Доклады Академии наук СССР
1975. Том 224, № 4

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

И. М. ЛЕЙБО

О ЗАМКНУТЫХ ОБРАЗАХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 26 V 1975)

Как известно, существуют три основных размерностных инварианта: $\dim X$, $\operatorname{ind} X$, $\operatorname{Ind} X$. П. С. Урысон доказал равенства $\dim X=\operatorname{ind} X=\operatorname{Ind} X$ в классе компактов; В. Гуревич и Л. А. Тумаркин установили эти же равенства для метрических пространств со счетной базой; М. Катетов ([2]) доказал, что для произвольного метрического пространства X имеет место равенство $\dim X=\operatorname{Ind} X$; Б. А. Пасынков ([3]) показал, что у замкнутого нульмерного в смысле dim нормального прообраза метрического пространства размерности $\dim X$ и $\operatorname{Ind} X$ совпадают.

Пусть дано метрическое пространство X, причем $\dim X\leqslant n$. Тогда ([1]) имеем: $X=\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} X_i$, где $\dim X_i\leqslant 0$, $i=1,\ldots,n+1$. Кроме того, пространство X является образом нульмерного метрического пространства при замкнутом отображении кратности $\leqslant n+1$.

Мы дадим достаточное условие совпадения размерностей $\dim X$ и $\operatorname{Ind} X$ в нормальном пространстве. Это условие позволит расширить класс пространств, для которых справедливо равенство Катетова, а также провести параллель между метрическими пространствами и их замкнутыми образами.

Определение 1. Для пространства Z размерности $\operatorname{Ind} Z=n$ мы будем говорить, что замкнутое множество $F\subseteq Z$ и окрестность OF этого множества определяют размерность Z, если для каждой окрестности UF множества F такой, что $[UF]\subseteq OF$ имеем $\operatorname{Ind} FrUF\geqslant n-1$.

Определение 2. Счетный набор $\varphi=\{F_i,\ OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ замкнутых в пространстве Z множеств F_i и их окрестностей OF_i мы будем называть специальным, если для каждого замкнутого множества $M\subseteq Z$ существует такой номер $i_0=i_0(M)$, что пара $\{M\cap F_{i_0},\ M\cap OF_{i_0}\}$ определяет размерность $\operatorname{Ind} M$.

Определение 3. Непрерывное отображение g: $Y\to Z$ пространства Y, обладающего специальным набором $\varphi=\{F_i,\ OF_i\}_{i=1}^{\infty}$, на метрическое пространство Z мы будем называть специальным относительно набора φ, если выполнены следующие условия:

1) gF_j замкнуто в Z, $j=1,\ 2,\ldots$;

2) существует открытое множество $OgF_j\subseteq Z$ такое, что $g^{-1}OgF_j\subseteq OF_j$ для каждого $j\in N$.

Теорема 1. *Пусть в нормальном пространстве Y существует специальный набор $\varphi=\{F_i,\ OF_i\}_{i=1}^{\infty}$.*

Тогда $\dim Y=\operatorname{Ind} Y$.

Утверждение 1. *Пусть в нормальном пространстве Y существует специальный набор $\bar{\varphi}=\{\Phi_i,\ O\Phi_i\}_{i=1}^{\infty}$.*

Тогда существуют специальный набор $\varphi=\{F_i,\ OF_i\}_{i=1}^{\infty}$, метрическое со счетной базой пространство Z и отображение g: $Y\to Z$ пространства Y на пространство Z, являющееся специальным относительно набора φ.

Доказательство. В силу известной леммы П. С. Урысона для каждого i существует отображение f_i: $Y\to I_i$ такое, что $f_i^{-1}(0)\equiv\Phi_i$,

а $f_i^{-1}([0, 1))\subseteq O\Phi_i$. Обозначим множество $f_i^{-1}(0)$ через F_i, а множество $f_i^{-1}([0, 1))$ через OF_i. Из определения специального набора следует, что набор $\varphi=\{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ тоже будет специальным. Рассмотрим отображение $g=\prod_{i=1}^{\infty} f_i$: $Y\to\prod_{i=1}^{\infty} I_i$, являющееся диагональным произведением ([1]) отображений f_i. Множество gF_j замкнуто в $g(Y)$. Множество $OF_j=f_j^{-1}([0, 1))$ открыто в Y, следовательно, множество $f_j(OF_j)$ открыто в $f_j(Y)$, и поэтому множество $g(OF_j)$ открыто в $g(Y)$. Существование требуемой окрестности OgF_j очевидно. Множество $g(Y)\subseteq\prod_{j=1}^{\infty} I_j$ обозначим через Z. Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Специальное отображение* g: $Y\to Z$ *не понижает размерности* Ind.

Доказательство. Покажем, что из соотношения $\operatorname{Ind} Y\geqslant m$ следует соотношение $\operatorname{Ind} Z\geqslant m$. Будем вести доказательство по индукции. Пусть $\operatorname{Ind} Y\geqslant 0$; ясно, что в этом случае множество $Z\neq\emptyset$ и поэтому $\operatorname{Ind} Z\geqslant 0$. Предположим, что утверждение верно для $\operatorname{Ind} Y\geqslant m-1\geqslant 0$. Покажем, что $\operatorname{Ind} Y\geqslant m\Rightarrow\operatorname{Ind} Z\geqslant m$. В силу определения набора φ существует пара $\{F_{i_0}, OF_{i_0}\}\in\varphi$, определяющая размерность $\operatorname{Ind} Y$. Пусть $A=gF_{i_0}$ и окрестность OA множества A такова, что $g^{-1}OA\subseteq[g^{-1}OA]\subseteq OF_{i_0}$. Рассмотрим окрестность UA множества A такую, что $A\subseteq UA\subseteq[UA]\subseteq OA$. Тогда $g^{-1}\operatorname{Fr} UA\supseteq\operatorname{Fr} g^{-1}UA$, так как отображение g непрерывно. Но $\operatorname{Fr} g^{-1}UA\subseteq\subseteq OF_{i_0}$, отсюда $\operatorname{Ind} g^{-1}\operatorname{Fr} UA\geqslant\operatorname{Ind}\operatorname{Fr} g^{-1}UA\geqslant m-1$. Но тогда по предположению индукции $\operatorname{Ind}\operatorname{Fr} UA\geqslant m-1$, т. е. $\operatorname{Ind} Z\geqslant m$. Утверждение доказано.

Отметим, что если в утверждении 2 фигурирует то же Z, что и в утверждении 1, т. е. $w(Z)\leqslant\aleph_0$, $g^{-1}gF_i=F_i$ для $i\in N$, то g: $M\to gM$ специально относительно $\varphi'=M\wedge\varphi$ для каждого замкнутого $M\subseteq Z$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\operatorname{Ind} Y=n$, и пусть g: $Y\to Z$ — специальное отображение, причем $g^{-1}gF_j=F_j$, $j\in N$. По факторизационной теореме Б. А. Пасынкова существует метрическое пространство R, $w(R)\leqslant\aleph_0$ и отображения g': $Y\to R$ и h': $R\to Z$ такие, что:

1) $g=h'g'$;
2) $\dim R\leqslant\dim Y$.

Ясно, что в данном случае отображение g' будет специальным относительно того же набора $\varphi=\{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$, что и отображение g. Следовательно, имеем:

1) $\operatorname{Ind} R\geqslant\operatorname{Ind} Y$;
2) $\dim R\leqslant\dim Y$.

Но по теореме Тумаркина и Гуревича $\dim R=\operatorname{Ind}$, отсюда $\operatorname{Ind} Y=\dim Y$. Теорема доказана.

Наличие σ-дискретной базы в метрическом пространстве позволяет без труда построить в этом пространстве специальный набор $\varphi=\{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$. Таким образом, получаем

Следствие 1. *Пусть X — метрическое пространство. Тогда*

$$\dim X=\operatorname{Ind} X.$$

В работе ([4]) показано, что замкнутый образ метрического пространства тоже обладает специальным набором. Поэтому справедливы следующие утверждения.

Следствие 2. *Пусть f: $X\to Y$ — замкнутое отображение метрического пространства X на пространство Y. Тогда* $\dim Y=\operatorname{Ind} Y$.

Следствие 3. *Пусть f: $X\to Y$ — замкнутое отображение метрического со счетной базой пространства X на пространство Y. Тогда* $\dim Y=\operatorname{ind} Y=\operatorname{Ind} Y$.

Наличие специального набора $\varphi=\{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ замкнутых множеств F_i и их окрестностей OF_i, $i=1, 2,\ldots$ в замкнутом образе метрического пространства позволяет следующим образом дать новое доказательство теоремы Б. А. Пасынкова ([3]).

Теорема 2. *Пусть* f: $X \to Y$ — *замкнутое нульмерное в смысле* dim *отображение нормального пространства* X *на замкнутый образ метрического пространства* Y, $\dim Y < \infty$, *и* $\varphi = \{F_i, OF_i\}_{i=1}^{\infty}$ — *специальный набор в пространстве* Y.

Тогда $\varphi^{-1} = f^{-1}\varphi = \{f^{-1}F_i, f^{-1}, OF_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\Phi_i, O\Phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ *специальный набор в* X, *откуда* $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

Следствие 4. *Пусть* Y — *метрическое пространство и* f: $X \to Y$ — *замкнутое нульмерное в смысле* dim *отображение нормального пространства* X *на пространство* Y. *Тогда* $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

Перечисленные выше теоремы и утверждения позволяют провести аналогию между метрическими пространствами и их замкнутыми образами.

Теорема 3. *Пусть* Y — *замкнутый образ метрического пространства и* $\dim Y \leqslant n$, *тогда* $Y = \bigcup_{i=1}^{n+1} Y_i$, *где* $\dim Y_i \leqslant 0$ *для* $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Доказательство. Как было показано выше, существует специальное отображение g: $Y \to Z$, где пространство Z метрическое со счетной базой, причем $\dim Z \leqslant n$, т. е. $Z = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i$, $\dim Z_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Из леммы 1 работы ([4]) следует, что набор $\bar{\varphi}_i = \varphi \wedge g^{-1}Z_i$ будет специальным в $g^{-1}Z_i$. Кроме того, отображение $g_i = g|_{g^{-1}Z_i}$: $g^{-1}Z_i \to Z_i$ будет специальным относительно набора $\bar{\varphi}_i$. Отсюда, в силу утверждения 2, следует, что $\operatorname{Ind} g^{-1}Z_i \leqslant 0$. Обозначим $g^{-1}Z_i$ через Y_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Тогда $Y = \bigcup_{i=1}^{n+1} Y_i$, так как $Z = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i$, и $\dim Y_i \leqslant \operatorname{Ind} Y_i \leqslant 0$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть* Y — *замкнутый образ метрического пространства и* $\dim Y \leqslant n$.

Тогда существует нормальное пространство X^0, $\dim X^0 \leqslant 0$, *и его замкнутое кратности* $\leqslant n+1$ *отображение* f: $X^0 \to Y$ *на пространство* Y.

Следствие 5. *Замкнутый* n-*мерный образ метрического пространства является совершенно* n-*мерным* (*в смысле В. И. Пономарева* ([5])).

Доказательство теоремы 4. Пусть $\bar{Z}^0$ — некоторое нульмерное в смысле dim метрическое пространство со счетной базой. Рассмотрим пространство $Y \times \bar{Z}^0 = X$. Тогда ([1]) пространство X будет совершенно нормальным, а значит, и наследственно нормальным. Пусть g: $Y \to Z$ — специальное отображение пространства Y на метрическое со счетной базой пространство Z, $\dim Z \leqslant n$, причем $g^{-1}gF_i = F_i$ для $i = 1, 2, \ldots$ Отображение g и пространство Z с указанными свойствами существуют в силу утверждения 1 и утверждения 2. Существует ([1]) непрерывное, замкнутое, кратности $\leqslant n+1$ отображение ψ: $Z^0 \to Z$ пространства со счетной базой Z^0 размерности $\dim Z^0 \leqslant 0$ на пространство Z.

Рассмотрим веерное произведение ([1]) пространств Y и Z^0 относительно отображений g и ψ, обозначим его через X^0. Пространство X^0 нормально. Возникают ([1]) отображения p_2: $X^0 \to Z^0$ и p_1: $X^0 \to Y$ такие, что $\psi p_2 = g p_1$. Более того, отображение p_1: $X^0 \to Y$ будет замкнутым, непрерывным и кратности $\leqslant n+1$. В силу утверждения 1 в Y существует такой специальный набор $\varphi = \{F_i, OF_i\}$, что $g^{-1}gF_i = F_i$. Тогда в силу теоремы 2 в пространстве X^0 имеется специальный набор $\varphi^{-1} = \{p_1^{-1}F_i, p_1^{-1}OF_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\Phi_i, O\Phi_i\}_{i=1}^{\infty}$, где $\Phi_i = p_1^{-1}F_i$ и $O\Phi_i = p_1^{-1}OF_i$. Отсюда в силу теоремы 1 получаем, что $\dim X^0 = \operatorname{Ind} X^0$. Покажем, что отображение p_2: $X^0 \to Z^0$ будет специальным относительно набора $\varphi^{-1} = \{\Phi_i, O\Phi_i\}_{i=1}^{\infty}$. Напомним, что $g^{-1}gF_i = F_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда $p_2\Phi_i = \psi^{-1}gF_i$, но множество gF_i замкнуто в Z, тогда $\psi^{-1}gF_i$ замкнуто в Z^0, т. е. $p_2\Phi_i$ замкнуто в Z^0 для $i = 1, 2, \ldots$ Пусть OgF_i — такая окрестность множества gF_i в Z, что $g^{-1}OgF_i \subseteq OF_i$. Тогда $p_1^{-1}(g^{-1}OgF_i) \subseteq O\Phi_i$ по построению $O\Phi_i$. Рассмотрим множество $\psi^{-1}OgF_i$.

В силу равенства $\psi p_2 = g p_1$ имеем $p_2^{-1}(\psi^{-1} O g F_i) = p_1^{-1}(g^{-1} O g F_i) \subseteq O\Phi_i$, но $\psi^{-1} O g F_i$ открыто в Z^0 и содержит замкнутое множество $p_2 \Phi_i$. Обозначим $\psi^{-1} O g F_i$ через $O p_2 \Phi_i$. Тогда $p_2^{-1} O p_2 \Phi_i \subseteq O\Phi_i$ для $i=1, 2, \ldots$. Таким образом, отображение p_2: $X^0 \to Z^0$ специальное, но тогда в силу утверждения 2 имеем $\operatorname{Ind} X^0 \leqslant 0$ откуда $\dim X^0 \leqslant \operatorname{Ind} X^0 \leqslant 0$. Теорема 4 доказана.

Теорема 1 позволяет нам расширить класс пространств, обладающих равенством Катетова $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

Теорема 5. *Пусть* $Z = \prod_{i=1}^{k} X_i$, *где* X_i — *замкнутый образ метрического пространства*, $i=1, 2, \ldots, k$, *и пусть* $Z_1 \subseteq Z$.

Тогда $\dim Z_1 = \operatorname{Ind} Z_1$.

Кроме того, в условиях теоремы 5 справедлива

Теорема 6. *Пусть* $\dim Z = n$, *тогда* $Z = \bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i$, *где* $\dim Z_i \leqslant 0$ *для* $i=1, 2, \ldots, n+1$.

Теорема 7. *Пусть* $Z = \prod_{i=1}^{k} X_i$, *где* X_i — *замкнутый образ метрического пространства*, $i=1, \ldots, k$, *и пусть* $Z_1 \subseteq Z$, $\dim Z_1 \leqslant n$.

Тогда существует нормальное пространство X^0, $\dim X^0 \leqslant 0$, *и замкнутое непрерывное отображение* f: $X^0 \to Z_1$ *кратности* $\leqslant n+1$ *пространства* X^0 *на пространство* Z_1.

Теорема 8. *Пусть* $Z = \prod_{i=1}^{k} X_i$, *где* X_i — *замкнутый образ метрического пространства*, $i=1, \ldots, k$, $\dim Z < \infty$, *и пусть* $Z_1 \subseteq Z$. *Пусть* f: $X \to Z_1$ — *замкнутое нульмерное в смысле* $\dim$ *отображение нормального пространства* X *на* Z_1.

Тогда $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

В заключение мне приятно выразить благодарность проф. Б. А. Пасынкову за постоянную помощь и внимание к работе.

Поступило
9 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. С. Александров, Б. А. Пасынков*, Введение в теорию размерности, М., 1973. [2] *М. Катетов*, ДАН, т. 79, № 2 (1951). [3] *Б. А. Пасынков*, Сибирск. матем. журн., т. 5, № 2 (1964). [4] *И. М. Лейбо*, ДАН, т. 216, № 3 (1974). [5] *В. И. Пономарев*, Матем. сб., т. 60, № 1 (1963).