© В.П. СМЫШЛЯЕВ

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ОБЛАСТИ С КОНИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 4 VII 1988)

0. Цель работы – построение высокочастотной асимптотики функции Грина уравнения Гельмгольца для границ, содержащих конические точки. Благодаря соображениям локальности достаточно рассмотреть случай, когда граница – конус. Дадим математическую формулировку задачи.

Пусть N – замыкание односвязной подобласти единичной двумерной сферы S^2 с гладкой границей ∂N (на самом деле наши построения можно перенести на случай кусочно-гладкой границы, см. п. 3). Искомая функция Грина $G(\bar{r}, \bar{r}_0)$ в конической области $\mathbf{R}^+ \times N$, $\bar{r} = (r, x)$, $r \in \mathbf{R}^+$, $x \in N$, снабженной метрикой $dr^2 + r^2\theta$ (здесь θ – метрика на N, индуцированная метрикой сферы S^2), должна удовлетворять следующим соотношениям:

$$(1) \qquad (\Delta + k^2) G(\bar{r}, \bar{r}_0) = -\delta(\bar{r} - \bar{r}_0),$$

$$(2) \qquad G|_{\mathbf{R}^+ \times \partial N} = 0 \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\mathbf{R}^+ \times \partial N} = 0,$$

$$(3) \qquad G = O(r^{-1}), \quad (\partial_r - ik) G = o(r^{-1}), \quad r \to \infty,$$

$$(4) \qquad \int_{\Omega_r} (|G|^2 + |\nabla G|^2)\, d\bar{r} = o(1), \quad r \to 0; \quad \Omega_r = \{(r', x):\ x \in N, r' < r\}.$$

Последние годы отмечены серьезным прогрессом в изучении сингулярностей функции Грина соответствующей нестационарной задачи (см. [1–3]), в основе которого – идеи [4] сведения посредством преобразования Ханкеля исходной задачи к задаче об описании функций от оператора Лапласа на римановом многообразии N. Эти идеи оказываются весьма плодотворными для качественного и количественного описания волновых фронтов (см. особенно [1]). Однако непосредственное их перенесение, в частности резлультатов работы [1], на стационарную ситуацию (в высокочастотном приближении) связано с рядом трудностей (в частности, требует исследований о локальном убывании энергии в духе [5] вблизи конических точек).

С другой стороны, в случае точно решаемых задач, прежде всего задачи о дифракции на круговом конусе, для построения высокочастотных асимптотик хорошо себя зарекомендовал подход, связанный с преобразованием Ватсона [6] – заменой ряда, возникающего в результате разделения переменных, конурным (ватсоновским) интегралом и дальнейшим его исследованием методом стационарной фазы (см., например, [7–9]).

В настоящей работе показывается, что аналог ватсоновского интеграла может быть построен и исследован независимо от того, допускает задача полное разделение переменных или нет. Центральным моментом является преобразование контурного интеграла к интегралу по вещественной полуоси, содержащему нестационарную функцию Грина на двумерном римановом многообразии N.

1. Оператор Лапласа Δ, фигурирующий в (1), в переменных (r, x) может быть записан в виде

$$\Delta = \partial_r^2 + 2/r\, \partial_r + 1/r^2\, \tilde{\Delta},$$

где $\tilde{\Delta}$ – оператор Лапласа на N с краевым условием Дирихле (Неймана) на ∂N. Очевидно, $\tilde{\Delta}$ – самосопряженный оператор в $L^2(N)$ со стандартной мерой на N. Спектр оператора $\tilde{\Delta}$ дискретный и неотрицательный.

Лемма 1. *Функция Грина G имеет следующее интегральное представление*:

$$(5)\qquad G(r,x;r_0,x_0)=c(rr_0)^{-1/2}\int_\gamma J_\nu(kr_<)H_\nu^{(1)}(kr_>)g(x,x_0,\nu)\nu\,d\nu,$$

где $c=\mathrm{const}$, $r_<=\min\{r,r_0\}$, $r_>=\max\{r,r_0\}$; $J_\nu, H_\nu^{(1)}$ – *функция Бесселя и Ханкеля 1-го рода*; g – *стационарная функция Грина на* N:

$$(\tilde{\Delta}-\tfrac{1}{4}+\nu^2)g=\delta(x-x_0),$$

$$g|_{\partial N}=0 \quad \textit{или} \quad \partial g/\partial n|_{\partial N}=0,$$

$$\gamma=(-i\epsilon+\infty,\ -i\epsilon]\cup[-i\epsilon,i\epsilon]\cup[i\epsilon,i\epsilon+\infty).$$

Формула (5) получается в результате представления G в виде свертки функций Грина, отвечающих переменным r и x, и ряда оценок, обеспечивающих сходимость интеграла. Введенная функция g – мероморфная функция в правой полуплоскости комплексного переменного ν с полюсами $\tfrac{1}{2}\geqslant\nu_1\geqslant\nu_2\geqslant\ldots,\ \nu_n\to+\infty$.

Рассмотрим нестационарную функцию Грина $\tilde{\Gamma}(x,x_0,s)$:

$$(\partial_s^2-\tilde{\Delta}+\tfrac{1}{4})\tilde{\Gamma}=0,\qquad s>0,$$

$$\tilde{\Gamma}|_{\partial N}=0\quad(\text{или}\quad \partial\tilde{\Gamma}/\partial n|_{\partial N}=0),$$

$$\Gamma|_{s=0}=0,\qquad \tilde{\Gamma}_s|_{s=0}=\delta(x-x_0).$$

Лемма 2. *Функции g и $\tilde{\Gamma}$ связаны соотношениями*

$$(6)\qquad g(x,x_0,\nu)=(2\pi)^{-1/2}\int_0^{+\infty}e^{\pm i\nu s}\tilde{\Gamma}(x,x_0,s)\,ds,\qquad \operatorname{Im}\nu\gtrless 0.$$

Доказательство основано на оценках для соболевских норм функции $\tilde{\Gamma}$.

Пусть $\Gamma(x,x_0,s)=\partial/\partial s\tilde{\Gamma}(x,x_0,s)$; комбинация формул (5) и (6) (можно обосновать корректность замены порядка интегрирования) дает следующее важное для нас утверждение:

Теорема 3. *Справедливо следующее представление функции Грина $G(\bar{r},\bar{r}_0)$ – решения задачи* (1)–(4):

$$(7)\qquad G(\bar{r},\bar{r}_0)=ic(rr_0)^{-1/2}k\int_0^\infty\Gamma(x,x_0,s)h(k,r,r_0,s)\,ds,$$

где $h=\int_0^\infty\cos k\nu s J_{k\nu}(kr_<)H_{k\nu}^{(1)}(kr_>)\,d\nu$, $c=\mathrm{const}$.

2. Точная формула (7), как оказывается, содержит богатую информацию о высокочастотной дифракции на конусе. С помощью тождеств

$$\cos\alpha=(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})/2,\quad J_\mu=(H_\mu^{(1)}+H_\mu^{(2)})/2$$

функция разбивается на четыре слагаемых, каждое из которых исследуется методом перевала после замены функций Ханкеля на дебаевские асимптотики. При этом контур можно так деформировать в плоскости ν, что вклад в асимптотику h при $k\to\infty$ будут вносить окрестность $\nu=0$ и окрестность стационарной точки $\nu_0(s)$, если таковая имеется. Отдельное исследование показывает следующее.

а) Если $s>\pi$, стационарных точек нет.

б) При $0<s<\pi$ одно из 4 слагаемых, входящих в h, имеет стационарную точку $\nu_0(s)$, определяемую из уравнений

$$s=\arccos \nu/r_> - \arccos \nu/r_< \quad \text{при} \quad 0<s<\arccos r_</r_>,$$
$$s=\arccos \nu/r_> + \arccos \nu/r_< \quad \text{при} \quad \arccos r_</r_> <s<\pi,$$

и окрестность точки $\nu_0(s)$ дает вклад в h:

$$(8)\qquad h(k,r,r_0,s;\ \nu_0)=ck^{-3/2}(f(s))^{-1/2}\exp(ikf(s))(1+O(k^{-1})),$$

где $f(s)=(r^2+r_0^2-2rr_0\cos s)^{1/2}$ – стационарная фаза.

в) При s, близком к π, $\nu_0(s)\to 0$ и происходит слияние стационарных точек. Как обычно в таких случаях [14], асимптотика описывается в погранслойных координатах $\xi=(s-\pi)k^{1/2}$ через функции Френеля F:

$$h\ (k,r,r_0,s)=c(rr_0)^{-1/2}e^{ik(r+r_0)-i\xi^2/2R^2}\,k^{-3/2}F(\xi/R)(1+O(k^{-1/2})),$$
$$R=r^{-1}+r_0^{-1}.$$

г) Окрестность $\nu=0$ при $\epsilon<s<\pi-\epsilon$, $\quad s>\pi+\epsilon$ дает вклад

$$h(k,r,r_0,s;\ 0)=c(rr_0)^{-1/2}e^{ik(r+r_0)}k^{-2}\frac{1}{s^2-\pi^2}(1+O(k^{-1})).$$

Обращаясь к интегралу (7), замечаем, что окрестность точки $s=s_0$ может давать вклад в асимптотику функции G при $k\to\infty$ по двум причинам.

1) Функция $\Gamma(x,x_0,s)$ в точке $s=s_0$ претерпевает разрыв. Множество точек разрыва описывается известными теоремами о распространении сингулярностей [10–12]. Если $0<s_0<\pi$, то можно показать, что вклад окрестности точки s_0 дает асимптотику падающей или отраженной боковой поверхностью волны.

2) Точка s – стационарная точка функции h (из (8) видно, что в этом случае $s=0$ или $s=\pi$; если $x\neq x_0$, то в силу конечной скорости распространения, окрестность точки $s=0$ не будет давать вклада в асимптотику G). Тогда, если $\Gamma(x,x_0,s)$ гладкая в окрестности $s=\pi$, метод стационарной фазы даст дифрагированную вершиной конуса волну:

$$(9)\qquad G_{\text{диф}}(r,x,r_0,x_0)=c\,\frac{e^{ik(r+r_0)}}{krr_0}\,(\mathcal{K}_{e^{-i\pi A}}(x,x_0)+O(k^{-1})).$$

Здесь $A=(-\tilde{\Delta}+1/4)^{1/2}$ – положительный, самосопряженный оператор в $L^2(N)$, $\mathcal{K}_{e^{-i\pi A}}(x,x_0)=e^{-i\pi A}\delta(x-x_0)$ – ядро Пуассона оператора A в точке $s=\pi$ (играющее роль амплитуды рассеяния). Поскольку $e^{-i\pi A}=\cos\pi A-i\sin\pi A$, то

$$\mathcal{K}_{e^{-i\pi A}}(x,x_0)=\Gamma(x,x_0,\pi)-i\,\mathcal{K}_{\sin\pi A}(x,x_0).$$

В силу конечной скорости распространения для Γ и того, что $\Gamma(x,x_0,\pi)=0$, когда $N=S^2$, справедливо $\Gamma(x,x_0,\pi)=0$ для $\theta_1(x,x_0)>\pi$, где $\theta_1(x,x_0)=\inf\limits_{x'\in\partial N}(\theta(x_0,x')+\theta(x',x))$, т.е. формула (9) принимает разный вид в областях $\theta_1(x,x_0)>\pi$ и $\theta_1(x,x_0)<\pi$, чего естественно было ожидать, так как разделяющее их множество $\{x;\ \theta_1(x,x_0)=\pi\}$ относится к зоне полутени.

Заметим, что для задач, допускающих точное решение (круговой конус, эллиптический конус [13]), можно получить явные формулы для амплитуды рассеяния в виде интегралов, содержащих соответствующие специальные функции.

В полутеневых областях (т.е. вблизи тех точек, где $\Gamma(x,x_0,\pi)$ терпит разрыв) формула (9) перестает описывать асимптотику волнового поля. Однако с помощью метода пограничного слоя в ряде случаев в указанных областях можно построить соответствующую асимптотику.

Пусть точка $x_1 \in \partial N$ есть результат трансверсального отражения от границы ∂N луча, выпущенного из x_0, и эйконал τ вдоль данного луча в x_1 равен π. Тогда в окрестности точки x_1 можно ввести лучевую систему координат (τ, ψ) (см. [14]). При этом функция Γ имеет при $\tau = s$ разрыв следующего вида:

$$\Gamma(x(\psi,\tau),x_0,s) = \begin{cases} \Gamma_0, & \tau > s, \\ \Gamma_0 + \dfrac{Q(\psi,\tau,s)}{(s-\tau)^{3/2}}, & \tau < s. \end{cases}$$

Здесь Γ_0, Q – гладкие функции. Вводя растянутую переменную $(\tau - \pi)k^{1/2} = \eta$, получим

$$G_{\text{диф}}(x(\psi,\tau),x_0, s) = ce^{ik(r+r_0)}(rr_0)^{-1}k^{1/4}Q(\psi,\pi,\pi)D_{-3/2}(e^{-i\pi/4}R^{-1/2}\eta),$$

где $D_{-3/2}$ – функция параболического цилиндра. Отметим, что амплитуда $Q(\psi, \pi, \pi)$, равно как и коэффициенты следующих членов асимптотики, может быть вычислена лучевым методом.

3. Отдельный интерес представляют ситуации, в которых граница ∂N не гладкая, но кусочно-гладкая. Точнее, потребуем следующее: пусть ∂N гладкая всюду, за исключением точек $p_1, \ldots, p_l$, и в окрестности каждой точки p_j ∂N есть часть трансверсального пересечения двух гладких кривых на сфере S^2. Поскольку при этом боковая поверхность конуса будет содержать ребра, условия (1)–(4) нужно дополнить условием на ребре, аналогичным условию Мейкснера (4). В этой ситуации среди разрывов функции $\Gamma(x, x_0, s)$ будут и такие, что образовались в результате дифракции на точке излома границы ∂N. Если вблизи p_j граница есть объединение двух геодезических сферы S^2, то по соображениям локальности разрыва функции Γ можно вычислить (см. [1], пример 4.5). Существуют приемы (см., например, [15]), позволяющие снять условие геодезичности при асимптотическом описании разрывов решения нестационарной задачи. Соответствующие формулы не приводятся из-за недостатка места.

Замечание 1. Изложенная схема без каких-либо существенных изменений может быть приспособлена к случаю риманова многообразия N^m размерности m, рассматриваемому в [1–4].

Замечание 2. В целях упрощения формул нами приведены лишь главные члены асимптотик, хотя предложенная схема позволяет строить полные асимптотические разложения.

Математический институт им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР, Ленинград

Поступило
24 VIII 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cheeger J., Taylor M.* – Comm. Pure and Appl. Math., 1982, vol. 35, p. 275–331, 487–529. 2. *Rouleux M.* – C.R., 1985, vol. 300, sér. 1, № 1, p. 1–4. 3. *Rouleux M.* – Comm. in Part. Diff. Eq., 1986, vol. 11, № 9, p. 947–988. 4. *Cheeger J.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1979, vol. 76, № 5, p. 2103–2106. 5. *Lax P.D., Morawetz C., Phillips R.* – Comm. Pure and Appl. Math., 1963, vol. 16, p. 477–486. 6. *Watson G.N.* – Proc. London Math. Soc., 1933, vol. 35, p. 156–199. 7. *Felsen L.B.* – IEEE Trans. Antennas and Propag., 1957, vol. 5, p. 402–404. 8. *Николаев Б.Г.* – Зап. научн. симин. ЛОМИ, 1974, т. 42, с. 212–227. 9. *Bowman J., Senior T., Uslenghi P.* Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes. Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1969. 728 p. 10. *Иврий В.Я.* – Сиб. матем. журн., 1980, т. 21, № 4, с. 62–71. 11. *Melrose R.B., Sjöstrand J.* – Comm. Pure and Appl. Math., 1978, vol. 31, p. 593–617; 1982, vol. 35, p. 129–168. 12. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. М.: Мир, 1987, т. 3. 694 с. 13. *Kraus L., Levin L.* – Comm. Pure and Appl. Math., 1961, vol. 14, p. 49–68. 14. *Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я.* Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 124 с. 15. *Боровиков В.А.* Краевые волны в задаче дифракции на криволинейной поверхности с ребром. Препринт ИПМ АН СССР, 1973, № 63. 64 с.