ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2000, т. 228, с. 52–60

УДК 517.5

Тауберовы теоремы типа Винера для обобщенных функций на полуоси[1]

©2000 г. Ю. Н. Дрожжинов[2], Б. И. Завьялов[2]

Поступило в сентябре 1999 г.

Формулируются тауберовы теоремы типа Винера для обобщенной мультипликативной свертки и приводятся некоторые их приложения к дифференциальным уравнениям и интегральным преобразованиям.

ВВЕДЕНИЕ

Тауберова теория интенсивно развивалась в первой половине нашего столетия и относилась в основном к функциям или мерам одной независимой переменной. Ее результаты подытожены в работах Винера [10] и Харди [11]. Однако потребности современной теоретической и математической физики поставили задачу распространения классической тауберовой теории для мер на более общие объекты — обобщенные функции как одной, так и многих переменных. Эта проблематика была инициирована фундаментальной работой Боголюбова, Владимирова, Тавхелидзе [1] в связи с теоретическим обоснованием автомодельного поведения при высоких энергиях и больших переданных импульсах величин квантовой теории поля. Задача состояла в том, чтобы выяснить, не противоречит ли наблюдаемое на эксперименте поведение формфакторов лептон-адронного рассеяния общим аксиомам квантовой теории поля, впервые сформулированным Н.Н. Боголюбовым. После этой работы развернулись систематические исследования по тауберовой теории обобщенных функций как в чисто математическом плане, так и в плане их применения в теоретической и математической физике. Обзор литературы по этой проблематике можно найти в [7].

Владимиров [2] распространил известную тауберову теорему Харди–Литлвуда на многомерный случай. Завьялов [3, 4] ввел понятие квазиасимптотики и применил его для изучения асимптотических свойств формфакторов и спектральных функций в представлении Йоста–Лемана–Дайсона. Владимиров и Завьялов [5, 6] распространили результаты об автомодельном поведении формфакторов на произвольные причинные функции и придали этим результатам характер тауберовых и абелевых теорем. Монография Владимирова, Дрожжинова, Завьялова [7] посвящена многомерным тауберовым теоремам для обобщенных функций и их применениям в анализе, математической физике и теории дифференциальных уравнений. Дрожжинов и Завьялов [8, 9] распространили известную тауберову теорему Винера на случай неограниченных (обобщенных) функций. В данной работе мы изложим результаты по этой тематике, полученные в Отделе математической физики Математического института им. В.А. Стеклова в последнее время.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00080) и программы “Ведущие научные школы” (проект 96-15-96131).

[2]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

1. ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Предварительно дадим некоторые определения и приведем необходимые сведения из теории обобщенных функций. Пусть a, b — нецелые вещественные числа, $a > b$. Обозначим через Π_b^a полосу $\Pi_b^a = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\colon b < y < a,\ x \in \mathbb{R}\}$ и через $\overline{\Pi}_b^a$ ее замыкание. При нецелых $x < -1$ определим функцию $\langle x \rangle$ формулой $\langle x \rangle = [-x - 1]$, где $[\xi]$ — целая часть числа ξ. Многочлен Тейлора функции $\varphi(t)$ в нуле порядка m обозначается $T_\varphi^m = \sum_{j=0}^m \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} t^j$.

Положительная и непрерывная при достаточно больших k функция $\rho(k)$ называется автомодельной (правильно меняющейся), если существует предел

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} = \psi(t),$$

причем сходимость равномерная по t на каждом компакте полуоси $(0, \infty)$. Легко видеть, что $\psi(t) = t^\alpha$ при некотором α. В этом случае функцию $\rho(k)$ называем *автомодельной порядка* α (см. [13]).

Стандартное пространство Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций обозначаем, как обычно, через $\mathcal{S}$, так что $\mathcal{S}'$ — стандартное пространство обобщенных функций медленного роста. Пространство обобщенных функций медленного роста с носителями на $[0, +\infty)$ обозначается через $\mathcal{S}'_+$, оно является сопряженным к пространству $\mathcal{S}_+$ бесконечно дифференцируемых на $[0, +\infty)$ функций таких, что

$$\max_{|j|\le m} \sup_{0\le t<+\infty} (1 + t^m)|\varphi^{(j)}(t)| < \infty, \qquad m = 0, 1, \dots$$

Определение 1. Говорят, что обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ обладает квазиасимптотикой относительно функции $\rho(k)$ на функции $\varphi(t)$, если существует

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = \text{const}. \tag{1}$$

Если существует предел

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(f(kt), \varphi(t)\right) = c_\varphi \quad \text{для любой } \varphi(t) \in \mathcal{S}_+, \tag{2}$$

то мы говорим, что $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

Если

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = O(1) \quad \text{при } k \to +\infty \ \text{ для любой } \varphi(t) \in \mathcal{S}_+, \tag{3}$$

то говорят, что $f(t)$ квазиасимптотически ограничена относительно $\rho(k)$.

Отметим, что если $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно некоторой $\rho(k)$, то $\rho(k)$ — обязательно автомодельная функция какого-то порядка α, а c_φ в формуле (2) равно $\text{const}(f_{\alpha+1}(t), \varphi(t))$, где $f_\beta(t)$ — лиувиллево ядро дробного интегрирования и дифференцирования:

$$f_\beta(t) = \begin{cases} \dfrac{\Theta(t) t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & \text{при } \beta > 0, \\[2ex] \dfrac{d^N}{dt^N} f_{\beta+N}(t) & \text{при } \beta \le 0,\ \beta + N > 0. \end{cases}$$

Здесь $\Theta(t)$ — функция Хевисайда: $\Theta(t) = 0$ при $t < 0$ и $\Theta(t) = 1$ при $t > 0$.

Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'_+$. Обобщенная функция $f^{(-\beta)}(t)$, равная (аддитивной) свертке обобщенных функций f и f_β, называется *первообразной* (при $\beta < 0$ *производной*) *порядка* β.

Обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ тогда и только тогда, когда существует N такое, что функция $f^{(-N)}(t)$ непрерывна и $f^{(-N)}(t) \sim t^N \rho(t)$ при $t \to +\infty$.

Нам понадобятся обобщенные функции $t_+^\lambda \ln^m t_+ \in \mathcal{S}'_+$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ (см. [12]). Напомним, что при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ они являются регулярными обобщенными функциями, совпадающими с $\Theta(t)(\ln t)^m t^\lambda$. Кроме того, они аналитичны по λ во всей комплексной плоскости, кроме $\lambda = -1, -2, \dots$, в которых они имеют полюсы порядка $m+1$. Обобщенные функции $t_+^{-n} \ln^m t_+$, $n = 1, 2, \dots$, определяются как коэффициенты при $(\lambda + n)^m$ в лорановском разложении функции t_+^λ в точке $\lambda = -n$.

Пусть M, N — целые неотрицательные числа, a, b — вещественные нецелые числа, $a > b$, и $\delta > 0$. Пусть далее $\varphi(t) \in \mathcal{S}_+$. Положим

$$\mathcal{P}_{b,N,\delta}^{a,M}[\varphi] = \max_{j \le N} \int_0^\delta t^b \left| \left(t\frac{d}{dt} \right)^j \{\varphi(t) - T_\varphi^{\langle b \rangle}(t)\} \right| dt + \max_{j \le M} \int_\delta^\infty t^a \left| \left(t\frac{d}{dt} \right)^j \varphi(t) \right| dt + \sum_{j=0}^{\langle b \rangle} \left| \varphi^{(j)}(0) \right|. \quad (4)$$

Напомним, что $\langle b \rangle = [-b-1]$ при $b < -1$. Если $b > -1$, то тейлоровский многочлен $T_\varphi^{\langle b \rangle}(t)$ в (4) отсутствует.

Пополнение пространства бесконечно дифференцируемых на $[0, +\infty)$ и быстро убывающих вместе со всеми своими производными функций по этой норме обозначается $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$.

Функции $\varphi \in \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ можно описать следующим образом:

$$\varphi(t) = c_0 + \frac{c_1}{1!} t + \ldots + \frac{c_{\langle b \rangle}}{\langle b \rangle !} t^{\langle b \rangle} + \psi(t), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} &t^b |t^j \psi^{(j)}(t)| \in L_1(0, \delta), && 0 \le j \le N, \\ &t^a |t^j \varphi^{(j)}(t)| \in L_1(\delta \pm \varepsilon, +\infty), && 0 \le j \le M. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь производные понимаются в обобщенном смысле и ε любое, $0 < \varepsilon < \delta$, причем знак плюс во второй формуле (6) берется при $M > N$ и знак минус — в случае $M \le N$. В случае $b > -1$ полином в (5) отсутствует.

Если $M = N$, то $\mathcal{S}_{b,N,\delta_1}^{a,M} = \mathcal{S}_{b,N,\delta_2}^{a,M}$ для любых δ_1 и δ_2, больших нуля. В этом случае значок δ мы опускаем.

Числа c_j, $j = 0, 1, \dots, \langle b \rangle$, определяются однозначно и являются естественным расширением понятия производных в нуле для функций из $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$. Всюду далее мы их обозначаем как $\varphi^{(j)}(0)$, так что $c_j = \varphi^{(j)}(0)$, $j = 0, 1, \dots, \langle b \rangle$. Соответственно $T_\varphi^{\langle b \rangle}(t) = \sum_{j=0}^{\langle b \rangle} \frac{c_j}{j!} t^j$.

Проективный предел по M и N пространств $\mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}$ обозначается как $\mathcal{S}_b^a$. Проективный предел по a и b этих пространств образует пространство $\mathcal{S}_+$, так что

$$\mathcal{S}_b^a = \mathcal{S}_{b,\infty}^{a,\infty} = \bigcap_{M,N \in \mathcal{Z}_+} \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a,M}, \qquad \mathcal{S}_+ = \bigcap_{a,b \in \mathbb{R}} \mathcal{S}_b^a.$$

Нам понадобятся следующие подпространства пространства $\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}$:

$$\overset{\circ}{\mathcal{S}}{}^{a,M}_{b,N,\delta} = \left\{\varphi(t) \in \mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta} \colon \varphi^{(j)}(0) = 0,\ j = 0, \dots, \langle a \rangle \right\},$$
$$\underset{\circ}{\mathcal{S}}{}^{a,M}_{b,N,\delta} = \left\{\varphi(t) \in \mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta} \colon \varphi^{(j)}(0) = 0,\ j = 0, \dots, \langle b \rangle \right\}.$$

Если $\varphi(t) \in \mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}$, то

$$\varphi(t) - T^{\langle a \rangle}_{\varphi}(t) \equiv \overset{\circ}{\varphi}(t) \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}{}^{a,M}_{b,N,\delta}. \tag{7}$$

Сопряженные пространства (пространства линейных непрерывных функционалов) образуют соответствующие пространства обобщенных функций и обозначаются, как обычно, штрихом сверху. Так, например, $f \in (\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta})'$ означает, что f — линейный непрерывный функционал над пространством основных функций $\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}$.

При $a > b$ преобразование Меллина основных функций $\varphi(t) \in \mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}$ определяется формулой

$$\mathcal{M}[\varphi] \equiv \widehat{\varphi}(z) = \int_0^{+\infty} t^{-iz} \left[\varphi(t) - T^{\langle y \rangle}_{\varphi}(t)\right] dt, \qquad z = x + iy \in \overline{\Pi}{}^a_b \tag{8}$$

(см. [12]). Этот интеграл корректно определен при $b \le y \le a$, кроме, возможно, целых отрицательных значений y, находящихся между a и b, и определяет в полосе Π^a_b аналитическую функцию, имеющую, быть может, простые полюсы в точках $z = -ik$, $k = 1, 2, \dots$, попавших в эту полосу. Вне полюсов, скажем в $\overline{\Pi}{}^a_b \cap \{|x| > 1\}$, функция $|\widehat{\varphi}(z)|$ ограничена. Легко проверяется, что для любого целого $p \le \min\{N, M\}$ имеем $(t\frac{d}{dt})^p \varphi \in \mathcal{S}^{a,M-p}_{b,N-p,\delta}$ и

$$\mathcal{M}\left[\left(t\frac{d}{dt}\right)^p \varphi(t)\right] = (iz - 1)^p \widehat{\varphi}(z).$$

Отсюда вытекает, что $|\widehat{\varphi}(z)|$ убывает в полосе $\overline{\Pi}{}^a_b$ при $|z| \to \infty$ по крайней мере как $|z|^{-p}$.

Для $\varphi(t) \in \mathcal{S}_+$ преобразование Меллина $\widehat{\varphi}(z)$ есть аналитическая функция в комплексной плоскости, кроме, может быть, точек $-ik$, $k = 1, 2, \dots$, в которых у нее простые полюсы с вычетами $\frac{1}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0)$.

Если $\varphi(t) \in \underset{\circ}{\mathcal{S}}{}^a_b$, то $\widehat{\varphi}(z)$ есть аналитическая функция в Π^a_b, убывающая быстрее любой степени $|z|^{-1}$ при $|z| \to \infty$.

Если $a < -1$, то преобразование Меллина имеет нетривиальное ядро. Это ядро состоит из всех многочленов степени $\langle a \rangle$.

Мультипликативная свертка основных функций φ_1 и φ_2 из $\mathcal{S}_+$ определяется формулой

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} \varphi_1\left(\frac{t}{\tau}\right) \varphi_2(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \int_0^{\infty} \varphi_1(\tau) \varphi_2\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau}. \tag{9}$$

Функция $\psi(t)$ определена и бесконечно дифференцируема при $t \in (0, +\infty)$. Справедливо следующее

Утверждение 1. *Операция свертки* (9) *определяет непрерывное билинейное отображение*

$$\overset{\circ}{\mathcal{S}}{}^{a,M_1}_{b,M_1,\delta} \times \underset{\circ}{\mathcal{S}}{}^{a,M_2}_{b,M_2,\delta} \to \overset{\circ}{\mathcal{S}}{}^{a,M_1+M_2}_{b,M_1+M_2,\delta}. \tag{10}$$

При этом справедлива формула

$$\widehat{\psi}(z) = \widehat{\varphi}_1(z) \cdot \widehat{\varphi}_2(z) \qquad \text{при } b \le \operatorname{Im} z \le a. \tag{11}$$

Пусть $f \in (\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\eta})'$ и $\varphi \in \mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}$. Всюду далее будем считать $M \le N$. Тогда при больших k имеет смысл выражение $(f(kt), \varphi(t)) = \frac{1}{k}\left(f(t), \varphi(\frac{t}{k})\right)$.

Действительно, при $k\delta > \eta$ функция $\varphi\left(\frac{t}{k}\right) \in \mathcal{S}^{a,M}_{b,N,k\delta} \subset \mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\eta}$.

Определение 2. Пусть I — некоторое множество индексов и задана последовательность семейств $\varphi_k(t) = \{\varphi^\beta_k(t) \in \mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta},\ \beta \in I,\ k > 0\}$. Мы говорим, что $f(t)$ *обладает квазиасимптотикой на последовательности семейств* $\varphi_k(t)$ *относительно автомодельной функции* $\rho(k)$, если

$$\Big(f(kt), \varphi^\beta_k(t)\Big) \to c^\beta, \quad k \to \infty, \quad \forall \beta \in I. \tag{12}$$

Наша задача — найти условия, при которых из (12) следовало бы существование квазиасимптотики у $f(t)$ относительно автомодельной функции $\rho(k)$, т.е. выполнялось соотношение (2).

Лемма 1. *Пусть* $f \in (\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\eta})'$ *и* $\varphi \in \mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}$, *где* $M \le N$, $b < a$. *Тогда существуют постоянные* C *и* k_0 *такие, что при* $k > k_0$

$$\left| (f(kt), \varphi(t)) - \sum_{j=0}^{\langle a \rangle} \frac{1}{k^{j+1}} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} (f(t), t^j) \right| \le C k^a \mathcal{P}^{a,M}_{b,N,\delta}[\varphi]. \tag{13}$$

Если $a > -1$, *то сумма в* (13) *отсутствует.*

Следствие. *Пусть* $f \in (\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\eta})'$, *тогда*

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\langle a \rangle} c_j \delta^{(j)}(t) + g(t),$$

где семейство функционалов $\frac{1}{k^a} g(kt)$, $k \ge k_0 > 0$, *ограничено в* $(\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\eta})'$. *При этом*

$$c_j = \frac{1}{j!}(f(t), t^j), \qquad j = 0, \dots, \langle a \rangle .$$

Это следствие показывает, что наибольший интерес при изучении квазиасимптотики представляет случай $\alpha < a$.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Теорема 1. *Пусть* $f(t) \in (\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\eta})'$, $b < a$, $M \le N$, $\rho(k)$ — *автомодельная функция порядка* α, $b < \alpha < a$, *и задана последовательность семейств функций*

$$\left\{\varphi^\beta_\lambda(t) \in \mathcal{S}^{a+\varepsilon,M}_{b,N,\delta},\ \beta \in I,\ \lambda > \lambda_0\right\} \equiv \varphi_\lambda(t) \tag{14}$$

для некоторых $\lambda_0 > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ $(\alpha - \varepsilon > b)$ *со свойствами*

1) $\varphi^\beta_\lambda(t)$ *непрерывна по* λ *в* $\mathcal{S}^{a+\varepsilon,M}_{b,N,\delta}$, *при этом*

$$\mathcal{P}^{a+\varepsilon,M}_{b,N,\delta}[\varphi^\beta_\lambda(t)] < \text{const}, \tag{15}$$

где const *не зависит от* $\beta \in I$ *и* $\lambda > \lambda_0$;

2)

$$\forall\beta\in I \qquad \varphi_\lambda^\beta(t) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi_0^\beta(t) \quad \text{в } \mathcal{S}_{b,N,\delta}^{a+\varepsilon,M}; \tag{16}$$

3) *$\varphi_\lambda^\beta(t)$ бесконечно дифференцируема по λ (в смысле Фреше) в $\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M}$, причем существует $\sigma>0$ такое, что*

$$\mathcal{P}_{\alpha-\varepsilon,M}^{a,M}\left[\left(\lambda\frac{d}{d\lambda}\right)^p\left(\mathring{\varphi}_\lambda^\beta(t)-\mathring{\varphi}_0^\beta(t)\right)\right]\le\frac{c_p}{\lambda^\sigma}, \qquad p=0,1,\dots, \tag{17}$$

где c_p не зависит от $\lambda>\lambda_0$ и $\beta\in I$. Здесь $\mathring{\varphi}_\lambda^\beta(t)$ и $\mathring{\varphi}_0^\beta(t)$ определяются согласно (7).

Пусть еще семейство $\varphi_0(t)=\{\varphi_0^\beta(t),\ \beta\in I\}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) *существуют $A>0$ и $m\ge0$ такие, что*

$$\sup_{\beta\in I}|\widehat{\varphi}_0^\beta(z)|\ge\frac{A}{1+|z|^m} \qquad \text{при } z\in\Pi_{\alpha-\varepsilon}^{a+\varepsilon}. \tag{18}$$

Здесь $\widehat{\varphi}_0^\beta(z)$ — преобразование Меллина $\varphi_0^\beta(t)$;

б) *для любого $j=0,1,\dots,\langle\alpha-\varepsilon\rangle$ найдутся $\beta_j\in I$ такие, что*

$$\frac{d^j}{dt^j}\varphi_0^{\beta_j}(0)\ne0 \qquad \text{для } j=0,1,\dots,\langle\alpha-\varepsilon\rangle\,. \tag{19}$$

Тогда если обобщенная функция $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ на последовательности семейств $\varphi_\lambda(t)$, т.е.

$$\frac{1}{\rho(k)}\left(f(kt),\varphi_k^\beta(t)\right)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}c^\beta \qquad \forall\beta\in I, \tag{20}$$

причем существует постоянная c, не зависящая от $\beta\in I$, так что

$$\frac{1}{\rho(k)}\left|\left(f(kt),\varphi_k^\beta(t)\right)\right|\le c, \qquad k>k_0>0, \tag{21}$$

то $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$, т.е.

$$\frac{1}{\rho(k)}\left(f(kt),\varphi(t)\right)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}c_\varphi \qquad \forall\varphi(t)\in\mathcal{S}_+. \tag{22}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1, *кроме свойства* 3) (*см. формулу* (17)). *Вместо него потребуем, чтобы выполнялось следующее условие:*

3′) *для любого $M_1\ge0$*

$$\mathring{\varphi}_0(t)-\mathring{\varphi}_\lambda(t)\underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow}0 \qquad \text{в } {}^I\mathcal{S}_{\alpha-\varepsilon,M_1}^{a,M_1}. \tag{23}$$

Тогда заключение теоремы 1 *остается справедливым.*

3. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

В качестве применения вышеизложенных теорем рассмотрим квазиасимптотические свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Мы изложим его в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть $f(t) \in (\mathcal{S}_b^a)'$ и удовлетворяет уравнению*

$$\sum_{\ell=0}^{n} A_\ell(t) \frac{d^\ell}{dt^\ell} f(t) = g(t), \qquad t \geq t_0 > 0, \tag{24}$$

где $g(t) \in \mathcal{S}'_+$, а коэффициенты $A_\ell(t)$ бесконечно дифференцируемы, причем $A_\ell(t) = a_\ell t^\ell \times \times (1 + \gamma_\ell(t))$ и существует $\sigma > 0$ такое, что

$$\left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^j \gamma_\ell(t) \right| \leq \frac{c_j}{t^\sigma}, \qquad j = 0, 1, \ldots, \quad \ell = 0, 1, \ldots, n, \tag{25}$$

для некоторых постоянных c_j. Пусть $g(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α, $-1 < \alpha < a$, а для полинома $P(t\frac{d}{dt}) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell t^\ell \frac{d^\ell}{dt^\ell}$ выполнено условие

$$P(-iz) \neq 0, \qquad z \in \overline{\Pi}_\alpha^a. \tag{26}$$

Тогда $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

Следствие. *Если в условиях теоремы 3 $\alpha < -1$, но*

$$\alpha \neq -1, -2, \ldots, \tag{27}$$

то существуют постоянные $b_0, b_1, \ldots, b_{\langle\alpha\rangle}$ такие, что

$$f(t) - \sum_{j=0}^{\langle\alpha\rangle} b_j \delta^{(j)}(t)$$

обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

Как другое применение приведенных выше теорем мы сформулируем абелеву и тауберову теоремы для обобщенного интегрального преобразования Стилтьеса[3].

Обобщенное интегральное преобразование Стилтьеса задается формулой

$$F(z) = \left(f(t), \frac{\ln^n(c - \frac{t}{z})}{(c - \frac{t}{z})^s} \right), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty). \tag{28}$$

Здесь $n = 0, 1, \ldots$, $-\infty < s < +\infty$, $c > 0$, а логарифм определяется своей главной ветвью $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $|\arg z| < \pi$. Ядра этих интегральных преобразований

$$\psi\left(\frac{t}{z}\right) = \frac{\ln^n(c - \frac{t}{z})}{(c - \frac{t}{z})^s} \in \mathcal{S}_b^a, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty), \tag{29}$$

для любого $a < s - 1$ и любого $b < a$. Формула (28) для $f \in (\mathcal{S}_b^a)'$ определяет аналитическую функцию $F(z)$ во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по положительной части вещественной оси.

[3] Эти теоремы в несколько другой формулировке приведены в работе [9].

Справедлива следующая абелева

Теорема 4. *Пусть $f(t) \in (\mathcal{S}_b^a)'$, $a < s-1$, $b < a$, обладает квазиасимптотикой относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α при $b < \alpha < a$, тогда имеет место*

1)
$$\frac{1}{r\rho(r)} F(re^{i\beta}) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} c^\beta \qquad \forall \beta \in (0, 2\pi); \tag{30}$$

2) *существуют A, m и r_0 такие, что*
$$\frac{1}{r\rho(r)} |F(re^{i\beta})| \le \frac{A}{\sin^m \frac{\beta}{2}}, \qquad r > r_0, \quad \beta \in (0, 2\pi). \tag{31}$$

Обратную (тауберову) теорему мы сформулируем для случая $n = 1$.

Теорема 5. *Пусть $F(z)$ — аналитическая в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ функция, определяемая формулой*
$$F(z) = \left(f(t), \frac{\ln(c - \frac{t}{z})}{(c - \frac{t}{z})^s} \right), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty), \tag{32}$$
где $f(t) \in (\mathcal{S}_b^a)'$, $b < a < s-1$, $s > 0$, а $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α, $b < \alpha < a$, и выполнены условия (30) *и* (31)*. Обозначим через y_0 единственный на интервале $(-\infty, s-1)$ корень уравнения*
$$\ln c + \psi(s) = \psi(s - 1 - y), \qquad \text{где} \quad \psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z). \tag{33}$$
(Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.) Тогда

1) *если $y_0 < \alpha$, то $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$;*

2) *если $y_0 > \alpha$, то возможны следующие подслучаи:*

 2а) *если $y_0 = -1, -2, \dots$, то существует c_1 такое, что $f(t) - c_1 \delta^{(-y_0-1)}(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$;*

 2б) *если $y_0 \neq -1, -2, \dots$, то в свою очередь возможны подслучаи:*

  2б$_1$) *если $y_0 > a$, то $f(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$;*

  2б$_2$) *если $\alpha < y_0 < a$, то $f(t) - c_2 t_+^{y_0}$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ с некоторой постоянной c_2.*

Замечание 1. Если в условиях теоремы 5 вместо $s > 0$ считать $s < 0$, но $s \neq 0, -1, -2, \dots$, то уравнение (33), кроме нуля y_0, имеет и другие нули $y_1, y_2, \dots$, которые монотонно возрастают. Если ни один из них не равен $-1, -2, \dots$, то теорема 5 остается верной. Если же один из них совпадает с $-1, -2, \dots$ (а это может случиться только с одним из корней), скажем $y_j = -\ell$, где ℓ целое положительное, то, кроме контрчленов, которых требуют различные случаи теоремы 5, нужно вычесть еще один контрчлен $c_3 \delta^{(\ell-1)}(t)$ с некоторой постоянной c_3.

Замечание 2. Если в условиях теоремы 5 $s = 0, -1, -2, \dots$, то вместо исследования корней уравнения (33) нужно исследовать производные в нуле у функции $(c+t)^{-s} \ln(c+t)$. Если
$$\frac{d^{j_\ell}}{dt^{j_\ell}} \left((c+t)^{-s} \ln(c+t) \right) \Big|_{t=0} = 0, \qquad \ell = 1, 2, \dots, N, \tag{34}$$
то существуют постоянные c_ℓ такие, что $f(t) - \sum_{\ell=1}^N c_\ell \delta^{(j_\ell)}(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н.Н., Владимиров В.С., Тавхелидзе А.Н.* Об автомодельной асимптотике в квантовой теории поля. II // ТМФ. 1972. Т. 12, №3. С. 305–330.
2. *Владимиров В.С.* Многомерное обобщение тауберовой теоремы Харди–Литлвуда // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1976. Т. 40. С. 1084–1101.
3. *Завьялов Б.И.* Автомодельная асимптотика электромагнитных формфакторов и поведение их фурье-образов в окрестности светового конуса // ТМФ. 1973. Т. 17, №2. С. 178–188.
4. *Завьялов Б.И.* Квазиасимптотика обобщенных функций и автомодельность электромагнитных формфакторов // ТМФ. 1974. Т. 19, №2. С. 163–171.
5. *Владимиров В.С., Завьялов Б.И.* Тауберовы теоремы в квантовой теории поля // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1980. Т. 15. С. 95–130. (Итоги науки и техники).
6. *Владимиров В.С., Завьялов Б.И.* Автомодельная асимптотика причинных функций и их поведение на световом конусе // ТМФ. 1982. Т. 50, №2. С. 163–194.
7. *Владимиров В.С., Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И.* Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986.
8. *Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И.* Тауберова теорема типа Винера для обобщенных функций медленного роста // Мат. сб. 1998. Т. 189, №7. С. 91–130.
9. *Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И.* Теоремы типа Винера для обобщенных функций и интегральное преобразование Стилтьеса // Докл. РАН. 1998. Т. 362, №2. С. 156–159.
10. *Wiener N.* Tauberian theorems // J. Ann. Math. 1932. V. 33, N 1. P. 1–100.
11. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иностр. лит., 1951.
12. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. Вып. 1.
13. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.