О. М. Фоменко, Представление целых чисел положительными кватернарными квадратичными формами, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2001, том 276, 291–299

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

О. М. Фоменко

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КВАТЕРНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

1. Пусть n – натуральное число, $k \geqslant 4$ – фиксированное натуральное число, $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = X^T AX$ – положительно определенная целочисленная примитивная квадратичная форма от k переменных, A – матрица формы f, $D = \det A$ – детерминант формы f, $r_f(n)$ – количество представлений n квадратичной формой f.

В. А. Тартаковский [1] доказал, что если $k \geqslant 5$ и n представимо родом формы f, то существует положительная постоянная C_f, зависящая только от f и такая, что при $n > C_f$ n представляется самой формой f. Ниже C означает положительное постоянное число, не всегда одно и то же. Ватсон [2] определил явную зависимость C_f от D. Он доказал, что

$$
\begin{aligned}
C_f &= CD^{5.2}, && \text{если} && k = 5;\\
C_f &= CD^{2.67}, && \text{если} && k = 6;\\
C_f &= CD, && \text{если} && k \geqslant 7.
\end{aligned}
$$

Недавно в случае $k = 5$ была получена более точная граница (см. [3]):

$$C_f = CD^4.$$

А. В. Малышев [4] доказал при $k \geqslant 4$ асимптотическую формулу

$$r_f(n) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} n^{\frac{k}{2}-1} \mathfrak{S}_f(n) + O\Big(D^{\frac{k}{4}+\frac{3}{2}} n^{\frac{k}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\Big), \qquad (1)$$

где O-константа зависит от ε (и от k, если брать переменное k, но в данной работе мы предположили, что k – постоянное число),

---

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 99-01-00099).

$\mathfrak{S}_f(n)$ – сингулярный ряд. Если сочетать формулу (1) с оценкой снизу сингулярного ряда (см. [4, с. 73]), то можно доказать, что при $k \geqslant 5$ и выполнении родовых условий асимптотическая формула (1) действует при $n > C_\varepsilon D^{3(k+2)/(k-3)+\varepsilon}$. При $k = 4$ теорема Тартаковского не всегда верна, поэтому сделаем предположение $(n, 2^5 D) = 1$. Тогда из результатов А. В. Малышева следует, что при выполнении родовых условий асимптотическая формула (1) действует, если $n > C_\varepsilon D^{22+\varepsilon}$. Применяя теорию модулярных форм, автор [5] довел последний результат до $n > C_\varepsilon D^{14+\varepsilon}$. (В работе [5] имеются неточности, которые без труда устраняются.)

Для диагональных форм границу действия асимптотических формул можно уточнить. Ради простоты положим

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = \big[a, b, c, d\big].$$

Хорошо известно, что при $(n, 2D) = 1$ сингулярный ряд принимает простой вид

$$\mathfrak{S}_{[a,b,c,d]} = \sum_{t \mid n} \left(\frac{D}{t}\right) t^{-1}, \qquad D = abcd.$$

Имеем

$$\mathfrak{S}_{[a,b,c,d]} \gg \frac{1}{\log\log n}, \quad \text{если} \quad (n, 2D) = 1.$$

Этот факт в сочетании с оценками собственных чисел операторов Гекке, принадлежащих Айхлеру и Делиню, позволяет получить довольно точные результаты. В работе [6] (исправления в [7]) рассматривались простейшие формы

$$F_1 = \big[1, p, p, p\big],$$
$$F_2 = \big[1, 1, p, p\big],$$
$$F_3 = \big[1, 1, 1, p\big],$$

где $p > 2$ – простое число. Были доказаны следующие результаты.

1) Для формы F_1 имеем

$$r_{[1,p,p,p]}(n) = \pi^2 \frac{n}{p^{3/2}} \mathfrak{S}_{[1,p,p,p]}(n) + O_\varepsilon\Big(p^\varepsilon\, n^{1/2}\, d(n)\Big), \tag{2}$$

$(n, 2p) = 1$; $d(n)$ – количество делителей n.

2) Для формы F_2 имеем

$$r_{[1,1,p,p]}(n) = \pi^2 \frac{n}{p} \mathfrak{S}_{[1,1,p,p]}(n) + O_\varepsilon\Big(p^\varepsilon\, n^{1/2}\, d(n)\Big), \quad (n,2p)=1. \tag{3}$$

3) Для формы F_3 имеем

$$r_{[1,1,1,p]}(n) = \pi^2 \frac{n}{\sqrt{p}} \mathfrak{S}_{[1,1,1,p]}(n) + O_\varepsilon\Big(p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\, n^{1/2}\, d(n)\Big), \quad (n,2p)=1. \tag{4}$$

Асимптотические формулы (2), (3) действуют при

$$n \gg_\varepsilon D_i^{1+\varepsilon} \quad (i=1,2), \tag{5}$$

где D_i – детерминант F_i, а асимптотическая формула (4) действует при

$$n \gg_\varepsilon D_3^{2+\varepsilon}. \tag{6}$$

Одновременно для каждой из величин $r_{[1,p,p,p]}(n)$, $r_{[1,1,p,p]}(n)$, $r_{[1,1,1,p]}(n)$ при выполнении соответствующих условий (5), (6) имеет место оценка снизу

$$\gg_\varepsilon \frac{n}{\sqrt{D_i}\,\log\log n} \quad (i=1,2,3).$$

В настоящей работе доказана асимптотическая формула для $r_f(n)$, где $f=[1,1,1,D]$, отличного от (4) вида. Эта формула действует при $n \gg_\varepsilon D^{1+\varepsilon}$, причем граница является неулучшаемой. Для доказательства мы используем метод Е. П. Голубевой [8], основанный на большом решете (по поводу других применений метода Е. П. Голубевой см. [9, 10]). Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть* $f=f(x,y,z,w)=x^2+y^2+z^2+Dw^2$, *где* $D>1$, $D\neq d^2$; $\sqrt{n}/\sqrt{D}=n^\theta$, $0<\theta<\frac{1}{2}$. *Пусть* $(n,2D)=1$. *Тогда*

$$r_f(n) = \pi^2 \frac{n}{\sqrt{D}}\, \mathfrak{S}_f(n) + O\left(\frac{n^{1+\varepsilon-c(\theta)}}{\sqrt{D}}\right), \tag{7}$$

где $c(\theta)>0$, ε *– сколь угодно малое постоянное положительное число,* $O(\cdots)=O_\varepsilon(\cdots)$. *Выражение для* $c(\theta)$ *даётся в конце работы.*

Замечание. Как легко видеть, числа $\{n \mid n\leqslant D-1, n\equiv 7 (\mathrm{mod}\,8), (n,2D)=1\}$ представимы родом формы $[1,1,1,D]$, но не представимы самой этой формой. Отсюда следует, что границу действия нашей асимптотической формулы нельзя довести до $n \gg D^\alpha$, где $\alpha<1$.

2. В этом пункте дается доказательство теоремы. Пусть $E_3 = E_3(x,y,z) = x^2+y^3+z^2$, $r_3(n)$ – количество представлений n формой E_3. Имеем

$$r_f(n) = \sum_{-\sqrt{\frac{n}{D}}\leqslant w\leqslant\sqrt{\frac{n}{D}}} r_3\bigl(n - Dw^2\bigr).$$

Будем рассматривать сумму

$$\sum_{0\leqslant w\leqslant\sqrt{\frac{n}{D}}} r_3\bigl(n - Dw^3\bigr).$$

Введем обозначение для гауссовой суммы:

$$S(E_3, a, q) = \sum_{x,y,z \pmod q} e^{\frac{2\pi i a E_3(x,y,z)}{q}}.$$

Известно (см. [11]), что

$$r_3(n) = 2\pi\sqrt{n}\,\mathfrak{S}_3(n),$$

где

$$\mathfrak{S}_3(n) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-3} \sideset{}{'}\sum_{a \pmod q} S(E_3,a,q)e^{-\frac{2\pi i a n}{q}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-3} R(n,q)$$

– сингулярный ряд; $\sideset{}{'}\sum\limits_{a \pmod q}$ означает суммирование по приведенной системе вычетов.

Опишем суть метода Е. П. Голубевой [8]. Пусть $0 < A < 1$ – постоянное число,

$$Q(x,y,z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2,$$

$a_i > 0$ $(i = 1,2,3)$ – целые числа, $D = a_1a_2a_3$. Е. П. Голубева вычислила асимптотику суммы ($2k \geqslant 2$ – четное число)

$$\sum_{\substack{m=n-w^{2k}\\ 0\leqslant w\leqslant An^{\frac{1}{2k}}}} \sqrt{m}\,\mathfrak{S}_Q(m), \tag{8}$$

где $\mathfrak{S}_Q(m)$ – сингулярный ряд задачи

$$m = Q(x,y,z).$$

Пусть
$$L\left(s,\left(\frac{-m}{\cdot}\right)\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{-m}{r}\right)r^{-s}\quad(\operatorname{Re}s>1)$$

– L-ряд Дирихле с квадратичным характером $\left(\frac{-m}{\cdot}\right)$. Рассмотрим прямоугольник
$$\sigma\leqslant\operatorname{Re}s\leqslant 1,\quad|\operatorname{Im}s|<T\quad\left(\sigma>\frac{1}{2},\ T>1\right).\tag{9}$$

Пусть $S(Q,a,q)$ – гауссова сумма, ассоциированная с тернарной формой $Q(x,y,z)$,
$$R(m,q)=\sum_{a(\operatorname{mod}q)}{}' S(Q,a,q)\,e^{-\frac{2\pi i a m}{q}}.$$

Е. П. Голубева заметила, что при отсутствии у $L\left(s,\left(\frac{-4mD/d^2}{\cdot}\right)\right)$, $d^2|m$, $(d,2)=1$, нулей в прямоугольнике (9) сингулярный ряд
$$\mathfrak{S}_Q(m)=\sum_{q=1}^{\infty}R(m,q)/q^3$$

хорошо приближается коротким отрезком
$$\sum_{q\leqslant M}R(m,q)/q^3.$$

Связь $\mathfrak{S}_Q(m)$ с L-рядами задается соотношением ($\operatorname{Re}s>0$)
$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{R(m,q)}{q^{3+s}}=C(m,s)\sum_{\substack{d^2|m\\(d,2)=1}}\frac{L\left(1+s,\left(\frac{-4mD/d^2}{\cdot}\right)\right)}{d^{1+2s}},$$

где $C(m,s)$ – несущественный множитель.

Вклад тех $m=n-w^{2k}$, $0\leqslant w\leqslant n^{\frac{1}{2k}}$, в (8), для которых $L\left(s,\left(\frac{-4mD/d^2}{\cdot}\right)\right)$, $d^2|m$, $(d,2)=1$, возможно, имеют нули в (9), оценивается сверху посредством большого решета (см. плотностные теоремы Монтгомери в [12]). Эти соображения позволяют быстро получить асимптотику суммы (8).

Будем применять результаты Е. П. Голубевой в форме, предложенной В. А. Быковским (см. [9, лемма 3]). Пусть

$$I=\sum_{0\leqslant w\leqslant\sqrt{\frac{n}{D}}}\sqrt{n-Dw^2}\,\mathfrak{S}_3(n-Dw^2).$$

По [8, 9] имеем

$$I=\sum_{0\leqslant w\leqslant n^\theta}\sqrt{n-Dw^2}\left(\sum_{q=1}^{\infty}\frac{R(n-Dw^2,q)}{q^3}\exp\left(\frac{-q}{M}\right)\right)+O_\varepsilon(R),$$

где

$$R=n^{1/2+\varepsilon}\left(n^{\frac{4(1-\sigma)}{\sigma}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{D}}\,M^{-(1-\sigma)}\right),\quad 1/2<\sigma<1,\quad M\geqslant 1.$$

Меняем порядок суммирований:

$$I=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^3}\exp\left(\frac{-q}{M}\right)\sideset{}{'}\sum_{a(\operatorname{mod} q)}S(E_3,a,q)\times$$

$$\times e^{-\frac{2\pi i a n}{q}}\sum_{0\leqslant w\leqslant n^\theta}\sqrt{n-Dw^2}\,e^{\frac{2\pi i a D w^2}{q}}+O_\varepsilon(R). \qquad (10)$$

Рассмотрим сумму

$$I_1=\sum_{0\leqslant w\leqslant n^\theta}\sqrt{n-Dw^2}\,e^{\frac{2\pi i a D w^2}{q}}.$$

Пусть $w=w_2q+w_1$. Тогда

$$I_1=\sum_{w_1(\operatorname{mod} q)}\left(\frac{n}{q\sqrt{D}}\int_0^1\sqrt{1-X^2}\,dX+O_\varepsilon\left(\frac{n^{1/2+\varepsilon}}{\sqrt{D}}\right)\right)e^{\frac{2\pi i a D w_1^2}{q}}. \qquad (11)$$

Очевидно,

$$\int_0^1\sqrt{1-X^2}\,dX=\frac{\pi}{4}.$$

Соединяя (10) и (11), имеем

$$I=\frac{\pi n}{4\sqrt{D}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^4}\exp\left(\frac{-q}{M}\right)\cdot$$

$$\cdot \sum_{a (\operatorname{mod} q)}{}' S(f,a,q)\, e^{-\frac{2\pi i a n}{q}} + O_\varepsilon(\mathcal{L}),$$

где $S(f,a,q)$ – гауссова сумма, ассоциированная с формой $f = x^2+y^2+z^2+Dw^2$,

$$\mathcal{L} = n^{1/2+\varepsilon}\left(\frac{M}{\sqrt{D}} + n^{\frac{4(1-\sigma)}{\sigma}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{D}}\, M^{-(1-\sigma)}\right). \qquad (12)$$

Пусть

$$\mathfrak{S}_f(n) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{a (\operatorname{mod} q)}{}' S(f,a,q)\, e^{-\frac{2\pi i a n}{q}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} R_1(n,q)$$

– сингулярный ряд задачи

$$n = [1,1,1,D].$$

Имеем ($c > 0$)

$$I_2 = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \exp\left(\frac{-q}{M}\right) R_1(n,q) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = c} \Gamma(s)\, M^s \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R_1(n,q)}{q^{4+s}}\right) ds.$$

Известно (см., например, [13, 14]), что

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R_1(n,q)}{q^{4+s}} = \prod_{p \mid 2nD} X_p(n,s) \cdot L^{-1}(s+2,\chi),$$

где χ – характер $(\operatorname{mod} D)$, $X_p(n,s)$ – всюду голоморфный множитель, выражение для которого даётся в [13, 14]. По теореме о вычетах получаем

$$I_2 = \mathfrak{S}_f(n) + \int\limits_{\operatorname{Re} s = -1+\varepsilon} \Gamma(s)\, M^s \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R_1(n,q)}{q^{4+s}}\right) ds =$$

$$= \mathfrak{S}_f(n) + O_\varepsilon\left(n^\varepsilon / M\right),$$

поскольку

$$\prod_{p \mid 2nD} X_p(n, -1+\varepsilon) \ll n^\varepsilon.$$

Имеем теперь

$$I = \frac{\pi n}{4\sqrt{D}}\,\mathfrak{S}_f(n) + O_\varepsilon(\mathcal{L}) + O_\varepsilon\left(\frac{n^{1+\varepsilon}}{\sqrt{D}\,M}\right).$$

Последний член можно отбросить, поскольку

$$\mathcal{L} \gg_\varepsilon \frac{n^{1+\varepsilon}}{\sqrt{D}\,M}.$$

Остается оптимально выбрать параметры в (12). Приравнивая первый и третий члены суммы в (12), получим

$$M = n^{\frac{1}{2(2-\sigma)}}.$$

Приравнивая далее первый и второй члены, получаем

$$\theta = \frac{1-\sigma}{2(2-\sigma)} \cdot \frac{7(16/7-\sigma)}{\sigma}.$$

При $0 < \theta < \frac{1}{2}$ $\sigma = \sigma(\theta)$ изменяется в пределах $c_0 < \sigma(\theta) < 1$, где $c_0 \approx \frac{9}{10}$. Положим

$$c(\theta) = \frac{1-\sigma}{2(2-\sigma)}.$$

Имеем

$$\mathcal{L} = \frac{n^{1+\varepsilon-c(\theta)}}{\sqrt{D}},$$

и теорема доказана.

Литература

1. W. A. Tartakowsky, *Die Gesamtheit der Zahlen, die durch eine positive quadratische Form $F(x_1, x_2, \dots, x_s)(s \geqslant 4)$ darstellbar sind,* Изв. АН СССР. Отд. физ.-мат. наук **7** (1929), 111–122, 165–196.
2. G. L. Watson, *Quadratic diophantine equations,* Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. **A 253** (1960), 227–254.
3. J. S. Hsia and M. I. Icaza, *Effective version of Tartakowsky's theorem,* Acta Arith. **89**, No. 3 (1999), 235–253.
4. А. В. Малышев, *О представлении целых чисел положительными квадратичными формами,* Тр. Мат. ин-та АН СССР **65** (1962), 212 с.
5. О. М. Фоменко, *Оценки внутреннего произведения Петерсона с приложением к теории кватернарных квадратичных форм,* Докл. АН СССР **152**, No. 3 (1963), 559–562.

6. О. М. Фоменко, *Оценки скалярных произведений Петерсона параболических форм и арифметические приложения,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 158–179.
7. О. М. Фоменко, *Применения формулы Петерсона для билинейной формы от коэффициентов Фурье параболических форм,* Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 143–166.
8. Е. П. Голубева, *О проблеме Варинга для тернарной квадратичной формы и произвольной четной степени,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 27–37.
9. В. А. Быковский, *Плотностные теоремы и среднее значение арифметических функций на коротких интервалах,* Зап. научн. семин. ПОМИ **212** (1994), 56–70.
10. О. М. Фоменко, *Распределение целых точек на четырехмерной сфере,* Зап. научн. семин. ПОМИ **263** (2000), 226–236.
11. P. T. Bateman, *On the representations of a number as the sum of three squares,* Trans. Amer. Math. Soc. **71**, No. 1 (1951), 70–101.
12. Г. Монтгомери, *Мультипликативная теория чисел,* М., 1974.
13. Г. А. Ломадзе, *О числе представлений чисел квадратичными формами с четырьмя переменными,* Труды Тбилисского мат. ин-та **40** (1971), 106–139.
14. Т. В. Вепхвадзе, *К аналитической теории квадратичных форм,* Труды Тбилисского мат. ин-та **72** (1983), 12–31.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@ pdmi.ras.ru

Поступило 12 февраля 2001 г.