^{-\frac{1}{b}} - (k+1)^{-\frac{1}{b}} \right),$$

то, в силу леммы 2.1, для всех  $k$ , начиная с некоторого, справедливо неравенство

$$c_1 k^{-\frac{b+1}{b}} \leq x_k - x_{k+1} \leq c_2 k^{-\frac{b+1}{b}}$$

(здесь и всюду ниже  $c_i$  – некоторые положительные величины, зависящие от  $a$  и  $b$ , но не зависящие от  $k$  и  $\varepsilon$ ). Поскольку последовательность  $k^{-\frac{b+1}{b}}$  монотонно убывает и  $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-\frac{b+1}{b}} = 0$ , то найдётся  $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$  такое, что  $x_{k_\varepsilon+1} \leq \varepsilon \leq x_{k_\varepsilon}$ . Откуда

$$c_3 \varepsilon^{-\frac{b}{b+1}} \leq k_\varepsilon \leq c_4 \varepsilon^{-\frac{b}{b+1}} \tag{3.5}$$

и, в силу (3.4),

$$c_5 \varepsilon^{\frac{1}{b+1}} \leq x_{k_\varepsilon} \leq c_6 \varepsilon^{\frac{1}{b+1}} \tag{3.6}$$

Обозначим через  $\Gamma_\varepsilon$  график функции  $f$  на отрезке  $[x_{k_\varepsilon}, 1]$  и через  $l(\Gamma_\varepsilon)$  его длину. Тогда, в силу неравенства (3.3),

$$l(\Gamma_\varepsilon) \leq \sqrt{1 + (a+b)^2} \int_{x_{k_\varepsilon}}^1 x^{-d} dx = \frac{\sqrt{1 + (a+b)^2}}{d-1} ((x_{k_\varepsilon})^{1-d} - 1).$$

Откуда, в силу формулы (3.6), справедливо неравенство

$$l(\Gamma_\varepsilon) \leq c_7 \varepsilon^{\frac{a-b}{b+1}}$$

и, следовательно,

$$N(\Gamma_\varepsilon, \varepsilon) \leq \frac{l(\Gamma_\varepsilon)}{\varepsilon} \leq c_7 \varepsilon^{\frac{a-b}{b+1}-1} = c_7 \varepsilon^{\frac{a+1}{b+1}-2}. \tag{3.7}$$

Положим  $G_\varepsilon = \Gamma_f \setminus \Gamma_\varepsilon$ . Тогда график  $G_\varepsilon$  лежит в прямоугольнике  $[0, x_{k_\varepsilon}] \times [-x_{k_\varepsilon}^a, x_{k_\varepsilon}^a]$ , площадь которого равна  $2x_{k_\varepsilon}^{a+1}$ . В силу формулы (3.6), справедливо неравенство

$$2x_{k_\varepsilon}^{a+1} \leq c_8 \varepsilon^{\frac{a+1}{b+1}}$$

и, следовательно,

$$N(G_\varepsilon, \varepsilon) \leq \frac{2x_{k_\varepsilon}^{a+1}}{\varepsilon^2} \leq c_8 \varepsilon^{\frac{a+1}{b+1}-2}. \tag{3.8}$$

Из неравенств (3.7), (3.8) следует, что

$$N(\Gamma_f, \varepsilon) \leq c_9 \varepsilon^{\frac{a+1}{b+1}-2}. \tag{3.9}$$

Из формулы (1.3) следует, что

$$N(\Gamma_f, \varepsilon) \geq M(\Gamma_f, 2\varepsilon) \geq M(\Gamma_\varepsilon, 2\varepsilon).$$

Покажем, что  $M(\Gamma_\varepsilon, 2\varepsilon) \geq c_{10}\varepsilon^{\frac{a+1}{b+1}-2}$ , тогда из формулы (1.5) будет следовать, что  $\dim_M(\Gamma_f) = 2 - \frac{a+1}{b+1}$ .

Действительно, обозначим через  $\Gamma_k$  график функции  $f(x)$  на отрезке

$$\Delta_k = [x_{k+1}, x_k], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Непосредственно проверяется, что на отрезке  $\Delta_k$  функция  $|f|$  достигает наибольшего значения в точке  $(\frac{\pi k}{2})^{-\frac{1}{b}}$  и оно равно  $(\frac{\pi k}{2})^{-\frac{a}{b}}$ . Откуда следует, что

$$M(\Gamma_k, 2\varepsilon) \geq \frac{(\frac{\pi k}{2})^{-\frac{a}{b}}}{\varepsilon}.$$

По построению  $\Gamma_\varepsilon$  – график функции  $f$  на отрезке  $[x_{k_\varepsilon}, 1]$  и этот отрезок содержит все отрезки  $\Delta_k$ ,  $k = 1, \dots, k_\varepsilon$ . Тогда  $M(\Gamma_\varepsilon, 2\varepsilon) \geq \frac{k_\varepsilon (\frac{\pi k_\varepsilon}{2})^{-\frac{a}{b}}}{\varepsilon}$ , откуда, в силу неравенства (3.5),  $M(\Gamma_\varepsilon, 2\varepsilon) \geq c_{10}\varepsilon^{\frac{a+1}{b+1}-2}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о .**

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 23-71-30008).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука. 1973. 575 с.
2. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра // Уч. записки Горьк. ун-та. 1937. Т. 5. С. 3–24.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука. 1937. 568 с.
4. Hopf E. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential systems // Ber. Math.-Phys. Sächsische Academie der Wissenschaften, Leipzig. 1942. Vol. 94. pp. 1–22.
5. Зелик С. В. Аттракторы. Тогда и сейчас. // Успехи математических наук. 2023. Т. 78, № 4. С. 53–198.
6. Bonatti C., Grines V. Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere  $S^3$  // Journal of dynamical and control systems. 2000. Vol. 6, no. 4. pp. 579–602.
7. Medvedev T. V., Pochinka O. V. The wild Fox-Artin arc in invariant sets of dynamical systems // Dynamical Systems. 2018. Vol. 33. pp. 660–666.
8. Fernandez-Martinez M., Sanchez-Granero M. A. A new fractal dimension for curves based on fractal structures // Topology Applications. 2016. Vol. 203. pp. 108–124.

Поступила 09.01.2024; доработана после рецензирования 10.02.2024;  
принята к публикации 27.02.2024

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. P. S. Alexandrov, B. A. Pasyukov, *Vvedenie v teoriyu razmernosti [Introduction to the theory of dimension]*, Nauka, Moscow, 1973 (In Russ), 575 p.
2. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, "Some cases of dependence of limit cycles on a parameter", *Science notes of Gorky University*, **5** (1937), 3-24 (In Russ).
3. A. A. Andronov, A. A. Witt, S. E. Khaykin, *Teoriya kolebaniy [Theory of oscillations]*, Nauka, Moscow, 1937 (In Russ), 568 p.
4. E. Hopf, "Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential systems", *Ber. Math.-Phys. Sachsische Academie der Wissenschaften, Leipzig*, **94** (1942), 1-22.
5. S. V. Zelik, "Attractors. Then and now", *Russian Math. Surveys*, **78**:4 (2023), 635-677 (In Russ).
6. C. Bonatti, V. Grines, "Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere  $S^3$ ", *Journal of dynamical and control systems*, **6**:4 (2000), 579-602.
7. T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, "The wild Fox-Artin arc in invariant sets of dynamical systems", *Dynamical Systems*, **33** (2018), 660-666.
8. M. Fernandez-Martinez, M. A. Sanchez-Granero, "A new fractal dimension for curves based on fractal structures", *Topology Applications*, **203** (2016), 108-124.

Submitted 09.01.2024; Revised 10.02.2024; Accepted 27.02.2024

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.