V. F. Lazutkin, D. Ya. Terman, On the number of quasimodes of the “bouncing ball” type, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 117, 172–182

В.Ф.Лазуткин, Д.Я.Терман

О КОЛИЧЕСТВЕ КВАЗИМОД ТИПА "ПРЫГАЮЩЕГО МЯЧИКА"

§ I. Введение.

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, имеющую гладкую границу $\partial\Omega$. Пусть Ω содержит устойчивый диаметр AB, т.е. отрезок прямой, концы которого A и B принадлежат $\partial\Omega$, остальные точки являются внутренними точками Ω, касательные к $\partial\Omega$ в точках A и B ортогональны AB и выполнено условие устойчивости $0 < (1-d\,R_A^{-1})(1-d\cdot R_B^{-1}) < 1$, где d – длина AB, R_A и R_B – радиусы кривизны $\partial\Omega$ в точках A и B. При некоторых дополнительных условиях в окрестности AB могут сосредоточиваться т.н. собственные функции типа "прыгающего мячика" для задачи

$$(\Delta + k^2)u = 0, \qquad u\big|\partial\Omega = 0, \qquad \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 \tag{I.I}$$

(см.монографию [I] и подробную библиографию в ней).

Методом эталонных задач можно построить в окрестности AB последовательность "квазимод", т.е. гладких функций u_{pq}, удовлетворяющих граничному условию (I.I) и вместе с некоторой последовательностью чисел $k_{pq} \longrightarrow +\infty$ оценкам

$$\|(\Delta + k_{pq}^2)u_{pq}\| \leqslant C\, k_{pq}^{-N+1}, \tag{I.2}$$

$$\|u_{pq}\| \geqslant C^{-1}, \tag{I.3}$$

заменяющим точное выполнение уравнения (I.I). В этих неравенствах $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\Omega)$, C – положительная константа, N – натуральное число, тем большее, чем больше членов формального асимптотического разложения мы используем при построении квазимод. При наличии оценок (I.2) и (I.3) можно делать определенные заключения о близости u_{pq} и k_{pq} к истинным собственным функциям и собственным числам задачи (I.I) ([I] гл.6 § 6). Квантовые числа p, q в (I.2)-(I.3), нумерующие квазимоды, суть натуральные числа, причем $k_{pq} \longrightarrow +\infty$, если $p \to +\infty$, p – число узлов первого приближения для u_{pq} вдоль AB, q – число узлов в ортогональном к AB направлении. Оценки (I.2)-(I.3) доказывались ранее в предположении $q \leqslant const$. Было неясно сколь большие значения может принимать это квантовое число. Анализ выражений для u_{pq} показывает, что с ростом q растут коэффициенты в разложениях, входящих в u_{pq}, и константа C в (I.2)-(I.3) сильно зависит от q.

В настоящей работе при некоторых сформулированных ниже ограничениях на поведение $\partial\Omega$ в окрестностях точек A и B конструируются несколько видоизмененные формулы для u_{pq}, сохраняющие, однако, характер сосредоточенности около AB и переходящие в прежние при условии $p \longrightarrow +\infty, q \leqslant const$. При построениях используется техника двухмасштабных разложений. Для построенных квазимод оценки (I.2)-(I.3) доказываются в области

$$0 \leqslant q \leqslant c_0 p^{1-\varepsilon}, \tag{I.4}$$

где $\varepsilon \in]0,1[$, $c_0 > 0$ произвольные фиксированные числа. Константа C в (I.2)-(I.3) в этом случае зависит только от ε, c_0, N и Ω. Приведем ограничения, при которых нами построены квазимоды в области (I.4) и доказано сформулированное утверждение.

Ограничения на поведение $\partial\Omega$ в окрестности точек A и B:

I) гладкость: $\partial\Omega \in C^{2\left[\frac{N+1}{\varepsilon}\right]+4}$ в окрестности точек A и B, $[\cdot]$ - знак целой части;

2) арифметическое условие:

$$\sin 2k\alpha \neq 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{N+1}{\varepsilon}\right],$$

где $\alpha = \arccos\sqrt{(1-dR_A^{-1})(1-dR_B^{-1})}$;

3) симметрия: в малой окрестности точек A и B части границы симметричны относительно оси AB.

Последнее условие введено для упрощения формул. Нет сомнения в том, что полученный результат можно распространить на случай несимметричной относительно AB границы. Первые два условия носят принципиальный характер.

Область (I.4), пробегаемая парой квантовых чисел (p,q) существенно шире ранее рассматриваемой области $q \leqslant const$. Она является в некотором смысле максимальной для квазимод типа прыгающего мячика: если в (I.4) положить $\varepsilon = 0$, то квазимоды рассматриваемого типа со всеми такими (p,q) заведомо нельзя построить ввиду наличия резонансных щелей в окрестности устойчивой периодической траектории биллиарда, соответствующей диаметру AB (см. [2]).

Везде далее $const$ обозначает положительное число, не зависящее от p и q.

§ 2. Анзац.

Фиксируем числа $\varepsilon\in]0,1[$, $C_0>0$, целое положительное N . Будем искать приближенное решение уравнения (I.I) в виде

$$\vartheta=\sqrt[4]{k}\,e^{ik\Phi}\mathcal{D}_q\left(\sqrt{2q+1}\;\Psi\right). \tag{2.I}$$

Здесь $\mathcal{D}_q(Z)$ - решение уравнения

$$\mathcal{D}_q''(Z)=\left(Z^2-(2q+1)\right)\mathcal{D}_q(Z),$$

экспоненциально убывающее при $Z\to\pm\infty$, нормированное условием $\int_{-\infty}^{+\infty}|\mathcal{D}_q(Z)|^2dZ=1$;

q - натуральное число, пробегающее интервал $0\leqslant q\leqslant C_1k^{1-\varepsilon}$, $C_1=C_0\left(\frac{2d}{\pi}\right)^{-1}$;

$$\Phi=\sum_{n=0}^{N}(ik)^{-n}\Phi_n,\quad \Psi=\sum_{n=0}^{N}(ik)^{-n}\Psi_n, \tag{2.2}$$

где Φ_n и Ψ_n - вещественные функции, следующим образом разлагающиеся по степеням малого параметра $\gamma=(2q+1)/k$:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_n&=\sum_{m=-1}^{M_n}\gamma^{m+1}\Phi_{nm}(x,\mu),\\ \Psi_n&=\sum_{m=0}^{M_n}\gamma^{m}\Psi_{nm}(x,\mu).\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

В (2.3) $M_n=\left[\frac{N-n+1}{\varepsilon}\right]$; $\mu=\gamma^{-1/2}y$; (x,y) - декартовы координаты на плоскости с началом в точке A и осью x , направленной вдоль AB в сторону точки B ; $\Phi_{nm}(x,\mu)$, $-1\leqslant m<M_n$ и $\Psi_{n,m}(x,\mu)$, $0\leqslant m<M_n$ - полиномы степеней соответственно не выше $2m+2$ и $2m+1$ от переменной μ с коэффициентами, аналитически зависящими от x , причем Φ_{nm} содержит только четные степени μ , Ψ_{nm} - только нечетные; $\Phi_{n,M_n}(x,\mu,\gamma)$ и $\Psi_{n,M_n}(x,\mu,\gamma)$ - гладкие класса C^2 функции, заданные в области $\gamma\mu^2\leqslant const$, $0\leqslant x\leqslant d$, удовлетворяющие оценкам

$$\left.\begin{aligned}&\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^{\beta}\Phi_{n,M_n}\right|\leqslant const\left(1+|\mu|^{2M_n+2-\beta}\right),\\ &\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^{\beta}\Psi_{n,M_n}\right|\leqslant const\left(1+|\mu|^{2M_n+1-\beta}\right),\\ &\qquad 0\leqslant\alpha+\beta\leqslant 2.\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

§ 3. Подстановка в уравнение и нахождение полиномов Φ_{nm}, Ψ_{nm}, $m < M_n$.

Подставляем выражение (2.I) в левую часть уравнения (I.I):

$$(\Delta + k^2)\vartheta = \sqrt[4]{k}\, e^{ik\Phi}\left\{k^2 \varkappa\, \mathcal{D}_q\left(\sqrt{2q+1}\ \psi\right) + i k \sqrt{2q+1}\, \nu\, \mathcal{D}'_q\left(\sqrt{2q+1}\ \psi\right)\right\} . \tag{3.I}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= 1 - (\nabla\Phi)^2 + \gamma^2 (\nabla\psi)^2 (\psi^2 - 1) - \frac{1}{ik}\Delta\Phi , \\ \nu &= 2(\nabla\Phi, \nabla\psi) + \frac{1}{ik}\Delta\psi . \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Подставляем в правые части (3.2) разложения (2.2) и (2.3) и разлагаем по степеням $(ik)^{-1}$ и γ :

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \sum_{n=0}^{4N} (ik)^{-n} \sum_{m=-1}^{4M_n} \gamma^{m+1} \varkappa_{nm} , \\ \nu &= \sum_{n=0}^{2N} (ik)^{-n} \sum_{m=0}^{2M_n} \gamma^{m} \nu_{nm} \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varkappa_{nm} = {} & \delta_{0n}\delta_{m,-1} - \sum_{\substack{k+\ell=n \\ \varkappa+\lambda=m-1}} \frac{\partial\Phi_{k\varkappa}}{\partial x}\frac{\partial\Phi_{\ell}}{\partial x} - \sum_{\substack{k+\ell=n \\ \varkappa+\lambda=m}} \frac{\partial\Phi_{k\varkappa}}{\partial\mu}\frac{\partial\Phi_{\ell\lambda}}{\partial\mu} + \\ & + \sum_{\substack{k+\ell+r+s=n \\ \varkappa+\lambda+\rho+\sigma=m-1}} \frac{\partial\psi_{k\varkappa}}{\partial x}\frac{\partial\psi_{\ell\lambda}}{\partial x}\left(\psi_{r\rho}\psi_{s\sigma} - \delta_{0r}\delta_{0s}\delta_{0\rho}\delta_{0\sigma}\right) + \\ & + \sum_{\substack{k+\ell+r+s=n \\ \varkappa+\lambda+\rho+\sigma=m}} \frac{\partial\psi_{k\varkappa}}{\partial\mu}\frac{\partial\psi_{\ell\lambda}}{\partial\mu}\left(\psi_{r\rho}\psi_{s\sigma} - \delta_{0r}\delta_{0s}\delta_{0\rho}\right) - \frac{\partial^2\Phi_{n-1,m}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi_{n-1,m+1}}{\partial\mu^2} , \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \nu_{nm} = {} & \sum_{\substack{\ell+r=n \\ \lambda+\rho=m-1}} 2\frac{\partial\Phi_{\ell\lambda}}{\partial x}\frac{\partial\psi_{r\rho}}{\partial x} + \sum_{\substack{\ell+r=n \\ \lambda+\rho=m}} 2\frac{\partial\Phi_{\ell\lambda}}{\partial\mu}\frac{\partial\psi_{r\rho}}{\partial\mu} + \\ & + \frac{\partial^2\psi_{n-1,m}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_{n-1,m+1}}{\partial\mu^2} ; \end{aligned}$$

$\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера.

Потребуем, чтобы $\varkappa_{nm}=\nu_{nm}=0$ при $n\leqslant N$, $m<M_n$. Выпишем и решим первые несколько уравнений, учитывая предположенную полиномиальную зависимость Φ_{nm} и Ψ_{nm} от μ:

$$n=0, \quad m=-1, \quad \varkappa_{0,-1}=1-\left(\frac{\partial\Phi_{0,-1}}{\partial x}\right)^2=0,$$

полагаем $\Phi_{0,-1}=x$;

$$n=0, \quad m=0,$$

$$\varkappa_{00}=-2\frac{\partial\Phi_{00}}{\partial x}-\left(\frac{\partial\Phi_{00}}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi_{00}}{\partial\mu}\right)^2\left(\Psi_{00}^2-1\right)=0,$$

$$\nu_{00}=2\frac{\partial\Psi_{00}}{\partial x}+2\frac{\partial\Phi_{00}}{\partial\mu}\frac{\partial\Psi_{00}}{\partial\mu}=0, \tag{3.5}$$

полагаем $\Phi_{00}=\Phi_{002}(x)\mu^2+\Phi_{000}(x)$, $\Psi_{00}=\Psi_{001}(x)\mu$, подставляя в (3.5), приравнивая нулю коэффициенты при степенях μ и решая получившуюся систему, получаем:

$$\Phi_{002}=\frac{1}{2}\frac{\theta'}{\theta}, \quad \Phi_{000}=-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{dx}{\theta^2(x)},$$

$$\Psi_{001}=\frac{1}{\theta}, \qquad \theta=\sqrt{\ell+\ell^{-1}(x-x_0)^2}, \tag{3.6}$$

константы ℓ и x_0 определяются далее из граничных условий.

Для рассмотрения дальнейших уравнений удобно ввести новые переменные $z=\int_0^x\frac{dx}{\theta^2(x)}$, $\zeta=\frac{1}{\theta(x)}\mu$. В этих переменных дальнейшие уравнения выглядят так:

$$\frac{\theta^2}{2}\varkappa_{nm}=-\frac{\partial\Phi_{nm}}{\partial z}+(\zeta^2-1)\frac{\partial\Psi_{nm}}{\partial\zeta}+\zeta\Psi_{nm}-E_{nm}=0,$$

$$\frac{\theta^2}{2}\nu_{nm}=\frac{\partial\Psi_{nm}}{\partial z}+\frac{\partial\Phi_{nm}}{\partial\zeta}-F_{nm}=0,$$

E_{nm}, F_{nm} – полиномы по переменной ζ с коэффициентами, аналитически зависящими от z, имеющие ту же структуру, что Φ_{nm} и Ψ_{nm} соответственно. Они зависят от $\Phi_{n'm'}$, $\Psi_{n'm'}$ с $(n',m')<(n,m)$. Мы упорядочиваем пары (n,m) лексикографически: $(n',m')<(n,m)\Longleftrightarrow[n'<n]$ или $n'=n$ и $m'<m$. Для определения коэффициентов полиномов $\Phi_{nm}=$ $=\sum_{k=0}^{m+1}\Phi_{nmk}(z)\zeta^{2k}$, $\Psi_{nm}=\sum_{k=1}^{m+1}\Psi_{nmk}(z)\zeta^{2k-1}$ получаем систему

$$-\frac{d}{dz}\Phi_{nmk}+2k\Psi_{nmk}=E_{nmk}-(2k+1)\Psi_{nm,k+1},$$
$$\frac{d}{dz}\Psi_{nmk}+2k\Phi_{nmk}=F_{nmk}. \tag{3.7}$$

Здесь E_{nmk}, F_{nmk} – соответствующие коэффициенты полиномов E_{nm} и F_{nm}.

§ 4. Оценка невязки.

Выберем положительное число $\varepsilon' < \varepsilon$ из условия

$$M_n \geqslant \frac{1}{\varepsilon'}(N-n+1)-1 \tag{4.1}$$

для всех n из интервала $0 \leqslant n \leqslant N$. Фиксируем срезающую функцию $\chi(t)$ класса C^∞, равную 1 в некоторой окрестности 0 и равную 0 вне некоторой другой окрестности 0. Положим $\widetilde{v}(x,y)= = v(x,y)\chi(k^{\varepsilon/2}y)$. Пусть функция v такая, как в §2, и коэффициенты полиномов Φ_{nm} и Ψ_{nm} определены в соответствии с требованиями §3. В этом параграфе мы докажем оценку

$$\|(\Delta+k^2)\widetilde{v}\| \leqslant Ck^{-N+1}, \tag{4.2}$$

где C зависит только от ε, ε', χ, N, d, ℓ, x_0 и постоянных, возникающих при интегрировании уравнений (3.7).

Шаг 1. Используя грубую оценку для полиномов Эрмита: $|H_q(x)| \leqslant \leqslant (1+q!\,q)(|2x|^q+1)$, нетрудно доказать следующую оценку для членов в невязке, возникших в результате дифференцирования функции $\chi(k^{\varepsilon/2}y)$:

$$\|v\,\Delta\chi+2(\nabla v,\nabla\chi)\| \leqslant const\, e^{-const\, k^{1-\varepsilon'}} \tag{4.3}$$

Шаг 2. Используя неравенство треугольника, оценим невязку следующим образом:

$$\|\chi(\Delta+k^2)v\| \leqslant \sqrt[4]{k}\,max\left|e^{ik\Phi}\right|\sum_{n,m}k^{-n}\gamma^{\prime n}\times$$
$$\times\left\{k^2\gamma\, max|\varkappa_{nm}|\,\|\mathcal{D}_q(\sqrt{2q+1}\,\psi)\| + \right. \tag{4.4}$$
$$\left.+const\; k^{3/2-\varepsilon/2}\,max|\nu_{nm}|\,\|\mathcal{D}'_q(\sqrt{2q+1}\,\psi)\|\right\}.$$

В (4.4) max и $\|\cdot\|$ вычисляются по области $\overline{\Omega}\cap \operatorname{supp}\chi(k^{\varepsilon/2})$, суммирование распространяется на те пары (n,m), для которых $\varkappa_{nm}$ и ν_{nm} отличны от 0. Используя полиномиальный характер Φ_{nm} и Ψ_{nm}, $m < M_n$, (2.3) и (2.4), нетрудно получить равномерные по q оценки для оставшихся коэффициентов:

$$|\varkappa_{nm}| \leqslant \mathrm{const}\, k^{(\varepsilon-\varepsilon')(m+1)}, \quad |\nu_{nm}| \leqslant \mathrm{const}\, k^{(\varepsilon-\varepsilon')(m+1/2)}. \tag{4.5}$$

Шаг 3. Разложим функции Φ и ψ на вещественную и мнимую части: $\Phi=\Phi'+i\Phi''$, $\psi=\psi'+i\psi''$. Из (2.2)-(2.4) следует, что при $|y|\leqslant \mathrm{const}\, k^{-\varepsilon/2}$

$$\left|\sqrt{2q+1}\,\psi''\right| \leqslant \mathrm{const}\, k^{-\frac{1+\varepsilon'}{2}}, \quad \left|k\Phi''\right| \leqslant \mathrm{const}. \tag{4.6}$$

Отсюда получаем, что

$$\left\|\mathcal{D}_q(\sqrt{2q+1}\,\psi)\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\|\mathcal{D}_q^{(n)}(\sqrt{2q+1}\,\psi')\right\|(\mathrm{const})^n k^{-\frac{1+\varepsilon'}{2}n} \tag{4.7}$$

Справедлива следующая оценка, доказываемая с применением асимптотической теории дифференциальных уравнений, содержащих точки поворота:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathcal{D}_q^{(n)}(z)\right|^2 dz \leqslant A\,(n\ln n)^n\,(2q+1)^n+1 \tag{4.8}$$

где A не зависит ни от q, ни от n. Используя (4.8), нетрудно получить, что при $n\geqslant 1$

$$\sqrt[4]{k}\,\left\|\mathcal{D}_q^{(n)}(\sqrt{2q+1}\,\psi')\right\| \leqslant \mathrm{const}\,(n\ln n)^{n/2}\,k^{\frac{1-\varepsilon}{2}n} \tag{4.9}$$

Подставляем (4.9) в правую часть (4.7):

$$\sqrt[4]{k}\left\|\mathcal{D}_q(\sqrt{2q+1}\,\psi)\right\| \leqslant \mathrm{const}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n\ln n)^{n/2}}{n!}(\mathrm{const})^n k^{-\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}n} \leqslant \mathrm{const}. \tag{4.10}$$

Аналогичным образом оценивается норма производной:

$$\sqrt[4]{k}\,\left\|\mathcal{D}_q'(\sqrt{2q+1}\,\psi)\right\| \leqslant \mathrm{const}\; k^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \tag{4.11}$$

Шаг 4. Собирая полученные оценки, получаем окончательную оценку для невязки:

$$\left\|(\Delta+k^2)\tilde{v}\right\| \leqslant \mathrm{const}\left\{e^{-\mathrm{const}\,k^{1-\varepsilon'}} + \right.$$

$$+\sum_{n=0}^{N}\sum_{m\geqslant M_n}\left(k^{2-\varepsilon'(m+1)}+k^{2-\varepsilon'(m+1)-\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2}}\right)+$$

$$\left.+\sum_{n>N}k^{-n}\left(k^2+k^{2-\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}}\right)\right\} \leqslant \mathrm{const}\; k^{-N+1}.$$

§ 5. Учет краевых условий.

Потребуем, чтобы функция $u = \mathrm{Im}\,\tilde{v}$ точно удовлетворяла краевому условию (I.I). Оно будет выполняться, если подчинить Φ_n и Ψ_n следующим требованиям:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{2n}\Big|_A = 0, \qquad \Psi_{2n+1}\Big|_{A,B} = 0, \\ &k\sum_{n=0}^{[N/2]}(ik)^{-2n}\,\Phi_{2n}\Big|_B = \pi p \end{aligned}\right\}. \tag{5.I}$$

В (5.I) p – большое натуральное число ("продольное квантовое число"), $F|_A$ и $F|_B$ – значения функции F на соответствующих компонентах множества $\partial\Omega \cap \operatorname{supp}\chi(k^{\varepsilon/2}\,\cdot)$. Уравнения этих компонент в координатах x, μ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &A:\quad x = \sum_{m=0}^{M_0}\gamma^{m+1}A_m(\mu), \\ &B:\quad x = d - \sum_{m=0}^{M_0}\gamma^{m+1}B_m(\mu). \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

В (5.2) $A_m(\mu)=a_{2m+2}\,\mu^{2m+2}$, $B_m(\mu)=b_{2m+2}\,\mu^{2m+2}$, $0\leqslant m< M_0$, A_{M_0} и B_{M_0} суть гладкие класса C^2 функции переменных μ и γ, заданные в области $\mu^2\gamma < \mathrm{const}$, причем

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial\mu^j}A_{M_0},\, B_{M_0}\right| \leqslant \mathrm{const}\,\mu^{2M_0+2-j}, \quad 0\leqslant j\leqslant 2.$$

Для аналитической функции переменной x справедлива формула
$$F\big|_A = \sum_{j=0}^{\infty}\gamma^j X_j^A F, \quad \text{где}$$

$$X_j^A F = \sum_{\alpha=1}^{j}(\alpha!)^{-1}\sum_{m_1+m_2+\ldots+m_\alpha+\alpha=j}A_{m_1}A_{m_2}\ldots A_{m_\alpha}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}F\Big|_{x=0}.$$

Аналогичная формула для $F|_B$ получится, если A_{m_i} заменить на $-B_{m_i}$, $\big|_{x=0}$ заменить на $\big|_{x=d}$. Используя эти обозначения, краевые условия (5.I) можно переписать в виде:

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{m+j=s-1} X_j^A \Phi_{2n,m}=0;\ \dfrac{d}{d\mu}\sum\limits_{m+j=s-1} X_j^B \Phi_{2n,m}=0,\quad 0\leqslant s\leqslant M_{2n};\\ \sum\limits_{m+j=s-1} X_j^{A,B}\,\Psi_{2n+1,m}=0,\quad 0\leqslant s\leqslant M_{2n+1};\end{array}\right\}\tag{5.3}$$

$$\sum_{n=0}^{N}(ik)^{-2n}\sum_{s=0}^{M_n}\gamma^s\sum_{m+j=s-1}\left[X_j^B\,\Phi_{2n,m}\right]_0=\pi p \tag{5.4}$$

в (5.4) символ $[\quad]_0$ обозначает член при нулевой степени μ полинома, стоящего в квадратных скобках. Для коэффициентов в (2.3), не являющихся полиномами, краевые условия выглядят так:

$$\Phi_{2n,M_{2n}}\Big|_{A,B}+\sum_{s=0}^{\infty}\gamma^s\Big(\sum_{m+j=s+M_{2n}} X_j^{A,B}\,\Phi_{2n,m}\Big)=0,$$

$$\Psi_{2n+1,M_{2n+1}}\Big|_{A,B}+\sum_{s=0}^{\infty}\gamma^s\Big(\sum_{\substack{m+j=s+M_{2n+1}\\ m<M_{2n+1}}} X_j^{A,B}\,\Psi_{2n+1,m}\Big)=0. \tag{5.5}$$

Условия (5.3) при $n=0$, $m=-1$ выполняются автоматически, а при $n=0$, $m=0$ эквивалентны следующим краевым условиям для функции $\theta(x)$: $\theta'\theta^{-1}\big|_{x=0}=R_A^{-1}$, $\theta'\theta^{-1}\big|_{x=\ell}=-R_B^{-1}$, откуда однозначно определяются постоянные ℓ и x_0, входящие в (3.6). Дальнейшие условия (5.3) удобно записать, перейдя от x,μ к переменным z,ζ (см. §3). Решения системы (3.7) должны удовлетворять условиям:

$$\Phi_{2n,m,k}\Big|_{z=0,\alpha}=Y_{2n,m,k}^{A,B};\quad \Psi_{2n+1,m,k}\Big|_{z=0,\alpha}=Y_{2n+1,m,k}^{A,B};\tag{5.6}$$

где Y_{nmk}^{AB} – вещественные числа, зависящие от $\Phi_{n'm'},\Psi_{n'm'}$ с $(n',m')<(n,m)$. Система (3.7) с краевыми условиями (5.6) однозначно разрешима, если выполнено арифметическое условие § I.

В качестве $\Phi_{2n,M_{2n}}$ и $\Psi_{2n+1,M_{2n+1}}$ возьмем линейные функции переменной x с коэффициентами, зависящими от μ и γ. Из краевых условий (5.5) эти коэффициенты определятся однозначно. Положим $\Phi_{2n+1,M_{2n+1}}=\Psi_{2n,M_{2n}}=0$. Получившиеся функции удовлетворяют оценкам (2.4).

Из условия (5.4) определяется число $k=k_{pq}$. Подставляя в левую часть (5.4) найденные в §3 функции, получаем асимптотическую формулу для k_{pq}, равномерную по q в области $0 \leqslant q \leqslant c_0 p^{1-\varepsilon}$:

$$k_{pq} = \frac{1}{d}\left\{\pi p + \left(q+\frac{1}{2}\right)\alpha\right\} + O\left(p^{1-2\varepsilon}\right) + O\left(p^{-1}\right). \qquad (5.7)$$

§ 6. Оценка нормы $\mathcal{U}_{pq}$ снизу.

Используя обозначения и результаты §4, получаем следующую оценку для нормы $\mathcal{U} = \Im m\, v \chi$:

$$\|\mathcal{U}\| \geqslant \left\| \sqrt[4]{k}\, e^{-k\Phi''} \sin k\Phi' \mathcal{D}_q\left(\sqrt{2q+1}\ \psi'\right)\chi \right\| -$$
$$-\mathrm{const} \sum_{n\geqslant 1} \sqrt[4]{k}\,(n!)^{-1} \left\|\mathcal{D}_q^{(n)}\left(\sqrt{2q+1}\ \psi'\right)\right\| \left(\mathrm{const}\ k^{-\frac{1+\varepsilon'}{2}}\right)^n \geqslant \qquad (6.1)$$
$$\geqslant \left\| \sqrt[4]{k}\, e^{-k\Phi''} \sin k\Phi' \mathcal{D}_q\left(\sqrt{2q+1}\ \psi'\right)\chi \right\| - \mathrm{const}\ k^{-\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}}.$$

Для оценки снизу первого члена в правой части (6.1) используем оценку (4.6) для Φ'' и перейдем от координат x, y к координатам $\xi = \Phi'(x,y)$, $\eta = \sqrt{2q+1}\ \psi'(x,y)$. Якобиан $\mathcal{J}$ этой замены переменных удовлетворяет оценке $|\mathcal{J}| \geqslant \mathrm{const}\sqrt{k}$.

Имеем:
$$\left\| \sqrt[4]{k}\, e^{-k\Phi''} \sin k\Phi' \mathcal{D}_q\left(\sqrt{2q+1}\ \psi'\right)\chi \right\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \mathrm{const} \int_0^d \sin^2 k\xi\, d\xi \int_{-\mathrm{const}\, k^{\frac{1-\varepsilon'}{2}}}^{\mathrm{const}\, k^{\frac{1-\varepsilon'}{2}}} \mathcal{D}_q^2(\eta)\, d\eta \geqslant \mathrm{const} > 0. \qquad (6.2)$$

Сравнивая (6.1) и (6.2), получаем требуемую оценку (1.3).

Литература

1. Б а б и ч В.М., Б у л д ы р е в В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., 1972, 456 с.
2. Л а з у т к и н В.Ф. Выпуклый биллиард и собственные функции оператора Лапласа. Л., 1981, 198 с.

Lazutkin V.F., D.Y.Ferman. On the number of quasimodes of the "bouncing ball" type.

New two-scaling expansion for eigenfunctions of "bouncing ball" type and corresponding eigenvalues of Laplacian operator with Dirichlet boundary condition in the region in the plane has been offered. Eigen functions localized in the neighborhood of a stable diameter of the region and are numbered by two natural numbers (p,q), where p - number of knots in longitudinal and q - in perpendicular to the diameter direction.

The truth of this asimptotic expansion is ensured provided $0 \leqslant q \leqslant const\ p^{1-\varepsilon}$ for $\forall \varepsilon > 0$, where $p \to +\infty$.