В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, Многообразие решений уравнения $\left[\dfrac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} - 6\wp_{1,2}(u_1,u_2) + E\right]\psi = 0$,

УМН, 2001, том 56, выпуск 6, 141–142

https://www.mathnet.ru/rm457

МНОГООБРАЗИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} - 6\wp_{1,2}(u_1,u_2) + E\right]\psi = 0$$

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин

Пусть $\sigma = \sigma(u_1,u_2;\lambda)$ – сигма-функция на универсальном расслоении $\mathscr{V}$ якобианов кривых $V_\lambda(\mu,\nu) = \{(\mu,\nu)\in\mathbb{C}^2 \mid f(\mu,\nu) = \nu^2 - (4\mu^5 + \lambda_3\mu^3 + \lambda_2\mu^2 + \lambda_1\mu + \lambda_0) = 0\}$. Это целая функция всех своих аргументов $u_1, u_2, \lambda_0, \dots$, которая в нуле разлагается в ряд с *рациональными коэффициентами*. Как обычно, положим $\zeta_i(u) = \partial_i \ln\sigma(u)$, $\wp_{ij}(u) = -\partial_{i,j}\ln\sigma(u)$, $\wp_{ijk}(u) = -\partial_{i,j,k}\ln\sigma(u)$ и т. д., где $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial u_i}$, $\partial_{i,j} = \dfrac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}, \dots, i,j,k = 1,2$.

В этой заметке мы описываем многообразие решений уравнения
$$L(E)\psi(u;\alpha,\beta,k) = 0 \tag{1}$$
для оператора с 4-периодическим потенциалом и блоховской волновой функции, где
$$L(a,E) = \partial_{1,2} - 6\wp_{1,2}(u) + E \quad\text{и}\quad \psi(u;\alpha,\beta,k) = \frac{\sigma(u+\alpha)\sigma(u+\beta)}{\sigma(u)^2\sigma(\alpha)\sigma(\beta)}\exp\{-u^t(\zeta(\alpha)+\zeta(\beta)-k)\},$$
$\zeta(v) = (\zeta_1(v),\zeta_2(v))^t$; здесь $\alpha,\beta,k\in\mathbb{C}^2$ и E не зависят от u и являются параметрами.

Рассмотрим универсальное расслоение $\mathscr{W}$ симметрических квадратов $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Jac}(V_\lambda))$ якобианов. Введем вектор-функцию $p([\alpha,\beta],\lambda) = (x;y;z)$ на $\mathscr{W}$, где $x = (x_1,x_2,x_3)$ и $x_{i+j-1} = \wp_{i,j}(\alpha) + \wp_{i,j}(\beta)$; $y = (y_1,\dots,y_4)$ и $y_{i+j+k-2} = \wp_{i,j,k}(\alpha) + \wp_{i,j,k}(\beta)$; $z = (z_1,\dots,z_5)$ и $z_{i+j+k+\ell-3} = \wp_{i,j,k,\ell}(\alpha) + \wp_{i,j,k,\ell}(\beta)$; скобки $[\,\cdot\,,\cdot\,]$ – обозначение неупорядоченной пары.

Обозначим через $\mathscr{M} = \mathscr{M}([\alpha,\beta],\lambda;k_1,k_2,E)$ многообразие решений уравнения (1).

Теорема 1. *$\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \cup \mathscr{M}_2$, где:*
$\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}([\alpha,\beta],\lambda;k_1,0,0)$ – подмногообразие в $\mathscr{W}$, заданное системой уравнений
$$\begin{cases} x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = -2k_1; \\ \lambda_0 = -\frac{1}{8}(3k_1y_2 + z_1),\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = k_1^2 - 2x_1,\ \lambda_3 = z_5; \end{cases} \tag{2}$$
$\mathscr{M}_2 = \mathscr{M}([\alpha,\beta],\lambda;0,0,E)$ – подмногообразие в $\mathscr{W}$, заданное системой уравнений
$$\begin{cases} x_2 = -\frac{E}{2},\ x_3 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0, \\ \lambda_0 = -\frac{1}{32}(E(8x_1 + z_4) + 4z_2),\ \lambda_1 = \frac{E^2}{4},\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(z_4 - 4x_1),\ \lambda_3 = 2E + z_5. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема допускает прямое доказательство, основанное на том факте, что целая функция $\phi(u) = \sigma(u)^3 L\psi$, по построению, принадлежит линейному пространству размерности 9. Как уравнения (2), так и уравнения (3) накладывают условия, что росток в нуле соответствующей им функции $\phi(u)$ равен нулю по модулю мономов степени > 3, в то время как коэффициенты разложения функции $\phi(u)$ по базису полностью восстанавливаются по этой струе. Вывод уравнений (2) и (3) использует такой отрезок ряда σ-функции: $\sigma(u,\lambda) = u_1 + \frac{1}{24}(\lambda_2u_1^3 - 8u_2^3) + \frac{1}{48}\big(\frac{1}{40}(\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_3)u_1^5 - 4\lambda_0u_1^4u_2 - 2\lambda_1u_1^3u_2^2 - 2\lambda_2u_1^2u_2^3 - \lambda_3u_1u_2^4\big) + O(u^7)$.

Дополним вектор-функцию p матрицами функций $T = \{T_{i+j-1,k+\ell-1} = (\wp_{i,j}(\alpha) - \wp_{i,j}(\beta)) \times (\wp_{k,\ell}(\alpha) - \wp_{k,\ell}(\beta))\}$ и $S = \{S_{i,k} = (\wp_{i,2,2}(\alpha) - \wp_{i,2,2}(\beta))(\wp_{k,2,2}(\alpha) - \wp_{k,2,2}(\beta))\}$ ранга 1 и зададим отображение $w\colon \mathscr{W} \to \mathbb{C}^{21}\colon ([\alpha,\beta],\lambda) \mapsto ((x;y;z),T,S)$.

Теорема 2. *Отображение w является мероморфным вложением. При этом многообразия $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ переходят в семейства трехмерных алгебраических подмногообразий $\mathscr{N}_1(k_1)$ и $\mathscr{N}_2(E)$ в $\mathbb{C}^{21}$.*

Доказательство теоремы основывается на соотношениях в поле абелевых функций рода 2 (см. [1], [2]) и уравнениях (2) и (3). Далее, зададим семейство отображений
$\gamma(\,\cdot\,,\cdot\,;k_1,E)\colon\mathbb{C}^2\to\operatorname{Sym}^2(\operatorname{Sym}^2(\mathbb{C}^2))\colon(q,r)\mapsto\bigl([[(\mu_1^+,\nu_1^+),(\mu_2^+,\nu_2^+)],[(\mu_1^-,\nu_1^-),(\mu_2^-,\nu_2^-)]]\bigr)$,
где $(\mu^\pm,\nu^\pm)$ – решения систем

$$\begin{cases}\mu^2-\frac{E}{2}+q\sqrt{r}=0\\ \nu=-2k_1\mu+(q^2+\mu)\sqrt{r}\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}\mu^2-\frac{E}{2}-q\sqrt{r}=0\\ \nu=-2k_1\mu-(q^2+\mu)\sqrt{r}\end{cases}.\tag{4}$$

Нам потребуется также семейство отображений
$\delta(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,;k_1,E)\colon\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^4\colon(q,r,s)\mapsto\bigl(\frac{1}{12}r[E-2k_1q+4(Es-q^2)^2],\ \frac14E^2,\ k_1^2+\frac34r,\ 2E+4sr\bigr)$.
Пусть $\jmath\colon\operatorname{Jac}(V_\lambda)\to\operatorname{Sym}^2(V_\lambda)\subset\operatorname{Sym}^2(\mathbb{C}^2)$ – отображение Якоби и

$$\chi\colon\mathscr{W}\to\operatorname{Sym}^2(\operatorname{Sym}^2(\mathbb{C}^2))\times\mathbb{C}^4\colon\chi([\alpha,\beta],\lambda)=\bigl([\jmath(\alpha),\jmath(\beta)],\lambda\bigr).$$

Теорема 3. *Имеют место следующие семейства параметризующих отображений $R_1\colon\mathbb{C}^3\to\mathscr{M}_1$ и $R_2\colon\mathbb{C}^3\to\mathscr{M}_2$, которые однозначно определяются тем, что*
$\chi(R_1(q,r,s))=(\gamma(q,r;k_1,0),\delta(q,r,s;k_1,0))$ *и* $\chi(R_2(q,r,s))=(\gamma(q,r;0,E),\delta(q,r,s;0,E))$.

Доказательство существенно использует явное описание многообразий $\mathscr{N}_1$ и $\mathscr{N}_2$ из теоремы 2 и каноническое отображение $\mathbb{C}^{21}\to\operatorname{Sym}^2(\operatorname{Sym}^2(\mathbb{C}^2))\times\mathbb{C}^4$, которое строится на основе явного выражения значений базисных абелевых функций в точке $\xi\in\operatorname{Jac}(V_\lambda)$ в терминах рациональных функций от $\jmath(\xi)$ [1], [2]. Дадим теперь алгоритм построения решений уравнения (1).

Пусть дан набор $(q,r,s;k_1)$. Тогда уравнение кривой V_λ имеет вид

$$\nu^2=4\mu^5+4rs\mu^3+\bigl(k_1^2+\tfrac34r\bigr)\mu^2-\tfrac{qr}{6}(k_1-2q^3).$$

Используя корни системы уравнений (4) при $E=0$, находим

$$\begin{aligned}\alpha_1&=\int_\infty^{(\mu_1^+,\nu_1^+)}+\int_\infty^{(\mu_2^+,\nu_2^+)}\frac{d\mu}{\nu}, &\beta_1&=\int_\infty^{(\mu_1^-,\nu_1^-)}+\int_\infty^{(\mu_2^-,\nu_2^-)}\frac{d\mu}{\nu},\\ \alpha_2&=\int_\infty^{(\mu_1^+,\nu_1^+)}+\int_\infty^{(\mu_2^+,\nu_2^+)}\frac{\mu\,d\mu}{\nu}, &\beta_2&=\int_\infty^{(\mu_1^-,\nu_1^-)}+\int_\infty^{(\mu_2^-,\nu_2^-)}\frac{\mu\,d\mu}{\nu}.\end{aligned}\tag{5}$$

Подмногообразие в $\mathscr{M}_1$, выделенное фиксацией значений параметров $\{\lambda_0,\lambda_1=0,\lambda_2,\lambda_3\}$, представляет собой плоскую кривую $\Gamma=\{(k_1,q)\in\mathbb{C}^2\mid 2q(2q^3-k_1)(\lambda_2-k_1^2)-9\lambda_0=0\}$ с инволюцией $(q,k_1)\mapsto(-q,-k_1)$, а параметры $s=\frac{3\lambda_3}{16(\lambda_2-k_1^2)}$ и $r=\frac43(\lambda_2-k_1^2)$ – становятся функциями на ней. Набор корней системы уравнений (4) через вычисление интегралов (5) определяет пару $[\alpha,\beta]$ как функцию на Γ.

Пусть дан набор $(q,r,s;E)$. Тогда уравнение кривой V_λ имеет вид

$$\nu^2=4\mu^5+2(E+2rs)\mu^3+\tfrac34r\mu^2+\tfrac14E^2\mu+\tfrac{1}{12}r(E+4(Es-q^2)^2).$$

Пару $[\alpha,\beta]$ находим по формулам (5), используя корни системы (4) при $k_1=0$. Подмногообразие в $\mathscr{M}_2$, выделенное фиксацией значений параметров $\{\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$, представляет собой набор из *восьми точек с учетом кратностей.*

При $\lambda=0$ получаем $E=0$, и уравнение $\alpha_1^2-\alpha_1\beta_1+\beta_1^2=0$ описывает многообразие решений $\mathscr{M}([(\alpha_1,0),(\beta_1,0)],0;-3/(\alpha_1+\beta_1),0,0)$. В то же время оператор $\partial_{11}+\partial_{22}-6(\wp_{11}+\wp_{22})$ не имеет собственных функций вида $\psi(u;\alpha,\beta,k)$ при $\lambda=0$, и, следовательно, многообразие решений для него пусто и в общем случае, так как любые построения с $\sigma(u;\lambda)$ допускают непрерывный предельный переход $\lambda\to0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] H. F. Baker. Multiply periodic functions // CUP, 1907. [**2**] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin // Rev. Math. Math. Phys. 1997. V. 10. № 2. P. 1–119.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва;
Институт магнетизма НАН Украины, Киев
E-mail: buchtab@mendeleevo.ru, dile@imag.kiev.ua

Принято редколлегией
22.10.2001