К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. А. Красносельский и Е. А. Лифшиц

1. Пусть B — банахово пространство с телесным конусом K. Точка $x_0 \in K$ называется точкой гладкости конуса K, если существует единственный нормированный функционал $f_0 \in K^*$ такой, что $f_0(x_0) = 0$; говорят, что f_0 проходит через точку гладкости x_0.

Пусть $\mathfrak{F}$ — система множеств нормированных положительных линейных функционалов, проходящих через точки гладкости конуса K, обладающая тем свойством, что пересечение любой последовательности множеств из $\mathfrak{F}$ содержит множество из $\mathfrak{F}$.

Пусть P — линейный оператор, действующий из B в линейное топологическое пространство E, нуль θ которого имеет счетную базу окрестностей.

Предполагается, что: 1°. Если $Px_n \to 0$ $(x_n \in B)$, то найдется такая подпоследовательность x_{n_i} и такое множество $F \in \mathfrak{F}$, что $f(x_{n_i}) \to 0$ при всех $f \in F'$. 2°. Пусть $u_n - Px_n$ $(x_n \in K)$ принадлежит замыканию $\overline{PK}$ множества PK в E, где $u_n \in E$ — последовательность, сходящаяся в E к некоторому элементу из PK. Пусть $f(x_n) \to f(x^*)$ при всех f из некоторого $F \in \mathfrak{F}$. Тогда $Px_n \to Px^*$.

Линейный (т. е. аддитивный и однородный) оператор A, действующий из B в E, называется положительным, если $AK \in \overline{PK}$.

Тенью $T(B_0)$ подпространства $B_0 \subset B$ назовем множество таких $y \in B$, что для каждой последовательности линейных положительных операторов A_n из $A_n x \to Px$ $(x \in B_0)$ вытекает соотношение $A_n y \to Py$.

2. Теорема 1 (о полной тени). *Пусть B_0 — сепарабельное подпространство пространства B, содержащее внутренний элемент x^1 конуса K. Пусть множество $F(B_0)$ нормированных линейных положительных функционалов, проходящих через точки гладкости, лежащие в B_0, содержит некоторое множество $F \in \mathfrak{F}$. Тогда $T(B_0) = B$.*

3. Из теоремы 1 следует ряд утверждений (типа известных теорем П. П. Коровкина [3]) о сходимости последовательностей линейных положительных операторов в различных пространствах измеримых функций. Приведем некоторые из них.

Пусть B — это пространство C непрерывных на некотором компакте Q функций; K — конус неотрицательных функций. Множество нормированных функционалов, проходящих через точки гладкости, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством точек компакта Q; удобно не делать различия между этими множествами.

Пусть на Q задана конечная счетно аддитивная непрерывная и регулярная мера. Систему $\mathfrak{F}$ составим из подмножеств полной меры множества точек Q. Выбирая в качестве E различные пространства измеримых функций, а в качестве P — оператор естественного вложения C в E, получаем следующие утверждения:

а) E — пространство измеримых функций с топологией, определенной сходимостью по мере.

Теорема 2 (о сходимости по мере). *Пусть подпространство $B_0 \subset C$ обладает тем свойством, что множество $F(B_0)$ нормированных положительных функционалов, проходящих через точки гладкости из B_0, имеет полную меру. Пусть A_n — последовательность линейных положительных операторов, действующих из C в E. Пусть, наконец, последовательности $A_n x - x$ сходятся по мере к нулю при $x \in B_0$. Тогда сходятся по мере к нулю и все последовательности $A_n x - x$ при $x \in C$,*

б) E — правильное идеальное (см., например, [2]) пространство измеримых функций (например, пространства L_p; пространства Орлича, порожденные N-функциями $M(u)$, удовлетворяющими Δ_2 — условию Юнга; пространства E_M, являющиеся замыканием множества непрерывных функций по любой норме Орлича; пространства Лоренца Λ_Φ; пространства Марцинкевича M_Φ^0 и др. (см., например, [2], [5])).

Теорема 3 (о сходимости по норме). *Пусть подпространство $B_0 \subset C$ обладает тем свойством, что множество $F(B_0)$ нормированных положительных функционалов, проходящих через точки гладкости из B_0, имеет полную меру. Пусть A_n — последовательность линейных положительных операторов, действующих из C в E. Пусть, наконец, $\| A_n x - x \|_E \to 0$ при $x \in B_0$. Тогда $\| A_n x - x \|_E \to 0$ при всех $x \in C$.*

Из теорем 2 и 3 могут быть выведены теоремы о сходимости последовательностей положительных операторов, действующих из одного пространства измеримых функций в другое. Например, из теоремы 3 следует

Теорема 4. *Пусть подпространство $B_0 \subset C$ удовлетворяет требованиям теоремы 3. Пусть последовательность линейных положительных операторов A_n, действующих из правильного идеального пространства E_1 в правильное идеальное пространство E_2, равномерно ограничена и $\| A_n x - x \| \to 0$ при $x \in B_0$. Тогда $\| A_n x - x \|_{E_2} \to 0$ при всех $x \in E_1$.*

Для применения теорем 2—4 важным является то обстоятельство, что в случае компактов Q, лежащих в n-мерном пространстве, существуют конечномерные подпространства B_0 с полной тенью. Например, за B_0 можно принять подпространство, натянутое на $n+2$ функции $e_0(t) \equiv 1$, $e_1(t) = t_1$, ..., $e_n(t) = t_n$, $e_{n+1}(t) = t_1^2 + \ldots + t_n^2$, где $t = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ — вектор n-мерного пространства.

Теорема 5. *Пусть E — правильное идеальное пространство измеримых функций. Тогда существуют такие тройки элементов $e_1, e_2, e_3 \in E$, что любая последовательность действующих в E положительных линейных операторов A_n с ограниченными в совокупности нормами сильно сходится на всем E к единичному оператору, если только*

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n e_1 - e_1 \|_E = \lim_{n\to\infty} \| A_n e_2 - e_2 \|_E = \lim_{n\to\infty} \| A_n e_3 - e_3 \|_E = 0.$$

Теорема 6. *Пусть B_0 — такое подпространство пространства C, что $\operatorname{mes} F(B_0) = \operatorname{mes} Q$. Пусть последовательность положительных операторов A_n обладает тем свойством, что для каждой функции $x(t) \in B_0$ последовательность $A_n x(t)$ сходится к $x(t)$ почти всюду. Тогда при любой функции $x(t) \in C$ последовательность $A_n x(t)$ сходится к $x(t)$ почти всюду.*

4. З. Семадени обратил наше внимание на тот факт, что из совпадения оператора A, действующего в банаховом пространстве E, с единичным оператором на некотором специальном подпространстве $E_0 \subset E$ следует $Ax \equiv x$ $(x \in E)$, *если* $\| A \| = 1$.

Развитая в [4] и в настоящей статье теория позволяет получать различные теоремы типа утверждений З. Семадени или теорем о том, что сходимость последовательности нерастягивающих операторов A_n к единичному оператору I на всем пространстве E вытекает из сходимости на подпространстве. Для этого достаточно ввести пространство $\widetilde{E}$ пар $\{t, x\}$ $(-\infty < t < \infty,\ x \in E)$ и выделить в нем конус K элементов $\{t, x\}$, для которых $t \geqslant 0$, $\| x \| \leqslant t$. Тогда операторы $\widetilde{A}_n \{t, x\} = \{t, A_n x\}$ положительны, если $\| A_n \| \leqslant 1$. Впрочем, нетрудно провести соответствующие рассуждения непосредственно для нерастягивающих операторов.

5. Настоящая работа возникла в связи с докладом В. К. Дзядыка (см. [1]) на Математическом конгрессе в Москве (август 1966 г.); она является продолжением исследований, начатых авторами в [4] совместно с В. С. Климовым.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. К. Дзядык, Матем. сб. **70** (112), № 4 (1966).

[2] П. П. Забрейко, Труды Воронежского семин. по функц. анал., вып. 8 (1966).

[3] П. П. Коровкин, Линейные операторы и теория приближений, М., Физматгиз, 1959.

[4] В. С. Климов, М. А. Красносельский и Е. А. Лифшиц, Точки гладкости конуса и сходимость положительных функционалов и операторов, Труды Моск. матем. о-ва **15** (1966).

[5] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Физматгиз, 1958.

Поступило в Правление Общества 7 июня 1967 г.