А. А. Боровков, Д. А. Коршунов, Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 1. Стационарные распределения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 1, 3–30

DOI: 10.4213/tvp2769

Том 41 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ 1996 Выпуск 1

 БОРОВКОВ А. А., *КОРШУНОВ Д. А.**

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА. ЧАСТЬ 1. СТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ[1)]

Рассматриваются однородные во времени и асимптотически однородные в пространстве цепи Маркова со значениями на вещественной оси, имеющие инвариантную меру. Такая мера всегда существует, если цепь эргодична. В работе продолжено изучение асимптотических свойств $\pi([x,\infty))$ при $x \to \infty$ для инвариантной меры π, начатое в [2], [3], [5]. В этих работах изучались главным образом ситуации, приводящие к чисто экспоненциальному убыванию $\pi([x,\infty))$. В предлагаемой работе рассмотрены два оставшихся альтернативных варианта: случай «степенного» убывания $\pi([x,\infty))$ и «смешанный» случай, когда $\pi([x,\infty))$ асимптотически ведет себя как $l(x)e^{-\beta x}$, где $l(x)$ — правильно меняющаяся на бесконечности интегрируемая функция и $\beta > 0$.

Ключевые слова и фразы: цепь Маркова, инвариантная мера, грубая и точная асимптотики вероятностей больших уклонений.

§ 1. Введение

Пусть $X(n) = X(y,n) \in \mathbf{R}$, $n = 0,1,\ldots,$ — однородная во времени цепь Маркова с начальным значением $X(y,0) = y \in \mathbf{R}$ и переходной вероятностью $P(y,B) = P(y,1,B)$, $P(y,n,B) = \mathbf{P}\{X(y,n) \in B\}$, $n \geqslant 1$, $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, где $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ есть σ-алгебра борелевских множеств на прямой. В первых и последних параграфах статьи (§§ 1, 2, 8 и 9) мы будем предполагать, что рассматриваемые цепи обладают свойством асимптотической однородности в пространстве, т.е. свойством слабой сходимости распределений $P(y,y+B)$ при $y \to \infty$ к некоторому распределению $F(B)$. Если обозначить через $\xi(y) = X(y,1) - y$ приращение цепи за один шаг и через ξ — случайную величину с распределением $F(B)$, то названное выше свойство означает слабую сходимость распределения $\xi(y)$ при $y \to \infty$ к распределению ξ.

---

*Институт математики им. С. Л. Соболева, Университетский пр. 4, 630090 Новосибирск, Россия.

1)Работа выполнена при частичной поддержке грантами Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93-01-01416) и Международного научного фонда (Grant No. RAC000, 1994).

Далее, мы будем предполагать в первой части работы, что существует вероятностная инвариантная мера $\pi(\cdot)$ (не единственная, вообще говоря), т.е. мера, удовлетворяющая уравнению

$$\pi(B) = \int_{\mathbf{R}} \pi(du)\, P(u, B), \qquad \pi(\mathbf{R}) = 1. \tag{1.1}$$

Основным объектом изучения в первой части статьи будет асимптотическое поведение $\pi(x) = \pi([x, \infty))$ при $x \to \infty$. Во второй части будет изучаться асимптотика $P(x_0, n, [x, \infty))$ при $x \to \infty$.

Для упрощения изложения мы будем ограничиваться, как правило, рассмотрением цепей, принимающих значения на положительной полуоси. Как будет видно из дальнейшего (см. также [3, §23]), изучение больших уклонений для π в общем случае может быть сведено к случаю $X(n) \geqslant 0$.

Так как инвариантная мера π всегда существует, если цепь эргодична, то она будет существовать, если $\mathbf{E}\xi < 0$, а неотрицательная цепь $X(n)$ является харрисовой (см., например, [13], [3]). В первой части статьи условие $\mathbf{E}\xi < 0$ будет всюду предполагаться выполненным. При этом случай $\mathbf{E}\xi = -\infty$ не исключается, если противное специально не оговорено.

Если пытаться весьма грубо характеризовать возможное асимптотическое поведение $\pi([x, \infty))$, то можно выделить следующие три основных случая.

Обозначим $\pi(x) = \pi([x, \infty))$,

$$\varphi(\mu) = \mathbf{E}e^{\mu\xi}, \qquad \mu_+ = \sup\{\mu \geqslant 0\colon \varphi(\mu) < \infty\}, \tag{1.2}$$

$$F(t) \equiv F([t, \infty)) = \mathbf{P}\{\xi \geqslant t\}, \quad G(t) = \int_t^\infty F(u)\, du, \tag{1.3}$$

и будем писать $f(y) \sim g(y)$ при $y \to \infty$, если существует

$$\lim_{y \to \infty} \frac{f(y)}{g(y)} = 1.$$

Функции $F(t)$ и $G(t)$ иногда называют соответственно «хвостом» и «двойным хвостом» распределения ξ.

1) $\mu_+ > 0$, $\varphi(\mu_+) > 1$ (разрешается также возможность $\varphi(\mu_+) = 1$, $\varphi'(\mu_+) < \infty$; напомним, что предположение $\mathbf{E}\xi < 0$ влечет за собой отрицательность $\varphi(\mu) - 1$ при малых μ). В этом случае при выполнении некоторых дополнительных, весьма широких, условий относительно распределений $\xi(y)$ при конечных y будет иметь место чисто экспоненциальное убывание $\pi(x) \sim ce^{-\beta x}$, где $\beta > 0$ есть решение уравнения $\varphi(\beta) = 1$, $c = \mathrm{const}$.

2) В остальных случаях ($\mu_+ = 0$ или $\mu_+ > 0$, $\varphi(\mu_+) < 1$)

$$\pi(x) \sim c\, G(x) \tag{1.4}$$

(также при выполнении некоторых дополнительных весьма широких условий; при $\mu_+ > 0$ вместо (1.4) можно писать также $\pi(x) \sim c\mathbf{P}\{\xi \geqslant x\}$).

3) Дополнительные условия, упомянутые выше, состоят главным образом в предположении, что $\mathbf{P}\{\xi(y) \geqslant t\}$ при конечных y убывает с ростом t достаточно быстро (не медленнее, чем некоторая заданная функция, иногда совпадающая с $\mathbf{P}\{\xi \geqslant t\}$). Если же это предположение нарушено, то преобладающее влияние на асимптотику $\pi(x)$ могут оказывать распределения $\xi(y)$ при конечных y, а не распределение ξ (см., например, теорему 2 и ее следствия). В этом случае природа асимптотики $\pi(x)$ может быть весьма сложной.

В [3], [5] для специального класса цепей Маркова, обладающих так называемым свойством частичной однородности (см. ниже) получено явное представление для $\pi(x)$. Это представление дает возможность осуществить асимптотический анализ поведения $\pi(x)$ во всех трех упомянутых выше случаях. В тех же работах весьма полно изучена асимптотика $\pi(x)$ в первом случае.

Основное внимание ниже будет уделено изучению асимптотики $\pi(x)$ во втором и отчасти третьем случаях. При этом для полноты картины мы приведем все основные известные результаты, описывающие асимптотику $\pi(x)$.

С точки зрения приложений можно отметить по крайней мере две области применения полученных результатов.

(a) Во многих приложениях $X(n)$ описывает «нагрузку» некоторой физической системы и необходимо знать вероятность того, что эта нагрузка в стационарном режиме превзойдет некоторый заданный большой уровень x. Это и есть вероятность $\pi(x)$, приближенное значение которой изучается.

(b) Полученные результаты позволяют установить существование «моментов» $\mathbf{E}f(X(n))$ для заданного класса растущих функций f, оперировать этими моментами в разного рода задачах оптимизации и оценивать эти моменты с помощью метода Монте-Карло. Кроме того, если установлено, например, что $\pi(x) \sim cx^{-\alpha}e^{-\beta x}$, где какие-либо из параметров c, α или β в явном виде неизвестны, то с помощью метода Монте-Карло можно оценивать также и эти параметры (см., например, [4, гл. 5, § 5], [6], [9], [14]); при этом для получения более полной информации об оценках полезно знать также следующий член асимптотики $\pi(x)$, т.е. асимптотическое поведение $\pi(x) - cx^{-\alpha}e^{-\beta x}$ при $x \to \infty$ (см. § 9).

С точки зрения математического анализа приводимые ниже результаты относятся к мало исследованной задаче об изучении асимптотических свойств решения уравнения (1.1) при весьма широких предположениях относительно ядра $P(y, \cdot)$. Использованные при этом методы являются в основном вероятностными. Они потребовали разработки новых подходов, которые будут весьма полезными и при исследовании вероятностей больших уклонений для многомерных цепей Маркова.

§ 2. Формулировки основных теорем о вероятностях больших уклонений

2.1. Однородные цепи. Как уже отмечалось, изучение асимптотики $\pi(x)$ для широкого класса цепей было начато в [2], [3], [5]. Напомним для полноты картины и для последующего использования основные результаты. Начнем с наиболее простых *однородных* случайных блужданий с задержкой в нуле, которые хорошо изучены, часто встречаются в приложениях и имеют вид

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+,$$

где $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, распределенных как ξ, $a = \mathbf{E}\xi < 0$; $x^+ = \max(0, x)$. Обозначим

$$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i, \quad S = \sup_{k\geqslant 0} S_k, \quad S^* = \sup_{k\geqslant 1} S_k. \tag{2.1}$$

Инвариантное распределение для однородной цепи существует тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\xi < 0$, и совпадает с распределением S.

Прежде чем сформулировать теорему об асимптотике вероятности $\pi(x) = \mathbf{P}\{S \geqslant x\}$, введем (следуя [2, с. 163, 171]) понятия локально степенной и надстепенной функций.

Определение. Функция $f(y)$ называется *локально степенной*, если для всякого t

$$\frac{f(y+t)}{f(y)} \to 1 \quad \text{при} \quad y \to \infty. \tag{2.2}$$

Локально степенная функция $f(y)$ называется *надстепенной*, если для некоторого $c_0 < \infty$ и для всех y и p, $\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant 1$,

$$\frac{f(py)}{f(y)} \leqslant c_0. \tag{2.3}$$

Если локально степенная функция $f(y)$ не возрастает, то она является надстепенной тогда и только тогда, когда для любого $y \geqslant 0$

$$\frac{f(y/2)}{f(y)} \leqslant c_0 < \infty. \tag{2.4}$$

При рассмотрении решетчатых распределений нам понадобятся те же определения, в которых, однако, y и t пробегают лишь целые значения, а py заменено на целую часть $[py]$.

В обозначениях (1.2) возможны три случая: (a) $\mu_+ > 0$, $\varphi(\mu_+) \geqslant 1$; тогда определен единственный корень $\beta > 0$ уравнения $\varphi(\mu) = 1$, так что $\varphi(\mu) < 1$ при $\mu \in (0, \beta)$; (b) $\mu_+ > 0$, $\varphi(\mu_+) < 1$; тогда положим $\beta = \mu_+$;

(c) $\mu_+ = 0$; в этом случае положим $\beta = 0$. Параметр β можно определить и единообразно следующим образом:

$$\beta = \sup\{\mu \geqslant 0\colon \varphi(\mu) \leqslant 1\}. \tag{2.5}$$

Теорема 1 [2, с. 168, 172]). (a) *Если* $\varphi(\beta) \geqslant 1$ *и* $\varphi'(\beta) = \mathbf{E}\xi e^{\beta\xi} < \infty$, *то*

$$\pi(x) = e^{-\beta x}\bigl(c_1 + o(1)\bigr), \qquad x \to \infty,$$

где $c_1 > 0$ *зависит от распределения* ξ *и известно в явном виде* (см. [2]). *Если* $\varphi(\mu_+) > 1$ *и распределение* ξ *решетчато или содержит положительную абсолютно непрерывную компоненту, то* $o(1)$ *можно заменить на* $o(e^{-\varepsilon x})$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.

(b) *Если* $\beta > 0$, $\varphi(\beta) < 1$ *и функция* $e^{\beta y}G(y)$ *надстепенная* (*т.е. удовлетворяет условиям* (2.2) *и* (2.3)), *то* $\mathbf{E}e^{\beta S} < \infty$ *и*

$$\pi(x) \sim c_2 G(x), \qquad x \to \infty,$$

$c_2 > 0$ *также известно в явном виде* (*см. ниже*).

(c) *Если* $\beta = 0$ *и функция* $G(y)$ — *надстепенная* (*т.е. удовлетворяет условиям* (2.2) *и* (2.4)), *то*

$$\pi(x) = \Bigl(-\frac{1}{\mathbf{E}}\,\xi + o(1)\Bigr)G(x), \qquad x \to \infty.$$

Из теоремы 5 будет следовать, что $c_2 = \beta(1-\varphi(\beta))^{-1}\mathbf{E}e^{\beta S}$.

З а м е ч а н и е 1. Если $X(n)$ принимают лишь целые значения, то переменные x и y в утверждениях (a) и (b) следует брать (как и в нижеследующих теоремах 4, 5) целыми.

З а м е ч а н и е 2. Если $\beta > 0$ и функция $\widetilde{F}(t) \equiv e^{\beta t}F(t)$ — локально степенная (т.е. удовлетворяет условию (2.2)), то

$$G(t) \equiv \int_t^\infty F(u)\,du = \Bigl(\frac{1}{\beta} + o(1)\Bigr)F(t) \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

В частности, в утверждении (b) теоремы можно писать $\pi(x) \sim (1-\varphi(\beta))^{-1}\mathbf{E}e^{\beta S}F(x)$. Это замечание будет доказано в § 8.

Утверждения (b) и (c) теоремы можно обобщить на так называемые субэкспоненциальные распределения F.

О п р е д е л е н и е [7]. Говорим, что распределение $\widehat{F}(\cdot)$ на $[0,\infty)$ *принадлежит классу* $\mathcal{S}(\beta)$, $\beta \geqslant 0$, если функция $e^{\beta t}\widehat{F}([t,\infty))$ — локально степенная, $\widehat{\varphi}(\beta) = \int_0^\infty e^{\beta t}\,\widehat{F}(dt) < \infty$ и $\widehat{F}^{*(2)}([t,\infty)) \sim \widehat{c}\,\widehat{F}([t,\infty))$ при $t \to \infty$ для некоторого $\widehat{c} > 0$, или, что то же, $\mathbf{P}\{\widehat{\xi}_1 + \widehat{\xi}_2 \geqslant t\} \sim \mathbf{P}\{\widehat{\xi}_1 \geqslant t\}$, где $\widehat{\xi}_i$ независимы и имеют распределение $\widehat{F}$.

Функции класса $\mathcal{S}(0)$ называются *субэкспоненциальными*.

Известно (см., например, [7]), что с необходимостью $\widehat{c} = 2\widehat{\varphi}(\beta)$. Из приведенной в § 7 леммы 5 вытекает, что если функция $e^{\beta t}\widehat{F}([t,\infty))$ —

надстепенная и $\widehat{\varphi}(\beta) < \infty$, то распределение $\widehat{F}$ принадлежит классу $\mathcal{S}(\beta)$. Справедлива следующая модификация утверждений (b) и (c) теоремы 1.

Теорема 2А. (b) *Если $\beta > 0$, $\varphi(\beta) < 1$ и распределение случайной величины $\xi I\{\xi \geqslant 0\}$ принадлежит классу $\mathcal{S}(\beta)$, то $\mathbf{E}e^{\beta S} < \infty$ и*

$$\pi(x) \sim c_2 G(x), \qquad x \to \infty.$$

(c) *Если $\beta = 0$ и распределение случайной величины $\xi I\{\xi \geqslant 0\}$ — субэкспоненциальное, то*

$$\pi(x) = \Big(-\frac{1}{\mathbf{E}}\xi + o(1)\Big)G(x), \qquad x \to \infty.$$

Утверждение (c) теоремы можно найти в [18], [7], [8]; утверждение (b) — в [12]. Отметим, что во всех последующих теоремах и леммах, в которых используется условие для той или иной функции быть надстепенной, это условие можно ослабить до условия принадлежности соответствующего распределения классу $\mathcal{S}(\beta)$.

2.2. Частично однородные цепи. Рассмотрим теперь более широкий класс цепей, называемых *почти однородными* (в пространстве). Они принимают значения в $\mathbf{R}^+$ и определяются соотношениями

$$X(n+1) = \begin{cases} (X(n) + \xi_n)^+ & \text{при} \quad X(n) > 0, \\ \eta_n & \text{при} \quad X(n) = 0, \end{cases}$$

где $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ — две независимые между собой последовательности независимых случайных величин, распределенных соответственно как ξ и η, $a = \mathbf{E}\xi < 0$, $\mathbf{E}\eta < \infty$. Обозначим $G^{(H)}(t) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{\eta > t + u\}\,dH(u)$, $t > 0$, где $H(u)$ есть функция восстановления случайной величины χ, равной первой положительной сумме среди $-S_1, -S_2, \dots$. Введем в рассмотрение случайную величину γ, не зависящую от S, с распределением $\mathbf{P}\{\gamma > t\} = G^{(H)}(t)/G^{(H)}(0)$.

Теорема 2 ([3], [5]). *Если $-\infty < \mathbf{E}\xi < 0$, $\mathbf{E}\eta < \infty$, то цепь $X(n)$ эргодична и*

$$\pi(x) = c_3 \mathbf{P}\{S + \gamma \geqslant x\}, \quad x > 0, \qquad \pi(\{0\}) = 1 - c_3,$$

где

$$c_3 = \frac{G^{(H)}(0)}{\mathbf{P}\{S^* < 0\} + G^{(H)}(0)} < 1.$$

Теорема 2 дает явное выражение для $\pi(x)$ и возможность получить весьма полное описание асимптотики $\pi(x)$ в зависимости от асимптотических свойств $\mathbf{P}\{\gamma \geqslant t\}$ и $\mathbf{P}\{S \geqslant t\}$. Справедливо, например, следующее следствие (используем обозначения (2.1) и (2.5)).

Следствие 1 ([3], [5]). (a) *Пусть $\beta > 0$. Если $\varphi(\beta) \geqslant 1$, $\varphi'(\beta) < \infty$ (это выполнено автоматически, если $\varphi(\mu_+) > 1$) и $\mathbf{E}e^{\eta\beta} < \infty$, то*

$$\mathbf{P}\{S \geqslant x\} \sim c_1 e^{-\beta x}, \quad \pi(x) \sim c_3 c_1 e^{-\beta x}.$$

(b) *Если* $\beta > 0$, $\varphi(\beta) < 1$, *функция* $e^{\beta t}G(t)$ — *надстепенная и* $\mathbf{P}\{\eta \geqslant t\} = o(\mathbf{P}\{\xi \geqslant t\})$, *то* $\mathbf{E}e^{\gamma\beta} < \infty$ *и*

$$\pi(x) \sim c_3 c_2 \mathbf{E}e^{\gamma\beta} G(x).$$

(c) *Если* $\beta = 0$, *функция* $G(t)$ — *надстепенная* (*т.е. удовлетворяет условиям* (2.2) *и* (2.4)) *и* $\int_t^\infty \mathbf{P}\{\eta \geqslant u\}\,du = o(G(t))$ *при* $t \to \infty$, *то*

$$\pi(x) \sim \frac{G(x)c_3}{-\mathbf{E}\xi}.$$

Постоянные c_1 *и* c_2 *взяты из теоремы* 1, *а* c_3 — *из теоремы* 2.

В этом утверждении присутствуют ограничения на убывание $\mathbf{P}\{\eta \geqslant t\}$, которые сводят роль η лишь к ее влиянию на постоянный множитель. Приведем одно из альтернативных утверждений, вытекающее из теоремы 2, в котором главную роль играет η (точнее говоря, утверждение (a)–(b) вытекает из теорем 2, 3 и приводимой в § 7 леммы 5; утверждение (c) вытекает из приводимой в § 6 теоремы 10).

Следствие 2 ([3, § 23]). (a)–(b) *Пусть* $\beta > 0$. *Если* $e^{\mu t}\mathbf{P}\{\eta \geqslant t\}$ — *надстепенная функция для некоторого* $\mu \in [0, \beta)$ *и* $\mathbf{E}e^{\mu\eta} < \infty$, *то*

$$\pi(x) \sim c_3 \mathbf{E}e^{\mu S}\mathbf{P}\{\gamma \geqslant x\}.$$

(c) *Пусть* $\beta = 0$. *Если функция* $G_\eta(t) = \int_t^\infty \mathbf{P}\{\eta > u\}\,du$ — *надстепенная и* $G(t) = o(G_\eta(t))$, *то*

$$\pi(x) \sim (1 - c_3)\,\frac{G_\eta(x)}{-\mathbf{E}\xi}.$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и другие типы соотношений между распределениями S и η. Основное правило может быть выражено, грубо говоря, следующим образом. Если $\mathbf{P}\{\gamma \geqslant x\} = o(\mathbf{P}\{S \geqslant x\})$, то асимптотика $\pi(x)$ повторяет с точностью до постоянной асимптотику $\mathbf{P}\{S \geqslant x\}$. Если $\mathbf{P}\{S \geqslant x\} = o(\mathbf{P}\{\gamma \geqslant x\})$, то асимптотика $\pi(x)$ повторяет с точностью до постоянной асимптотику $\mathbf{P}\{\gamma \geqslant x\}$. Это правило можно упростить еще больше, заметив, что для «регулярных» распределений η функции $G^{(H)}(t)$ и $G_\eta(t) = \int_t^\infty \mathbf{P}\{\eta > u\}\,du$ ведут себя асимптотически одинаково (с точностью до постоянного множителя). Поэтому в сформулированном выше правиле функцию $\mathbf{P}\{\gamma \geqslant t\}$ (или $G^{(H)}(t)$) можно заменить на двойной хвост $G_\eta(t)$ распределения η. В случаях (b) и (c) теоремы 1 $\mathbf{P}\{S \geqslant t\} \sim c'G(t)$, $c' = \mathrm{const}$, и определение асимптотики $\pi(x)$ сведется к сравнению двойных хвостов ξ и η. В случае (a) все будет определяться сравнением $G_\eta(t)$ и $e^{-\beta t}$.

Мы привели здесь достаточно полное описание асимптотики $\pi(x)$ для почти однородных цепей потому, что оно по сути сохраняется для значительно более общего класса так называемых *частично однородных* цепей.

Обозначим $\xi(y) = X(y,1) - y$ приращение цепи, выходящей из точки y, за один шаг. Цепь X со значениями в $\mathbf{R}$ называется N-*частично однородной* (или просто частично однородной), если при $y \in (N, \infty)$ и $y + B \subset (N, \infty)$ распределение $P(y, y + B) = F(B)$ от y не зависит. Случайную величину с распределением $F(\cdot)$ обозначим ξ. Почти однородное блуждание является 0-частично однородным. При $y \leqslant N$ распределение $\xi(y)$ может быть любым.

Введем в рассмотрение «укрупненную» (или «усредненную») цепь $X^{(N)}$ со значениями в $[N, \infty)$, для которой состояние $\{N\}$ «соответствует» области $(-\infty, N]$ для цепи X. Определим переходные вероятности $P^{(N)}(y, B)$ цепи $X^{(N)}$ соотношениями

$$\begin{aligned}
P^{(N)}(y, B) &= P(y, B) \quad \text{при} \quad y > N, \quad B \subset (N, \infty), \\
P^{(N)}(y, \{N\}) &= P\big(y, (-\infty, N]\big) \quad \text{при} \quad y > N, \\
P^{(N)}(N, B) &= \int_{-\infty}^{N} \frac{\pi(dy)}{\pi((-\infty, N])} P(y, B) \quad \text{при} \quad B \subset (N, \infty), \\
P^{(N)}(N, \{N\}) &= 1 - P^{(N)}\big(N, (N, \infty)\big).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Нетрудно видеть (см. также [3, § 23], [11, § 7]), что новая цепь $X^{(N)}$ обладает тем свойством, что для нее существует инвариантная мера $\pi^{(N)}$, совпадающая в области (N, ∞) с π. Таким образом, с точки зрения изучения асимптотических свойств $\pi(x)$ при $x \to \infty$ цепи X и $X^{(N)}$ эквивалентны.

Если цепь X N-частично однородна, то цепь $X^{(N)} - N$ является почти однородной (0-частично однородной) и к ней применимы теорема 2 и следствия 1, 2, где под $\eta \geqslant 0$ надо понимать случайную величину с распределением

$$\mathbf{P}\{\eta \geqslant t\} = \int_{-\infty}^{N} \frac{\pi(du)}{\pi((-\infty, N])} \mathbf{P}\big\{u + \xi(u) \geqslant N + t\big\}, \qquad t > 0.$$

Поэтому если, например, выполнены условия следствия 1(а) на величину ξ и

$$\sup_{y \leqslant N} \mathbf{E} e^{(y+\xi(y))\beta} < \infty,$$

то условия этого следствия будут выполнены и для η (применительно к цепи $X^{(N)} - N$), и, стало быть,

$$\pi(x) \sim c_3 c_1 e^{-\beta(x-N)}.$$

Сказанное выше позволяет считать проблему асимптотического анализа $\pi(x)$ для частично однородных цепей исследованной достаточно полно.

Отметим также, что для осциллирующего случайного блуждания (которое является 0-частично однородным) распределения η, π и константу c для «укрупненной» цепи $X^{(0)}$ удается подсчитать в явном виде (см. [4]).

2.3. Асимптотически однородные цепи. Более сложным объектом изучения являются *асимптотически однородные* цепи, т.е. цепи, для которых известно лишь, что распределение $\xi(y)$ слабо сходится при $y \to \infty$ к распределению случайной величины ξ. Этот факт мы будем записывать в виде $\xi(y) \Rightarrow \xi$ при $y \to \infty$. Здесь разнообразие асимптотик $\pi(x)$ может быть бо́льшим. Однако при введении ряда естественных ограничений картина в целом будет аналогична тому, что получено в следствиях 1 и 2.

Остановимся сначала на грубой асимптотике. Как и ранее, обозначим $\beta = \sup\{\mu \geqslant 0\colon \varphi(\mu) \leqslant 1\}$.

Теорема 3 ([3], [5]). *Пусть $\xi(y) \Rightarrow \xi$ при $y \to \infty$ и $\sup_y \mathbf{E}e^{\beta\xi(y)} < \infty$. Тогда*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln \pi(x)}{x} = -\beta.$$

Из теоремы следует выполнение принципа больших уклонений (см., например, [17, с. 3]) с функцией уклонений $I(t) = -\beta t$.

Изучение точной асимптотики $\pi(x)$ требует более жестких условий. Здесь до настоящего времени был рассмотрен лишь крамеровский случай, т.е. случай, когда существует $\beta > 0$ такое, что $\varphi(\beta) = 1$.

Теорема 4 ([3], [5]). *Пусть $\varphi(\beta) = 1$, $\varphi'(\beta) = \mathbf{E}\xi e^{\beta\xi} < \infty$,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta t}\Big|\mathbf{P}\big\{\xi(y) < t\big\} - \mathbf{P}\{\xi < t\}\Big|\, dt \leqslant l(y), \tag{2.7}$$

где $l(y)$ — правильно меняющаяся на бесконечности функция с показателем $-\alpha$, т.е. $l(uy) \sim u^{-\alpha} l(y)$ при $y \to \infty$ и любом фиксированном $u > 0$. Пусть, далее,

$$\int_0^{\infty} l(y)\, dy < \infty \tag{2.8}$$

(так что $\alpha \geqslant 1$). Тогда

$$\pi(x) = e^{-\beta x}\big(c_4 + o(1)\big), \qquad 0 \leqslant c_4 < \infty, \quad x \to \infty. \tag{2.9}$$

Если, кроме того, при всех y

$$\pi(y) > 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\, e^{\beta\xi(y)} \geqslant 1 - \gamma(y), \tag{2.10}$$

где

$$\gamma(y) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \int_1^{\infty} \gamma(y)\, y(\ln y)\, dy < \infty,$$

то $c_4 > 0$.

Замечание 3. При невыполнении (2.7) асимптотика $\pi(x)$, как показывает следствие 2, может быть существенно иной. Нарушение

(2.7), состоящее, например, в том, что $\mathbf{E}e^{\beta\xi(y)} = \infty$, $y \leqslant y_0$, означает, что убывание $\mathbf{P}\{\xi(y) \geqslant t\}$ при $t \to \infty$ и $y \leqslant y_0$ происходит гораздо медленнее, чем убывание $\mathbf{P}\{\xi \geqslant t\}$. В этом случае основной вклад в асимптотику $\pi(x)$ будет вносить $\mathbf{P}\{\xi(y) \geqslant t\}$, $y \leqslant y_0$, а саму асимптотику можно оценивать с помощью построения близких между собой мажорант $\xi_+ \geqslant_{\rm st} \xi(y)$ и минорант $\xi_- \leqslant_{\rm st} \xi(y)$ при достаточно больших y, $\mathbf{E}\xi_+ < 0$, и вслед за этим построения частично однородных цепей X_+ и X_-, соответственно мажорирующих и минорирующих исходную цепь X.

З а м е ч а н и е 4. Условие (2.8) близко к необходимому, о чем свидетельствует следующий пример. Пусть цепь X принимает значения в $\mathbf{Z}^+ = \{0,1,2,\ldots\}$ и $\mathbf{P}\{\xi(x) = -1\} = (1+\delta+l(x))/2$, $\mathbf{P}\{\xi(x) = 1\} = (1-\delta-l(x))/2$, $x \in \mathbf{Z}^+$, $\delta > 0$, $l(x) \downarrow 0$. Тогда $\beta = \ln(1+\delta)/(1-\delta)$ и, как следует из вычислений ([10, с. 79], [11, с. 98]),

$$\pi(\{x\}) \sim c_5 e^{-\beta x} \exp\left\{-c_6 \sum_{k=1}^{x} l(k)\right\}$$

для некоторых $c_5, c_6 > 0$. В случае, когда нарушено условие (2.8), т.е. $\sum l(x) = \infty$, асимптотика $\pi(\{x\})$ отличается от $e^{-\beta x}$.

З а м е ч а н и е 5. Вопрос о существенности условия (2.10) остается открытым.

Остаются не рассмотренными две возможности $\varphi(\beta) < 1$ и $\beta = 0$.

Рассмотрим сначала случай $\varphi(\beta) < 1$. В этом случае $\beta = \mu_+ > 0$. Положим $\widetilde{F}(y) = e^{\beta y}\mathbf{P}\{\xi \geqslant y\}$.

Теорема 5. *Пусть* $\beta > 0$, $\varphi(\beta) < 1$, *функция* $\widetilde{F}$ *является надстепенной (т.е. удовлетворяет условиям* (2.2) *и* (2.3)) *и*

$$\Big|\mathbf{P}\{\xi(y) \geqslant t\} - \mathbf{P}\{\xi \geqslant t\}\Big| \leqslant \delta(y)\,\mathbf{P}\{\xi \geqslant t\}, \tag{2.11}$$

где $\delta(y) \downarrow 0$ *при* $y \to \infty$. *Тогда, если при каждом* y *существует*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\xi(y) \geqslant t\}}{\mathbf{P}\{\xi \geqslant t\}} = c(y) < \infty, \tag{2.12}$$

то

$$\int_0^\infty e^{\beta y}\,\pi(dy) < \infty, \tag{2.13}$$

$$\pi(x) \sim G(x)\,\frac{\beta}{1-\varphi(\beta)} \int_0^\infty c(y) e^{\beta y}\,\pi(dy). \tag{2.14}$$

З а м е ч а н и е 6. Условие (2.12) означает, что все «хвосты» $\mathbf{P}\{\xi(y) \geqslant t\}$ убывают «не медленнее», чем $\mathbf{P}\{\xi \geqslant t\}$. Если это свойство нарушено, то можно рекомендовать тот же путь оценивания $\pi(x)$, что и в замечании 2.

Теорема 5 будет доказана в § 8.

Пусть теперь $\beta = 0$. Этот случай возникает, например, если $\mathbf{P}\{\xi \geqslant t\}$ убывает степенным образом.

Теорема 6. *Пусть цепь $\{X(n)\}$ асимптотически однородна, т.е. $\xi(y) \Rightarrow \xi$ при $y \to \infty$, $a \equiv \mathbf{E}\xi < 0$. Пусть скачки $\{\xi(y)\}$ цепи $\{X(n)\}$ интегрируемы равномерно по y. Пусть функция $G(t)$ — надстепенная (т.е. удовлетворяет условиям (2.2) и (2.4)) и для некоторых $c(y)$*

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi(y) \geqslant t\}}{\mathbf{P}\{\xi \geqslant t\}} \longrightarrow c(y)$$

при $t \to \infty$ равномерно по y. Тогда при $x \to \infty$ имеет место асимптотическая эквивалентность

$$\pi(x) \sim \frac{G(x)}{-a} \int_0^\infty c(y)\,\pi(dy). \tag{2.15}$$

Таким образом, соотношение (2.14) переходит «по непрерывности» в (2.15).

Теорема 6 следует из теоремы 10, которая будет приведена и доказана в § 6.

Последующие §§ 3, 4 и 6 содержат также некоторое обобщение теоремы 6 (см. теорему 10) и ряд оценок для $\pi(x)$, которые представляют и самостоятельный интерес. Из теорем 8 и 9 вытекает также следующая грубая теорема о больших уклонениях в степенном случае.

Теорема 7. *Пусть $\xi(y) \Rightarrow \xi$, $a \equiv \mathbf{E}\xi < 0$ и случайные величины $|\xi(y)|$ интегрируемы равномерно по y. Пусть $\alpha > 1$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют $c' > 0$, $c'' < \infty$ и t_0 такие, что при $t > t_0$ для всех y*

$$c' t^{-\alpha-\varepsilon} \leqslant \mathbf{P}\big\{\xi(y) \geqslant t\big\} \leqslant c'' t^{-\alpha+\varepsilon}.$$

Тогда

$$\ln \pi(x) \sim -(\alpha - 1) \ln x.$$

Оценки скорости сходимости в теореме 4 (крамеровский случай), необходимые для построения статистических оценок, приведены в § 9.

§ 3. Неравенство снизу для хвоста инвариантного распределения

Пусть цепь $\{X(n)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, как и прежде, принимает значения в $\mathbf{R}^+$ и $\xi(y)$ — случайная величина, отвечающая скачку цепи $\{X(n)\}$ из состояния y; $F_y(\cdot)$ — ее распределение, т.е.

$$F_y(B) = \mathbf{P}\big\{\xi(y) \in B\big\} = P(y, y + B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^+).$$

Обозначим $F_y(t) = F_y([t, \infty))$,

$$G_y(t) \equiv \int_t^\infty F_y(u)\,du, \tag{3.1}$$

$$\underline{a}(y) \equiv \inf_{u > y} \mathbf{E}\,\xi(u). \tag{3.2}$$

Справедливо следующее неравенство снизу для вероятностей больших уклонений. Свойство асимптотической однородности цепи X здесь и в дальнейшем, если это специально не оговорено, не предполагается.

Лемма 1. *Пусть*

$$\sup_y \mathbf{E}\left|\xi(y)\right| < \infty \tag{3.3}$$

и N таково, что $\pi((N,\infty)) > 0$. Тогда $\underline{a}(N) \leqslant 0$ и

$$\pi\big((N,\infty)\big) \geqslant \frac{1}{-\underline{a}(N)} \int_0^N G_u(N-u)\,\pi(du) \geqslant \frac{1}{-\underline{a}(N)} \int_0^N G_u(N)\,\pi(du)$$

(*здесь принято* $\frac{0}{0} = 0$).

Это неравенство оценивает значение инвариантной меры на (N,∞) через значения той же инвариантной меры, но в дополнительной области $[0,N]$. Позже будет выяснено, что в «регулярном случае» мера π в правой части влияет лишь на постоянный множитель в оценке снизу для $\pi(N)$.

Доказательство. Рассмотрим укрупненную цепь $\{X^{(N)}(n)\}$ со значениями в фазовом пространстве $[N,\infty)$ и скачками $\xi^{(N)}(y)$ (см. (2.6)). Так как по построению при $y > N$ имеем $\xi^{(N)}(y) \geqslant_{\mathrm{st}} \xi(y)$, то, ввиду определения (3.2) функции $\underline{a}(y)$, при $y > N$ выполняется неравенство

$$\mathbf{E}\,\xi^{(N)}(y) \geqslant \underline{a}(N). \tag{3.4}$$

Ввиду условия (3.3) имеем

$$\sup_{y\geqslant N} \mathbf{E}|\xi^{(N)}(y)| < \infty.$$

Следовательно, можно применить тождество равновесия (см., например, [3, § 8] или [11, § 2]) и получить, что

$$0 = \int_N^\infty \mathbf{E}\,\xi^{(N)}(u)\,\pi^{(N)}(du). \tag{3.5}$$

В силу (3.4) это означает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\,\xi^{(N)}(N)\left(\pi((-\infty,N]\right) = \mathbf{E}\,\xi^{(N)}(N)\pi^{(N)}\left(\{N\}\right) &= -\int_{N+0}^\infty \mathbf{E}\,\xi^{(N)}(u)\,\pi(du) \\ &\leqslant -\underline{a}(N)\int_{N+0}^\infty \pi(du). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Отсюда и из неравенства $\pi((N,\infty)) > 0$ выводим, в частности, что $\underline{a}(N) \leqslant 0$.

Из (3.6) следует также, что

$$\pi\big((N,\infty)\big) \geqslant \frac{1}{-\underline{a}(N)}\,\pi\big((-\infty,N]\big)\,\mathbf{E}\,\xi^{(N)}(N). \tag{3.7}$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned}
&\pi\big((-\infty, N]\big)\mathbf{E}\,\xi^{(N)}(N)\\
&= \pi\big((-\infty, N]\big)\frac{\int_{-\infty}^{N}\mathbf{E}\{u+\xi(u)-N;\, u+\xi(u)>N\}\,\pi(du)}{\pi((-\infty, N])}\\
&= \int_{-\infty}^{N}\int_{N-u}^{\infty} F_u(t)\,dt\,\pi(du) = \int_{-\infty}^{N} G_u(N-u)\,\pi(du). \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.7) следует утверждение леммы.

§ 4. Оценка сверху для хвоста стационарного распределения

Пусть $q(y)$ — неотрицательная невозрастающая интегрируемая функция; обозначим $Q(y) \equiv \int_y^\infty q(u)\,du$. Пусть $\beta \in [0,\infty)$, функция $Q_1(y) \equiv e^{\beta y}Q(y)$ является надстепенной (т.е. удовлетворяет условиям (2.2) и (2.3)) и

$$\int_0^\infty e^{\beta y}q(y)\,dy < \infty. \qquad (4.1)$$

Лемма 2. *Пусть для любых* $y, t \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\big\{\xi(y) \geqslant t\big\} \leqslant q(t) \qquad (4.2)$$

и для некоторых числа N *и случайной величины* $\overline{\xi}$, $\mathbf{E}\overline{\xi} < 0$, *выполняется соотношение*

$$\xi(y) \leqslant_{\mathrm{st}} \overline{\xi} \quad \textit{при} \quad y \geqslant N. \qquad (4.3)$$

Тогда, если (a) $\beta > 0$ *и* $\mathbf{E}e^{\beta\overline{\xi}} < 1$, *либо* (b) $\beta = 0$, *то существует* c *такое, что при всех* x

$$\pi(x) \leqslant c\,Q(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о начнем со случая $\beta > 0$, $\mathbf{E}e^{\beta\overline{\xi}} < 1$. В силу условий (4.1)–(4.3) существуют случайная величина ζ и число T такие, что $\zeta \geqslant -T$ с вероятностью 1,

$$\begin{aligned}
\zeta &\geqslant_{\mathrm{st}} \xi(y) \quad &&\text{при} \quad y \geqslant N, \qquad &(4.4)\\
\mathbf{P}\{\zeta \geqslant t\} &= q(t) \quad &&\text{при} \quad t \geqslant T, \qquad &(4.5)\\
\mathbf{E}\zeta &< 0 \quad &&\text{и} \quad \mathbf{E}e^{\beta\zeta} < 1. \qquad &(4.6)
\end{aligned}$$

Положим $M = N + 2T$. Докажем, что для всех y, z таких, что $0 \leqslant y \leqslant z$ и $z \geqslant M$, имеет место неравенство

$$y + \xi(y) \leqslant_{\mathrm{st}} z + \zeta. \qquad (4.7)$$

Если $N \leqslant y \leqslant z$ и $z \geqslant M$, то это неравенство выполнено в силу (4.4). Если $y < N$ и $z \geqslant M$, то для $u \geqslant -T$ выполняется $z - y + u \geqslant T$ и, следовательно, ввиду (4.2) и (4.5) справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{y+\xi(y)\geqslant z+u\} &\leqslant q(z-y+u)=\mathbf{P}\{\zeta\geqslant z-y+u\}\\ &\leqslant \mathbf{P}\{z+\zeta\geqslant z+u\}.\end{aligned}$$

Для $u<-T$ последнее неравенство верно в силу того, что $\zeta\geqslant -T$. Таким образом, неравенство (4.7) выполнено и в случае, когда $y<N$ и $z\geqslant M$. Следовательно, (4.7) действительно имеет место.

Рассмотрим цепь $\{Y(n)\}$ с неотрицательными значениями, определенную равенством

$$Y(n+1)=\big(Y(n)+\zeta_n\big)^+,$$

где случайные величины $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$ суть независимые копии ζ.

Пусть $X(0)$ имеет распределение π. Тогда при любом n распределение $X(n)$ есть также π. Если $X(n-1)\leqslant_{\mathrm{st}} M+Y(n-1)$, то в силу (4.7) имеем

$$X(n)\leqslant_{\mathrm{st}} M+Y(n-1)+\zeta_n\leqslant M+\big(Y(n-1)+\zeta_n\big)^+=M+Y(n).$$

Таким образом, если $Y(0)\equiv_{\mathrm{st}} X(0)$, то $X(n)\leqslant_{\mathrm{st}} M+Y(n)$ для любого n. В частности, для любого x

$$\pi(x)\leqslant \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{M+Y(n)\geqslant x\}=\pi_Y\big([x-M,\infty)\big), \tag{4.8}$$

где π_Y означает стационарное распределение цепи Y. Цепь $\{Y(n)\}$ есть однородная цепь со значениями в $\mathbf{R}^+$, причем «порождающая» ее случайная величина ζ удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, для некоторого $c<\infty$ выполнено неравенство $\pi_Y([x-M,\infty))\leqslant cQ(x-M)$. В сочетании с (4.8) и сходимостью $Q(x-M)/Q(x)\to e^{\beta M}$ последнее неравенство доказывает утверждение леммы в случае $\beta>0$.

Пусть $\beta=0$. Тогда вышеприведенные рассуждения останутся в силе, если исключить из формулы (4.6) неравенство $\mathbf{E}e^{\beta\zeta}<1$. Лемма 2 доказана.

§ 5. Две леммы о «локальном свойстве»

Пусть положительная невозрастающая функция $f(x)$ является локально степенной, т.е. удовлетворяет условию (2.2). Поскольку функция f не возрастает, то она является локально степенной тогда и только тогда, когда существует последовательность точек $T_0<T_1<\dots<T_n<\dots$ такая, что

$$T_n-T_{n-1}\uparrow\infty \quad \text{при} \quad n\to\infty, \tag{5.1}$$

$$\frac{f(T_n)}{f(T_{n-1})}\longrightarrow 1 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{5.2}$$

Пусть $h(x)$ — неотрицательная невозрастающая функция.

Лемма 3. *Пусть* $h(x) \leqslant f(x)$. *Тогда существует последовательность отрезков* $[t_n, s_n] \subseteq [T_{n-1}, T_n]$ *таких, что* $s_n - t_n \to \infty$ *и* $h(t_n) - h(s_n) = o(f(t_n))$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Ввиду (5.1) существует последовательность u_n, $u_n > 0$, такая, что $u_n \to \infty$ и $u_n = o(T_n - T_{n-1})$ при $n \to \infty$. Обозначим через l_n наибольшее целое число, не превосходящее $(T_n - T_{n-1})/u_n$; по выбору u_n имеем $l_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого n существует точка $t_n \in [T_{n-1}, T_n - u_n]$, для которой

$$h(t_n) - h(t_n + u_n) = o\big(f(t_n)\big), \qquad n \to \infty.$$

Предположим, что, напротив, последнее соотношение не имеет места. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и последовательность индексов $n(k)$, $n(k) \uparrow \infty$ при $k \to \infty$, такие, что для любого $t \in [T_{n(k)-1}, T_{n(k)} - u_{n(k)}]$

$$h(t) - h(t + u_{n(k)}) \geqslant \varepsilon f(t). \tag{5.3}$$

В частности, ввиду неравенства $h \leqslant f$,

$$h(t + u_{n(k)}) \leqslant h(t) - \varepsilon f(t) \leqslant (1-\varepsilon)\, h(t).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h(T_{n(k)} - u_{n(k)}) &\leqslant (1-\varepsilon)^{l_{n(k)}-1} h(T_{n(k)-1}) \leqslant (1-\varepsilon)^{l_{n(k)}-1} f(T_{n(k)-1}) \\ &= o\big(f(T_{n(k)} - u_{n(k)})\big), \qquad k \to \infty, \end{aligned}$$

в силу сходимостей $l_{n(k)} \to \infty$ и (5.2). Противоречие с (5.3) при $t = T_{n(k)} - u_{n(k)}$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $h(x) \leqslant f(x)$. *Тогда существуют функции* $t(x)$ *и* $s(x)$ *такие, что* $[t(x), s(x)] \subseteq [0, x]$,

$$s(x) - t(x) \longrightarrow \infty, \qquad \frac{f(N(x))}{f(x)} \longrightarrow 1,$$
$$h\big(t(x)\big) - h\big(s(x)\big) = o\big(f(x)\big) \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

где $N(x)$ *есть середина отрезка* $[t(x), s(x)]$.

Доказательство. Если $x \in [T_n, T_{n+1})$, то положим $t(x) \equiv t_n$, $s(x) \equiv s_n$. Тогда

$$\big[t(x),\, s(x)\big] = [t_n,\, s_n] \subseteq [T_{n-1},\, T_n] \subseteq [0,\, x],$$

$s(x) - t(x) \to \infty$ и по лемме 3 $h(t(x)) - h(s(x)) = o(f(t_n))$ при $x \to \infty$. Так как функция f не возрастает, то $f(T_{n-1}) \geqslant f(t_n) \geqslant f(N(x)) \geqslant f(x) \geqslant f(T_{n+1})$. Отсюда ввиду условия (5.2) вытекают требуемые свойства функций $N(x)$, $t(x)$ и $s(x)$. Лемма доказана.

§ 6. Теоремы о вероятностях больших уклонений в случае $\beta = 0$

Пусть $\underline{G}(y)$ — положительная невозрастающая функция, $\underline{G}(y) \downarrow 0$; функция $G_y(t)$ определена в (3.1). Положим

$$\underline{c}(y) \equiv \liminf_{t\to\infty} \frac{G_y(t)}{\underline{G}(t)}, \qquad \underline{c} \equiv \int_0^\infty \underline{c}(y)\,\pi(dy), \tag{6.1}$$

$$\underline{a}(y) \equiv \inf_{z>y} \mathbf{E}\xi(z), \qquad \underline{a} \equiv \lim_{y\to\infty} \underline{a}(y). \tag{6.2}$$

Справедлива следующая оценка снизу вероятностей больших уклонений инвариантного распределения.

Теорема 8. *Пусть* $\sup_y \mathbf{E}|\xi(y)| < \infty$. *Тогда*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\underline{G}(x)} \geqslant \frac{\underline{c}}{-\underline{a}}$$

(*здесь принято* $\frac{0}{0} = 0$ *и* $\frac{\infty}{\infty} = 0$).

Как показывают примеры (см. теорему 1 (c), следствие 1 (c)), константа в правой части неравенства в случае «степенных» хвостов распределения — правильная. Чтобы неравенство было максимально информативно, следует в качестве $\underline{G}$ выбирать самый «толстый хвост» среди G_y.

Доказательство теоремы 8. Выберем произвольно c_0, $c_0 < \underline{c}$, и a_0, $a_0 < \underline{a}$. Ввиду определений (6.1) и (6.2), а также леммы Фату существует $x_0 < \infty$, для которого $\underline{a}(x_0) > a_0$ и

$$\liminf_{t\to\infty} \int_0^{x_0} \frac{G_y(t)}{\underline{G}(t)}\,\pi(dy) \geqslant c_0.$$

По лемме 1 при $x > x_0$ справедлива оценка

$$\frac{\pi(x)}{\underline{G}(x)} \geqslant \frac{1}{-\underline{a}(x_0)} \int_0^{x_0} \frac{G_y(t)}{\underline{G}(t)}\,\pi(dy).$$

Следовательно,

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\underline{G}(x)} \geqslant \frac{c_0}{-a_0}.$$

В силу произвольности выбора чисел $c_0 < \underline{c}$ и $a_0 < \underline{a}$ теорема доказана.

В следующей теореме приводится верхняя оценка для вероятностей больших уклонений инвариантной меры, более точная, нежели в лемме 2. Будем предполагать, что функция $\overline{G}(t)$ является достаточно регулярной. Именно, в дальнейшем предполагаем, что $\overline{G}(t) = \int_t^\infty g(u)\,du$, где функция g положительна и не возрастает. Предполагаем также, что функция $\overline{G}(t)$ является надстепенной (т.е. удовлетворяет условиям (2.2) и (2.4)). Положим

$$\overline{c}(y) \equiv \limsup_{t\to\infty} \frac{G_y(t)}{\overline{G}(t)}, \qquad \overline{c} \equiv \int_0^\infty \overline{c}(y)\,\pi(dy), \tag{6.3}$$

$$\overline{a}(y) \equiv \sup_{z>y} \mathbf{E}\xi(z), \qquad \overline{a} \equiv \lim_{y\to\infty} \overline{a}(y). \tag{6.4}$$

Теорема 9. *Пусть скачки* $\{\xi(y)\}$ *цепи* $\{X(n)\}$ *интегрируемы равномерно по* y. *Пусть, далее, существуют числа* N, $\widehat{c} < \infty$ *и случайная величина* $\overline{\xi}$, $\mathbf{E}\overline{\xi} < 0$, *такие, что*

$$\mathbf{P}\{\xi(y) \geqslant t\} \leqslant \widehat{c} g(t) \quad \text{при} \quad y, t \geqslant 0, \tag{6.5}$$

$$\xi(y) \leqslant_{\mathrm{st}} \overline{\xi} \quad \text{при} \quad y \geqslant N. \tag{6.6}$$

Тогда если функция $\overline{G}$ *удовлетворяет условиям* (2.2) *и* (2.4), *то справедливо соотношение*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\overline{G}(x)} \leqslant \frac{\overline{c}}{-\overline{a}}.$$

З а м е ч а н и е 7. Ввиду условия (6.5), $\overline{c}(y) \leqslant \widehat{c}$ для любого $y \geqslant 0$; следовательно, $\overline{c} \leqslant \widehat{c}$. Ввиду условия (6.6), $\overline{a} < 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 9. Из леммы 2 при $q(y) = \widehat{c} g(y)$, $Q(y) = \widehat{c}\overline{G}(y)$ следует существование c_* такого, что

$$\pi(x) \leqslant c_* \overline{G}(x). \tag{6.7}$$

Следовательно, поскольку $\overline{G}(x)$ есть локально степенная функция и не возрастает, то выполнены условия леммы 4 для $f(x) = c_*\overline{G}(x)$ и $h(x) = \pi(x)$. Поэтому существуют функции $t(x)$ и $s(x)$ такие, что $[t(x), s(x)] \subseteq [0, x]$,

$$s(x) - t(x) \longrightarrow \infty, \tag{6.8}$$

$$\frac{\overline{G}(N(x))}{\overline{G}(x)} \longrightarrow 1, \tag{6.9}$$

$$\pi\Big([t(x), s(x)]\Big) = o\big(\overline{G}(x)\big), \tag{6.10}$$

при $x \to \infty$, где $N(x)$ — середина отрезка $[t(x), s(x)]$.

Рассмотрим укрупненную цепь Маркова $\{X^{(N(x))}(n)\}$ со значениями в фазовом пространстве $[N(x), \infty)$ (см. (2.6)). Из тождества равновесия (3.5) получаем

$$0 = \mathbf{E}\xi^{(N(x))}\big(N(x)\big)\,\pi\Big([0, N(x)]\Big) + \int_{N(x)+0}^{\infty} \mathbf{E}\xi^{(N(x))}(y)\,\pi(dy),$$

где, согласно (3.8),

$$\mathbf{E}\xi^{(N(x))}\big(N(x)\big)\pi\Big([0, N(x)]\Big) = \int_0^{N(x)} G_y\big(N(x) - y\big)\,\pi(dy).$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
I_1 \equiv -\int_{s(x)+0}^{\infty} \mathbf{E}\xi^{(N(x))}(y)\,\pi(dy) = \int_{N(x)+0}^{s(x)} \mathbf{E}\xi^{(N(x))}(y)\,\pi(dy) \\
+ \left(\int_0^{N(x)/2} + \int_{N(x)/2+0}^{t(x)} + \int_{t(x)+0}^{N(x)}\right) G_y(N(x)-y)\,\pi(dy) \\
\equiv I_2 + I_3 + I_4 + I_5
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

(предполагаем, не ограничивая общности, что $N(x)/2 < t(x)$).

Так как скачки $\xi(y)$ цепи $\{X(n)\}$ интегрируемы равномерно по y и $s(x) - N(x) \to \infty$, то

$$
\sup_{y > s(x)} \mathbf{E}\xi^{(N(x))}(y) \longrightarrow \overline{a} \quad \text{при} \quad x \to \infty.
$$

Поэтому $I_1 \geqslant (-\overline{a} + o(1))\pi((s(x),\infty))$ при $x \to \infty$. Следовательно, ввиду неравенства $s(x) \leqslant x$ и (6.7),

$$
I_1 \geqslant -\overline{a}\pi(x) + o\big(\overline{G}(x)\big), \qquad x \to \infty. \tag{6.12}
$$

Оценим I_2. Поскольку

$$
\sup_{y > N(x)} \mathbf{E}\xi^{(N(x))}(y) \leqslant \sup_{y > N(x)} \mathbf{E}\big|\xi(y)\big| \leqslant \sup_{y \geqslant 0} \mathbf{E}\big|\xi(y)\big| < \infty,
$$

то в силу (6.10)

$$
I_2 = O\Big(\pi\big((N(x),\, s(x)]\big)\Big) = o\big(\overline{G}(x)\big), \qquad x \to \infty. \tag{6.13}
$$

Оценим значение $I_3/\overline{G}(x)$. Если $y \leqslant N(x)/2$, то по условию (2.4)

$$
\frac{G_y(N(x)-y)}{\overline{G}(N(x))} \leqslant c_0.
$$

Кроме того, по определению (6.3) для любого y

$$
\limsup_{x\to\infty} \frac{G_y(N(x)-y)}{\overline{G}(N(x))} = \overline{c}(y).
$$

Следовательно, ввиду (6.9) и леммы Фату,

$$
\limsup_{x\to\infty} \frac{I_3}{\overline{G}(N(x))} = \limsup_{x\to\infty} \frac{I_3}{\overline{G}(x)} \leqslant \int_0^{\infty} \overline{c}(y)\,\pi(dy) \equiv \overline{c}. \tag{6.14}
$$

Используя последовательно условие (6.5), неравенство (6.7), соотношение (6.9) и то, что функция $\overline{G}$ удовлетворяет условию (2.4), оценим

$I_4/\overline{G}(x)$:

$$\frac{I_4}{\overline{G}(x)} \leqslant \int_{N(x)/2}^{t(x)} \frac{G_y(N(x)-t(x))}{\overline{G}(x)}\,\pi(dy) \leqslant \widehat{c}\,\frac{\overline{G}(N(x)-t(x))}{\overline{G}(x)}\pi\left(\left[\frac{N(x)}{2},\infty\right)\right)$$
$$\leqslant \widehat{c}\,c_*\frac{\overline{G}(N(x)-t(x))\overline{G}(N(x)/2)}{\overline{G}(x)} = O\Big(\overline{G}\big(N(x)-t(x)\big)\Big) \longrightarrow 0 \qquad (6.15)$$

при $x\to\infty$, так как $N(x)-t(x)\to\infty$. Оценим $I_5/\overline{G}(x)$: по условию (6.5)

$$\frac{I_5}{\overline{G}(x)} \leqslant \frac{\widehat{c}\,\overline{G}(0)}{\overline{G}(x)}\pi\Big(\big[t(x),\,N(x)\big]\Big) \longrightarrow 0 \qquad (6.16)$$

при $x\to\infty$, в силу (6.10). Подставив соотношения (6.12)–(6.16) в (6.11), получим утверждение теоремы.

Из теорем 8 и 9 вытекает следующий результат.

Теорема 10. *Пусть скачки $\{\xi(y)\}$ цепи $\{X(n)\}$ интегрируемы равномерно по y и*

$$\mathbf{E}\xi(y) \longrightarrow a < 0 \quad \textit{при} \quad y\to\infty. \qquad (6.17)$$

Пусть для некоторых числа N и случайной величины $\overline{\xi}$, $\mathbf{E}\overline{\xi}<0$,

$$\xi(y) \leqslant_{\mathrm{st}} \overline{\xi} \quad \textit{при} \quad y \geqslant N \qquad (6.18)$$

и невозрастающая функция $g(t)$ такова, что

$$\mathbf{P}\big\{\xi(y)\geqslant t\big\} \leqslant g(t) \quad \textit{для любых} \quad y,t\geqslant 0. \qquad (6.19)$$

Пусть существует $G_*(t)=\int_t^\infty g(u)\,du$ и функция G_* является надстепенной (т.е. удовлетворяет условиям (2.2) и (2.4)). Тогда если для любого y существует предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G_y(t)}{G_*(t)} \equiv c(y),$$

то имеет место равенство

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{G_*(x)} = \frac{1}{-a}\int_0^\infty c(y)\,\pi(dy).$$

Из последней теоремы следует теорема 6 о точной асимптотике вероятностей больших уклонений для асимптотически однородных цепей в случае $\beta=0$. Из теорем 8 и 9 вытекает также теорема 7 о грубой асимптотике в том же случае $\beta=0$.

§7. Асимптотика распределений сверток мер

Пусть μ есть вероятностная мера в $\mathbf{R}$, а μ_1 и μ_2 — две произвольные меры в $\mathbf{R}$ (знакопеременные, вообще говоря), вариация которых допускает оценку

$$\operatorname*{Var}_{[x,\infty)}\mu_1 \leqslant ce^{\beta|x|/2}, \quad \operatorname*{Var}_{[x,\infty)}\mu_2 \leqslant ce^{\beta|x|/2}, \qquad (7.1)$$

для некоторых $c < \infty$ и $\beta \geqslant 0$. Обозначим $\mu(x) \equiv \mu([x,\infty))$ и $\mu_k(x) \equiv \mu_k([x,\infty))$, $k = 1, 2$. Предполагаем, что

$$\mu_k(x) = \big(\rho_k + o(1)\big)\,\mu(x), \qquad k = 1,\, 2, \tag{7.2}$$

при $x \to \infty$, где $\rho_k \in \mathbf{R}$, а также, что

$$b \equiv \int_{\mathbf{R}} e^{\beta y}\,\mu(dy) < \infty. \tag{7.3}$$

Тогда существуют интегралы $b_1 \equiv \int_{\mathbf{R}} e^{\beta y}\,\mu_1(dy)$ и $b_2 \equiv \int_{\mathbf{R}} e^{\beta y}\,\mu_2(dy)$.

Лемма 5. *Если $e^{\beta x}\mu(x)$ — надстепенная функция (т.е. удовлетворяет условиям* (2.2) *и* (2.3)*), то при $x \to \infty$ справедливо соотношение*

$$(\mu_2 * \mu_1)\big([x,\infty)\big) = \mu(x)\big(\rho_2 b_1 + \rho_1 b_2 + o(1)\big).$$

Доказательство. Имеем равенства

$$\begin{aligned}(\mu_2 * \mu_1)\big([x,\infty)\big) &= -\left(\int_{-\infty}^{x/2} + \int_{x/2}^{\infty}\right)\mu_1(x-t)\,d\mu_2(t)\\ &= -\int_{-\infty}^{x/2}\mu_1(x-t)\,d\mu_2(t) - \mu_1(x-t)\mu_2(t)\Big|_{x/2}^{\infty}\\ &\quad + \int_{x/2}^{\infty}\mu_2(t)\,d\mu_1(x-t).\end{aligned}$$

Из условия (7.1) заключаем, что $\mu_1(x-t) = O(e^{\beta t/2})$ при $t \to \infty$ для всякого фиксированного x, а из условий (7.2) и (7.3) вытекает, что $\mu_2(t) = o(e^{-\beta t})$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{(\mu_2 * \mu_1)([x,\infty))}{\mu(x)} &= -\int_{-\infty}^{x/2}\frac{\mu_1(x-t)}{\mu(x)}\,d\mu_2(t) + \frac{\mu_1(x/2)\mu_2(x/2)}{\mu(x)}\\ &\quad - \int_{-\infty}^{x/2}\frac{\mu_2(x-t)}{\mu(x)}\,d\mu_1(t) \equiv I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned} \tag{7.4}$$

По условиям (7.2) и (2.3), а также в силу соотношения $\mu(x/2) = o(e^{-\beta x/2})$ имеем

$$\begin{aligned}\mu_1\Big(\frac{x}{2}\Big)\mu_2\Big(\frac{x}{2}\Big) &= O\Big(\mu\Big(\frac{x}{2}\Big)\,\mu\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big) = \mu(x)\,O(e^{\beta x/2})\,\mu\Big(\frac{x}{2}\Big)\\ &= o\big(\mu(x)\big), \qquad x \to \infty.\end{aligned} \tag{7.5}$$

Вычислим предел I_1. Так как $\mu_1(x-t)/\mu(x-t) \longrightarrow \rho_1$ при $x \to \infty$ равномерно по $t \leqslant x/2$, то

$$I_1 = \big(-\rho_1 + o(1)\big)\int_{-\infty}^{x/2}\frac{\mu(x-t)}{\mu(x)}\,d\mu_2(t) \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{7.6}$$

По условию (2.2) при всяком фиксированном t

$$\frac{\mu(x-t)}{\mu(x)} \longrightarrow e^{\beta t} \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Кроме того, при $0 \leqslant t \leqslant x/2$ по условию (2.3) $\mu(x-t)/\mu(x) \leqslant e^{\beta t}c_0$, а при $t < 0$ выполняется $\mu(x-t)/\mu(x) \leqslant 1$. Таким образом, ввиду условия (7.3) подынтегральное выражение в (7.6) допускает интегрируемую мажоранту. Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$I_1 \longrightarrow -\rho_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta t}\, d\mu_2(t) = \rho_1 b_2 \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{7.7}$$

Поскольку меры μ_1 и μ_2 входят в (7.4) симметричным образом, то $I_3 \to \rho_2 b_1$ при $x \to \infty$. Подставляя значения пределов I_1 и I_3 в (7.4) и учитывая (7.5), получаем утверждение леммы.

Докажем следующую лемму для k-й свертки меры μ.

Лемма 6. *Если $e^{\beta x}\mu(x)$ — надстепенная функция, то для любого $k = 1, 2, \ldots$*

$$\mu^{*(k)}\big([x,\infty)\big) = \mu(x)\left(kb^{k-1} + o(1)\right) \qquad \textit{при} \quad x \to \infty.$$

Кроме того, имеет место оценка: для любого $\delta > 0$ существуют $c < \infty$ и $x_0 < \infty$ такие, что при $x \geqslant x_0$ и любом $k = 1, 2, \ldots$

$$\mu^{*(k)}\big([x,\infty)\big) \leqslant c\mu(x)\,(b+\delta)^k.$$

Доказательство. Первое утверждение вытекает из леммы 5. Докажем второе утверждение, аккуратно оценив каждое из трех слагаемых в (7.4) для $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \mu^{*(k-1)}$. Как отмечалось выше, при $x \to \infty$

$$-\int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu(x-t)}{\mu(x)}\, d\mu(t) \longrightarrow -\int e^{t\beta}\, d\mu(t) \equiv b.$$

Следовательно, существует $x_0 = x_0(\delta)$ такое, что при всех $x \geqslant x_0$

$$-\int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu(x-t)}{\mu(x)}\, d\mu(t) \leqslant (b+\delta). \tag{7.8}$$

Обозначим

$$A_k \equiv \sup_{x \geqslant x_0} \frac{\mu^{*(k)}([x,\infty))}{\mu([x,\infty))}.$$

Оценим сверху A_k через A_{k-1}. По условию (2.3) и неравенству Чебышева имеем

$$\frac{\mu(x/2)\mu_2(x/2)}{\mu(x)} \leqslant \frac{c_0 e^{x\beta/2}\mu(x)\, b^{k-1} e^{-x\beta/2}}{\mu(x)} = c_0 b^{k-1}. \tag{7.9}$$

По определению A_{k-1} и $x_0(\delta)$ при $x \geqslant 2x_0(\delta)$ выполнены неравенства

$$-\int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu_2(x-t)}{\mu(x)}\,d\mu(t) \leqslant -A_{k-1}\int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu(x-t)}{\mu(x)}\,d\mu(t) \leqslant A_{k-1}(b+\delta),$$

ввиду (7.8). При $x_0 \leqslant x \leqslant 2x_0$ из неравенства Чебышева получаем

$$-\int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu_2(x-t)}{\mu(x)}\,d\mu(t) \leqslant -\int_{-\infty}^{x/2} \frac{b^{k-1}e^{-\beta(x-t)}}{\mu(x)}\,d\mu(t) \leqslant \frac{b^{k-1}}{\mu(x)} \leqslant c_1 b^{k-1},$$

где $c_1 \equiv 1/\mu(2x_0) < \infty$. Из двух последних оценок следует, что для любого $x \geqslant x_0(\delta)$

$$-\int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu_2(x-t)}{\mu(x)}\,d\mu(t) \leqslant A_{k-1}(b+\delta) + c_1 b^{k-1}. \tag{7.10}$$

Ввиду условия (2.3) для любого $x \geqslant 0$

$$-\int_{-\infty}^{x/2} \frac{\mu(x-t)}{\mu(x)}\,d\mu_2(t) \leqslant -c_0\int_{-\infty}^{x/2} e^{\beta t}\,d\mu_2(t) \leqslant c_0 b^{k-1}. \tag{7.11}$$

Подставляя оценки (7.9), (7.10) и (7.11) в равенство (7.4) (в котором в качестве распределения μ_1 взято μ, а в качестве μ_2 — $\mu^{*(k-1)}$), выводим неравенство

$$A_k \leqslant c_2 b^{k-1} + A_{k-1}(b+\delta).$$

Отсюда следует, что $A_k \leqslant c_2 k(b+\delta)^{k-1}$. Последнее неравенство эквивалентно оценке леммы.

§8. Точная асимптотика вероятностей больших уклонений для асимптотически однородных цепей в случае $\varphi(\beta) < 1$

В настоящем параграфе мы докажем теорему 5. Предварительно покажем справедливость замечания 2. Как замечено в [2, с. 168], для локально степенной функции $\widetilde{F}(t)$ при любом $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших t

$$\frac{\widetilde{F}(t+n)}{\widetilde{F}(t)} = \frac{\widetilde{F}(t+1)}{\widetilde{F}(t)}\frac{\widetilde{F}(t+2)}{\widetilde{F}(t+1)}\cdots\frac{\widetilde{F}(t+n)}{\widetilde{F}(t+n-1)} < e^{\varepsilon n}.$$

Таким образом, в отношении

$$\frac{G(t)}{\mathbf{P}\{\xi \geqslant t\}} = e^{\beta t}\frac{G(t)}{\widetilde{F}(t)} = \int_t^\infty e^{-\beta(y-t)}\frac{\widetilde{F}(y)}{\widetilde{F}(t)}\,dy = \int_0^\infty e^{-\beta u}\frac{\widetilde{F}(t+u)}{\widetilde{F}(t)}\,du$$

подынтегральное выражение имеет предел $e^{-\beta u}$ при $t \to \infty$ и допускает оценку сверху $\widehat{c}\,e^{(-\beta+\varepsilon)u}$. Отсюда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости следует справедливость замечания 2.

Доказательство теоремы 5. Мы используем обозначения $F_y(t) = \mathbf{P}\{\xi(y) \geqslant t\}$, $F(t) = \mathbf{P}\{\xi \geqslant t\}$, $\varphi_y(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi(y)}$ и $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi}$. Уравнение Колмогорова–Чепмэна (1.1) для стационарной меры π эквивалентно следующему уравнению для преобразований Лапласа:

$$\int_0^\infty e^{\lambda y}\,\pi(dy) = \int_0^\infty \varphi_y(\lambda)e^{\lambda y}\,\pi(dy) = \int_0^\infty (\varphi(\lambda)+\varphi_y(\lambda)-\varphi(\lambda))e^{\lambda y}\,\pi(dy).$$

Таким образом, при $0 \leqslant \lambda \leqslant \beta$

$$\int_0^\infty e^{\lambda y}\,\pi(dy) = \frac{\int_0^\infty(\varphi_y(\lambda)-\varphi(\lambda))e^{\lambda y}\,\pi(dy)}{1-\varphi(\lambda)} \equiv \frac{1}{1-\varphi(\lambda)}\,\psi(\lambda). \tag{8.1}$$

Пусть $H(t) \equiv \sum_{k=0}^\infty F^{*(k)}([t,\infty))$ есть функция восстановления распределения F; в частности,

$$\frac{1}{1-\varphi(\lambda)} = -\int_{\mathbf{R}} e^{\lambda u}\,dH(u).$$

В силу условия $\varphi(\beta) < 1$ и леммы 6, ряд

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{F^{*(k)}([t,\infty))}{F(t)}$$

сходится равномерно по t в области (x_0,∞) (для любого $x_0 \in \mathbf{R}$). Поэтому в силу той же леммы

$$\frac{H(t)}{F(t)} = \sum_{k=0}^\infty \frac{F^{*(k)}([t,\infty))}{F(t)} \to \sum_{k=0}^\infty k\varphi^{k-1}(\beta) = \frac{1}{(1-\varphi(\beta))^2}$$

при $t \to \infty$, т.е.

$$H(t) = \frac{1+o(1)}{(1-\varphi(\beta))^2}\,F(t). \tag{8.2}$$

При $0 \leqslant \lambda \leqslant \beta$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned}\psi(\lambda) &\equiv \int_0^\infty \left(\int_{\mathbf{R}} e^{\lambda(t+y)}\,d_t\big(F(t)-F_y(t)\big)\right)\pi(dy)\\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbf{R}} e^{\lambda t}\,d_t\big(F(t-y)-F_y(t-y)\big)\right)\pi(dy)\\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{\lambda t}\,d_t\left(\int_0^\infty \big(F(t-y)-F_y(t-y)\big)\,\pi(dy)\right).\end{aligned}$$

Таким образом, $\psi(\lambda)$ есть преобразование Лапласа меры

$$\mu_2(dt) = d_t\int_0^\infty \big(F(t-y)-F_y(t-y)\big)\,\pi(dy) \tag{8.3}$$

в $\mathbf{R}$. Докажем, что

$$\mu_2([t,\infty)) = (\rho_* + o(1))\, F(t) \tag{8.4}$$

при $t \to \infty$ для некоторого $\rho_* \in \mathbf{R}$. Имеем:

$$\frac{\mu_2([t,\infty))}{F(t)} \equiv \int_0^\infty g(t,y)\,\pi(dy), \tag{8.5}$$

где

$$g(t,y) = \frac{\mathbf{P}\{\xi(y) \geqslant t-y\} - \mathbf{P}\{\xi \geqslant t-y\}}{\mathbf{P}\{\xi \geqslant t\}}.$$

Ввиду условий (2.2) и (2.12) при всяком фиксированном $y \geqslant 0$ подынтегральное выражение имеет предел при $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} g(t,\, y) = c(y)\, e^{\beta y} - e^{\beta y}. \tag{8.6}$$

Кроме того, в силу условия (2.11) действует оценка

$$|g(t,\, y)| \leqslant \delta(y) \frac{\mathbf{P}\{\xi \geqslant t-y\}}{\mathbf{P}\{\xi \geqslant t\}}. \tag{8.7}$$

Если $0 \leqslant y \leqslant t/2$, то ввиду последнего неравенства и условия (2.3) функция g допускает оценку

$$|g(t,\, y)| \leqslant \delta(0)\, e^{\beta y} c_0.$$

Следовательно, в силу сходимости (8.6) по теореме Лебега о мажорируемой сходимости существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{t/2} g(t,\, y)\,\pi(dy) = \int_0^\infty (c(y) - 1)\, e^{\beta y}\,\pi(dy). \tag{8.8}$$

Ввиду леммы 2 и замечания 2, $\pi(y) \leqslant F(y)$. Поэтому из неравенства (8.7) и леммы 5 (для $\mu_1 = \mu_2 = F$) следует, что

$$\begin{aligned} \left|\int_{t/2}^\infty g(t,\, y)\,\pi(dy)\right| &\leqslant \delta\Big(\frac{t}{2}\Big) \int_0^\infty \frac{F(t-y)}{F(t)}\,\pi(dy) \\ &\leqslant c\delta\Big(\frac{t}{2}\Big) \int_0^\infty \frac{F(t-y)}{F(t)}\, dF(y) = O\Big(\delta\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

при $t \to \infty$. Отсюда и из (8.8) вытекает, что соотношение (8.4) действительно имеет место при

$$\rho_* = \int_0^\infty (c(y) - 1)\, e^{\beta y}\,\pi(dy).$$

Таким образом, ввиду (8.2) и (8.4) выполнены условия леммы 5 для мер μ, порожденной случайной величиной ξ, μ_1, порожденной функцией восстановления H, μ_2, определенной в (8.3), и для $\rho_1 = (1 - \varphi(\beta))^{-2}$, $\rho_2 = \rho_*$. Следовательно, из равенства (8.1) вытекает соотношение

$$\pi(x) = F(x)\Big(\big(1 - \varphi(\beta)\big)^{-2} b_2 + \rho_* b_1 + o(1)\Big), \qquad x \to \infty, \tag{8.9}$$

где $b_1 = (1 - \varphi(\beta))^{-1}$, $b_2 = \psi(\beta)$. Вычислим b_2, используя определение (8.1) функции ψ:

$$\begin{aligned} b_2 = \psi(\beta) &= \int_0^\infty \left(e^{\beta\xi(y)} - \varphi(\beta)\right) e^{\beta y}\, \pi(dy) \\ &= \int_0^\infty \left(e^{\beta(y+\xi(y))} - e^{\beta y}\right) \pi(dy) + \big(1 - \varphi(\beta)\big) \int_0^\infty e^{\beta y}\, \pi(dy). \end{aligned}$$

Ввиду теоремы о среднем сносе (для функции $e^{\beta y}$; см. [5, равенство (14)]) первый интеграл равен нулю. Следовательно,

$$b_2 = \big(1 - \varphi(\beta)\big) \int_0^\infty e^{\beta y}\, \pi(dy).$$

Подставляя найденое значение в (8.9) и учитывая замечание 2, получаем утверждение теоремы об асимптотике $\pi(x)$.

§ 9. Оценка второго члена асимптотики $\pi(x)$ в крамеровском случае

Простоты ради рассмотрим цепь $\{X(n)\}$, принимающую значения в $\mathbf{Z}^+$. Везде ниже $x, y \in \mathbf{Z}^+$. Предполагаем, что цепь асимптотически однородна, т.е. $\xi(y) \Rightarrow \xi$, $y \to \infty$, и существует $\beta > 0$ такое, что $\varphi(\beta) \equiv \mathbf{E}e^{\beta\xi} = 1$.

Теорема 11. (a) *Пусть целое $k \geqslant 1$ таково, что*

$$\varphi^{(k+1)}(\beta) = \mathbf{E}\xi^{k+1} e^{\beta\xi} < \infty, \tag{9.1}$$

$$\sup_y \mathbf{E}\xi^{k+1}(y) e^{\beta\xi(y)} < \infty, \tag{9.2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\beta t} \Big| \mathbf{P}\big\{\xi(y) < t\big\} - \mathbf{P}\{\xi < t\} \Big|\, dt \leqslant \frac{c_1}{y^{k+1}}. \tag{9.3}$$

Тогда $\pi(x) = ce^{-\beta x} + O(x^{-k} e^{-\beta x})$ при $x \to \infty$, где $0 \leqslant c < \infty$. Если $k > 1$, то $c > 0$.

(b) *Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что*

$$\sup_y \mathbf{E}e^{(\beta+\varepsilon)\xi(y)} < \infty, \tag{9.4}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\beta t} \Big| \mathbf{P}\big\{\xi(y) < t\big\} - \mathbf{P}\{\xi < t\} \Big|\, dt \leqslant c_2 e^{-\varepsilon y}. \tag{9.5}$$

Тогда для некоторого $\delta > 0$ *выполняется* $\pi(x) = ce^{-\beta x} + o(e^{-(\beta+\delta)x})$, $x \to \infty$, *причем* $c > 0$.

Доказательство. (а) Из условия (9.3) вытекает, что

$$\mathbf{E}e^{\beta\xi(x)} \geqslant \mathbf{E}e^{\beta\xi} - \frac{c_1}{x^{k+1}} = 1 - \frac{c_1}{x^{k+1}},$$

и поскольку ряд $\sum x \ln x / x^{k+1}$ сходится при $k > 1$, то при таких значениях k положительность константы c следует из теоремы 4.

Пусть $\tilde{\xi}$ — случайная величина с распределением $\widetilde{F}(dt) = \mathbf{P}\{\tilde{\xi} \in dt\} = e^{\beta t}\mathbf{P}\{\xi \in dt\}$, $\widetilde{a} \equiv \mathbf{E}\tilde{\xi} = \mathbf{E}\xi e^{\beta\xi} < \infty$, $\widetilde{H}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{F}^{*(j)}((-\infty, y))$ есть функция восстановления для случайной величины $\tilde{\xi}$.

При доказательстве теоремы 5 в [3, § 23] показано, что

$$\left| \int_{z-1}^{z} e^{\beta x}\pi(x)\,dx - \frac{1}{\widetilde{a}} \int_{-\infty}^{\infty} dR(y) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} r(z-y)\,|dR(y)|, \tag{9.6}$$

где $r(z) = |\widetilde{H}(z) - \widetilde{H}(z-1) - 1/\widetilde{a}|$ и

$$dR(y) = e^{\beta y} \sum_{x=0}^{\infty} \big(F_x(y-x) - F(y-x)\big)\,\pi_x\,dy, \qquad \pi_x = \pi\big(\{x\}\big).$$

Там же было показано, что полная вариация функции R конечна. Оценим полную вариацию функции R на множестве $[N, \infty)$. По теореме 4 имеем $e^{\beta x}\pi_x \leqslant c_3$ равномерно по x и, следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_N^{\infty} |dR(y)| &\leqslant \int_N^{\infty} e^{\beta y} \sum_{x=0}^{\infty} \big|F_x(y-x) - F(y-x)\big|\,\pi_x\,dy \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{\beta x}\pi_x \int_N^{\infty} e^{\beta(y-x)} \big|F_x(y-x) - F(y-x)\big|\,dy \\
&\leqslant \sum_{x=0}^{\infty} c_3 \int_{N-x}^{\infty} e^{\beta t} \big|F_x(t) - F(t)\big|\,dt \\
&= \left(\sum_{x=0}^{N/2} + \sum_{x=N/2}^{\infty} \right) c_3 \int_{N-x}^{\infty} e^{\beta t} \big|F_x(t) - F(t)\big|\,dt = \Sigma_1 + \Sigma_2.
\end{aligned}$$

Оценим Σ_1. По неравенству типа Чебышева и ввиду условий (9.1), (9.2) имеем

$$\begin{aligned}
&\int_y^{\infty} e^{\beta t} F_x(t)\,dt = \frac{1}{\beta} e^{\beta t} F_x(t) \Big|_y^{\infty} - \frac{1}{\beta} \int_y^{\infty} e^{\beta t}\,dF_x(t) \leqslant c_4 y^{-(k+1)}, \\
&\int_y^{\infty} e^{\beta t} F(t)\,dt \leqslant c_5 y^{-(k+1)}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 \leqslant c_3(c_4 + c_5) \sum_{x=0}^{N/2} \frac{1}{(N-x)^{k+1}} = O(N^{-k}).$$

Оценим Σ_2, используя условие (9.3):

$$\Sigma_2 \leqslant c_3 \sum_{x=N/2}^{\infty} \frac{c_1}{x^{k+1}} = O(N^{-k}).$$

Таким образом,

$$\operatorname*{Var}_{[N,\infty)} R(y) \equiv \int_N^\infty |dR(y)| = O(N^{-k}), \qquad N \to \infty. \tag{9.7}$$

Ввиду условия (9.1) существует $(k+1)$-й момент случайной величины $\tilde{\xi}$. Поэтому по следствию 1 из [15] справедлива оценка

$$r(x) \equiv \left| \widetilde{H}(x) - \widetilde{H}(x-1) - \frac{1}{\tilde{\tilde{a}}} \right| \leqslant c_6 x^{-k},$$

причем $\sup_x r(x) = c_7 < \infty$. Подставляя оценки для r в (9.6), получаем

$$\begin{aligned}
&\left| \pi_N e^{\beta N} \frac{1-1/e}{\beta} - \frac{1}{\tilde{\tilde{a}}} \int_{-\infty}^{\infty} dR(y) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} r(N-y)\,|dR(y)| \\
&\quad = \left(\int_{-\infty}^{N/2} + \int_{N/2}^{\infty} \right) r(N-y)\,|dR(y)| \leqslant c_6 \left(\frac{N}{2}\right)^{-k} \int_{-\infty}^{N/2} |dR(y)| \\
&\quad + c_7 \int_{N/2}^{\infty} |dR(y)| = O(N^{-k}),
\end{aligned}$$

в силу конечности полной вариации функции R и (9.7). Отсюда вытекает утверждение (a) теоремы.

(b) Если выполнены условия (9.4) и (9.5) теоремы, то

$$\operatorname*{Var}_{[N,\infty)} R(y) = O(e^{-\varepsilon N/2}), \qquad N \to \infty. \tag{9.8}$$

В силу (9.4), $\mathbf{E} e^{\varepsilon_0 \tilde{\xi}} < \infty$ для любого $\varepsilon_0 < \varepsilon$. Кроме того,

$$\mathbf{E}\tilde{\xi}^2 = \mathbf{E}\xi^2 e^{\beta\xi} < \infty.$$

Поэтому по теореме из [16] для некоторого $\varepsilon_1 > 0$

$$r(x) \equiv \left| \widetilde{H}(x) - \widetilde{H}(x-1) - \frac{1}{\tilde{\tilde{a}}} \right| = o\big(e^{-\varepsilon_1 x}\big), \qquad x \to \infty. \tag{9.9}$$

Из (9.8) и (9.9) вытекает утверждение (b) теоремы при $\delta = \min(\varepsilon/2, \varepsilon_1)$. Отметим, что, как следует из [16], существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что

$$\mathbf{E}\, e^{z\tilde{\xi}} = \mathbf{E}\, e^{(\beta+z)\xi} \neq 1$$

для всех z из полосы $0 < \mathrm{Re}\, z \leqslant \varepsilon_2$; в качестве ε_1 можно взять любое число ε_1 из интервала $(0, \varepsilon_2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровков А. А.* Предельное распределение для осциллирующего случайного блуждания. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. XXV, в. 3, с. 663–665.
2. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 368 с.
3. *Боровков А. А.* Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М.: ТВП (в печати).
4. *Боровков А. А.* Математическая статистика. М.: Наука, 1984, 143 с.; 2-е изд. (в печати).
5. *Borovkov A. A., Korshunov D.* Ergodicity in a sense of weak convergence, equilibrium-type identities and large deviations for Markov chains. — In: Probability Theory and Mathematical Statistics. Proceedings of the 6-th International Vilnius Conference on Probability and Statistics. Vilnius, 1994, p. 89–98.
6. *Csörgö S., Deheuvels P., Mason D. M.* Kernel estimates of the tail index of a distribution. — Ann. Statist., 1985, v. 13, № 3, p. 1050–1077.
7. *Embrechts P., Goldie C. M.* On convolution tails. — Stoch. Process. Appl., 1982, v. 13, № 3, p. 263–278.
8. *Embrechts P., Veraverbeke N.* Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. — Insurance Math. Econom., 1982, v. 1, № 1, p. 55–72.
9. *Haeusler E., Teugels J. L.* On asymptotic normality of Hill's estimator for the exponent of regular variation. — Ann. Statist., 1985, v. 13, № 2, p. 743–756.
10. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971, 536 с.
11. *Korshunov D. A.* Transition phenomena for real-valued Markov chains. — Siberian Adv. Math., 1993, v. 3, p. 53–100.
12. *Korshunov D. A.* On asymptotic behaviour of the stationary distribution of a random walk (submitted).
13. *Meyn S. P., Tweedie R. L.* Markov Chains and Stochastic Stability. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
14. *Новак С. Ю., Утев С. А.* Об асимптотике распределения отношения сумм случайных величин. — Сиб. матем. ж., 1990, т. 31, № 5, с. 92–101.
15. *Stone C.* On characteristic functions and renewal theory. — Trans. Amer. Math. Soc., 1965, v. 120, № 2, p. 327–342.
16. *Stone C.* On moment generating functions and renewal theory. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, № 4, p. 1298–1301.
17. *Varadhan S. R. S.* Large Deviations and Applications. Philadelphia: Soc. for Industr. and Appl. Math., 1984.
18. *Veraverbeke N.* Asymptotic behaviour of Wiener–Hopf factors of a random walk. — Stoch. Process. Appl., 1977, v. 5, № 1, p. 27–37.

Поступила в редакцию
10.II.1995