



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

D. A. Krylov, N. I. Sidnyaev, A. A. Fedotov, Mathematical modelling of temperature distribution, *Mat. Model.*, 2013, Volume 25, Number 7, 3–27

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.89

March 19, 2025, 08:01:56



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

© 2013 г. *Д.А. Крылов, Н.И. Сидняев, А.А. Федотов*

МГТУ им. Н.Э. Баумана
dmitrykrylov@rambler.ru, sidnyaev@yandex.ru, le-tail@list.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке ОАО «Газпром».

Статья посвящена вопросам математического моделирования и вычислительного эксперимента в проблемах по составлению прогноза изменения температурного режима вечномерзлых грунтов, оснований зданий и сооружений в криолитозоне. Эти исследования позволяют осуществлять качественный подход к проведению тепловых расчетов грунтов оснований для принятия проектных решений по обеспечению устойчивости и эксплуатационной надежности оснований и фундаментов сооружений.

Ключевые слова: фазовые переходы, задача Стефана, тепломассоперенос, метод контрольного объема, вечномерзлые грунты, криолитозон, термостабилизация, температурное поле.

MATHEMATICAL MODELLING OF TEMPERATURE DISTRIBUTION

D.A. Krylov, N.I. Sidnyaev, A.A. Fedotov

Bauman Moscow State Technical University

This paper is dedicated to mathematical modeling questions and calculation experiment ones. They are about problems of temperature change forecasting for permafrost ground, foundations and buildings constructed on cryolithozone. This investigation makes it possible to carry out ground temperature calculation for making project decisions to provide construction foundations stability and their exploitation reliability.

Key words: phase transitions, Stephan problem, heat and mass transfer, control volume method, permafrost, cryolithozone, thermal stabilization, temperature field.

Введение

Составление прогноза изменений температурного режима грунтов является необходимым элементом инженерно-геологического обоснования строительства геотехнических объектов в районах распространения вечномерзлых грунтов.

При проектировании, как правило, используются аналитические и численные методы. Выбор того или иного метода определения составляющих температурного режима или режима в целом зависит от конкретной задачи прогноза и этапа изысканий.

Методика моделирования комплексной системы из геотехнических сооружений и примыкающих массивов пород учитывает важнейшую особенность задачи – ее многофакторность. На начальных этапах выполняется предварительный отбор определяющих

параметров, характеризующих среду и объект по признакам их наибольшего влияния на процессы. На основе особенностей внешних воздействий процессов производства на среду разработаны направления усовершенствования математических моделей переноса тепла и влаги. Под температурным полем грунтовой области исследований в какой-либо момент времени понимается совокупность значений температур грунта (распределение температур) в различных точках области исследований в этот момент времени. К характеристикам температурного режима грунтов также относят среднегодовую температуру грунтов, глубины оттаивания – промерзания и т.п.

Процессы тепломассопереноса в грунтовых средах описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, дополненными рядом слагаемых и соответствующими краевыми условиями. В уравнения включены дополнительные элементы: слагаемое, учитывающее плотность распределенных источников тепла; гравитационная составляющая; слагаемые, учитывающие диффузионный перенос влаги. В связи с повышенными требованиями к точности вычислений в разрешающих уравнениях учитываются теплопередача за счет диффузионного переноса и перенос влаги, обусловленный градиентом температуры. В уточненные уравнения теплового и водного балансов включены параметры, характеризующие крутизну и ориентацию склонов, а также интенсивность испарения, осадков, стока, фильтрации в породы на конкретных площадках. При решении частных задач отдельные слагаемые в разрешающих уравнениях могут опускаться. При наличии зоны насыщения перенос влаги описывается известным уравнением фильтрации. Для исследования криолитозоны очевидно, что при усложнении исследуемых задач до уровня, недоступного прямому физическому эксперименту, должны использоваться косвенные данные и математические методы. Если задачи оказываются недоступными точным или приближенным аналитическим методам, то естественным основным аппаратом исследования таких задач становятся численные методы.

Под тепловой задачей Стефана в широком смысле слова понимают в настоящее время класс математических моделей, описывающих тепловые, диффузионные или даже термодиффузионные процессы, сопровождающиеся фазовыми превращениями среды и поглощением или выделением скрытой теплоты [1]. Такие процессы протекают, например, при образовании и эволюции внутреннего строения Земли и полярных льдов в криолитозоне, а также в ряде других областей науки и практики. Наиболее характерной особенностью этих процессов, из-за которых их математические модели нелинейны и трудны для анализа, являются неизвестные заранее («свободные») границы между различными фазами (в случае однородного вещества) или «многофазная зона» (в многокомпонентной среде), определяемые с помощью поверхностей уровня функций, описывающих термодиффузионное состояние системы [1-7].

Во многих работах [1-10], как правило, рассматривается однофазная постановка задачи в полупространстве, когда происходит кристаллизация жидкой или плавление твердой фазы, находящихся при температуре фазового перехода, под воздействием соответствующей постоянной температуры на границе. В таких работах рассмотрена двухфазная постановка задачи о «тепловом ударе», когда в начальный момент приходят в соприкосновение два полупространства, заполненные различными фазами, находящимися при постоянных температурах, отличных от температуры фазового перехода. В этих постановках на поверхности раздела фаз кроме условия изотермичности выписано также соотношение («условие Стефана»), выражающее закон сохранения энергии с уче-

том скрытой теплоты. Все эти постановки автомодельны и были решены с помощью интеграла вероятностей. Уделено место однофазной постановке задачи о промерзании воды в полупространстве, находящейся при температуре фазового перехода, под воздействием переменной температуры на границе. Для этой задачи приведено формальное решение в виде степенного ряда по пространственной переменной, даны приближенные решения для описания эволюции полярных льдов, выписано решение типа «бегущей волны» и в простейшем виде рассмотрена постановка, которую в наше время можно было бы назвать «обратной задачей Стефана» [7].

Принципиально новую точку зрения на сущность задачи Стефана высказали в начале пятидесятых годов А.Н. Тихонов и А.А. Самарский [1, 2]. Основная идея этого подхода состоит во введении понятия «эффективной» теплоемкости, включающей в себя также скрытую теплоту фазового перехода, сосредоточенно выделяющуюся на поверхности раздела фаз. Это дает возможность с использованием дельта-функции Дирака записать единое квазилинейное уравнение энергии сразу во всей области, занятой теплоносительной средой, причем условие Стефана является следствием этого уравнения. На этом пути с помощью процесса сглаживания коэффициентов полученной математической модели был разработан эффективный метод численного анализа нестационарной многомерной задачи Стефана. Основанная на указанной идее энтальпийная форма записи уравнения энергии послужила также отправным пунктом для качественного анализа многомерной задачи Стефана.

Для многомерных задач с фазовым переходом использование численных методов с явным выделением границы раздела фаз во многих случаях связано с алгоритмическими сложностями и большими вычислительными затратами. Для приближенного решения таких задач широкое распространение получили методы сквозного счета. Для этого используется обобщенная формулировка классической задачи Стефана. На основе методов решения квазилинейных задач теплопроводности строятся соответствующие численные методы решения задачи Стефана. В таких задачах используется и энтальпийная формулировка задачи Стефана, и в качестве неизвестной выступает не температура, а энтальпия [7]. Для решения многомерных задач используются экономичные разностные схемы [3, 4].

1. Постановка задачи. Математическая модель

В настоящей постановке задачи требуется найти распределение температуры в среде с фазовыми переходами твердое тело – жидкость. Тепловое состояние такой среды с учетом теплоты фазового перехода описывается уравнением теплопроводности вида

$$\begin{aligned} [c(x, y, z, u)\rho(x, y, z, u) + Q\delta(u - u^*)] \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x, y, z, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(x, y, z, u) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(x, y, z, u) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + s(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где c – удельная теплоемкость; ρ – плотность; λ – коэффициент теплопроводности; $u(x, y, z, t)$ – температура среды; u^* – температура фазового перехода; Q – теплота фазового перехода; s – мощность внутренних источников тепла; $\delta(u - u^*)$ – дельта-функция.

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее *начальному условию*

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad (1.2)$$

требуется найти в ограниченной области – прямоугольном параллелепипеде $D = \{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z\}$.

На границе $z = 0$ с температурой происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей температуру $\theta(t)$. Плотность теплового потока на этой границе задается через коэффициент теплоотдачи h в виде

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial z} = h(\theta(t) - u(x, y, 0, t)). \quad (1.3)$$

Коэффициент теплоотдачи h записывается в виде $h = (\alpha^{-1} + R^{-1})$, где α – коэффициент конвективного теплообмена и R – коэффициент термического сопротивления.

На границе $z = L_z$ поддерживается постоянный тепловой поток (поток из недр Земли [10])

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial z} = q_E = \text{const}. \quad (1.4)$$

Боковые границы области D теплоизолированы

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L_x, y, z, t) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, L_y, z, t) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Уравнение (1.1) примечательно тем, что в него не входит явно сама неизвестная граница фазового перехода. Фронт фазового перехода в такой постановке задачи находится как изотермическая поверхность $u = u^* = \text{const}$, положение которой в пространстве, а в общем случае и форма, изменяются с течением времени. Учет теплоты фазового перехода эквивалентен заданию эффективной теплоемкости

$$c_{\text{eff}} = c + \rho^{-1} Q \delta(u - u^*).$$

Квазилинейное уравнение теплопроводности лежит в основе эффективных процедур приближенного решения задач Стефана. Нелинейности в этой задаче изменяют не только количественный характер тепловых процессов, но и качественную картину их протекания. Они значительно усложняют математические модели тепловых процессов, причем во многом эти трудности связаны с невозможностью применения для нелинейных задач принципа суперпозиции решений.

В общем виде (1.1) такая задача не имеет полного аналитического решения. Однако найдены точные аналитические решения для некоторых частных случаев (например, для постоянных коэффициентов и для коэффициентов, зависящих только от температуры) [2, 5-9].

2. Переход к безразмерному виду

Все вопросы о теплопереносе формулируются как задачи об определении некоторых функций и численных значений для величин, характеризующих физическое явление. При решении таких задач законы природы и различные геометрические соотношения представляют в виде функциональных уравнений – обычно дифференциальных. При чисто теоретических исследованиях эти уравнения служат для установления общих качественных свойств и для фактического вычисления искомых функциональных связей с помощью различных математических операций. С помощью теории размерности можно получить особенно ценные выводы при рассмотрении таких явлений, которые зависят от большого количества параметров, но при этом так, что некоторые из этих параметров в известных случаях становятся несущественными. Методы теории размерности и подобия играют особенно большую роль при моделировании различных явлений [11].

Для начала определяются размерности величин, входящих в рассматриваемую задачу: $[x] = [y] = [z] = \text{м}$ – пространственные переменные, $[u] = ^\circ\text{С}$ – искомая температура среды, $[\varphi] = ^\circ\text{С}$ – температура в начальный момент времени, $[\theta] = ^\circ\text{С}$ – температура окружающей среды, $[c] = \text{ккал}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{С})$ – удельная теплоемкость, $[\rho] = \text{кг}/\text{м}^3$ – плотность, $[\lambda] = \text{ккал}/(\text{м} \cdot \text{ч} \cdot ^\circ\text{С})$ – коэффициент теплопроводности, $[s] = \text{ккал}/(\text{м}^3 \cdot \text{ч})$ – мощность внутренних источников тепла, $[Q] = \text{ккал}/\text{м}^3$ – теплота фазового перехода, $[h] = [\alpha] = \text{ккал}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч} \cdot ^\circ\text{С})$ – коэффициент теплоотдачи и коэффициент конвективного теплообмена соответственно, $[q_E] = \text{ккал}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч})$ – тепловой поток из недр Земли.

Обезразмеривание начинается с выбора характерных значений, с помощью которых можно привести параметры задачи к безразмерному виду. Этот выбор не всегда прозрачен и зависит от специфики задачи и имеющихся традиций обезразмеривания задач того или иного типа. К характерным величинам данной задачи можно отнести: $L = \max\{x_L, y_L, z_L\}$ – максимальная величина параметров размера расчетной области, $T = 8760 \text{ч}$ – период изменения граничных условий на верхней границе (1 год), $\theta_{\max} = 25^\circ\text{С}$ – максимальное значение температуры в задаче, $c_d = 0.22 \text{ккал}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{С})$ – удельная теплоемкость сухого грунта, $\rho_d = 1390 \text{кг}/\text{м}^3$ – плотность сухого грунта.

Для дальнейшего удобства восприятия логично произвести следующую замену переменных. Пусть $C(u, x, y, z) = c(u, x, y, z)\rho(u, x, y, z)$ – объемная теплоемкость и $[C] = \text{ккал}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{С})$. Тогда за характерную величину можно взять объемную теплоемкость сухого грунта, т.е. $C_d = c_d\rho_d = 305.8 \text{ккал}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{С})$. Здесь индекс d соответствует сухому грунту.

В результате обезразмеривания исходной задачи (1.1)-(1.5) каждое соотношение преобразовывается в безразмерный вид. В новой постановке задачи решение $u'(x', y', z', t')$ удовлетворяет соотношениям

$$(C' + \text{Ste} \delta(u')) \frac{\partial u'}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\text{Fo} \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\text{Fo} \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\text{Fo} \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) + s', \quad (2.1)$$

$$u'(x', y', z', 0) = \varphi'(x', y', z'), \quad t' = 0, \quad (2.2)$$

которое требуется найти в ограниченной области – прямоугольном параллелепипеде

$$D = \{0 \leq x' \leq x_L/L, 0 \leq y' \leq y_L/L, 0 \leq z' \leq z_L/L\}.$$

На границе $z'=0$ происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей температуру $\theta'(t')$

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} = \text{Bi}(x', y', z', t') \cdot [\theta'(t') - u'(x', y', 0, t')]. \quad (2.3)$$

На нижней границе $z' = z_L/L$

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} = \text{Ki}(x', y', z', u'). \quad (2.4)$$

Боковые границы области теплоизолированы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'}(0, y', z', t') = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial x'}\left(\frac{x_L}{L}, y', z', t'\right) = 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial y'}(x', 0, z', t') = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial y'}\left(x', \frac{y_L}{L}, z', t'\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Основные обозначения, использовавшиеся при переходе к безразмерному виду, имеют вид

$$\begin{aligned} u' = \frac{u - u^*}{\theta_{\max}}, \quad x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad t' = \frac{t}{T}, \quad C' = \frac{C}{c_d \rho_d} = \frac{c\rho}{c_d \rho_d}, \quad s' = \frac{s T}{c_d \rho_d \theta_{\max}}, \\ \text{Fo} = \frac{\lambda T}{c_d \rho_d \cdot L^2}, \quad \text{Ste} = \frac{Q}{c_d \rho_d \theta_{\max}}, \quad \text{Bi} = \frac{hL}{\lambda}, \quad \text{Ki} = \frac{Lq_E}{\lambda \theta_{\max}}. \end{aligned}$$

Дополнительные обозначения, которые сделаны для упрощения исходной задачи, являются не строго обязательными для формулировки задачи:

$$\varphi(x', y', z') = \frac{\varphi(Lx', Ly', Lz') - u^*}{\theta_{\max}}, \quad \theta'(t') = \frac{\theta(Tt') - u^*}{\theta_{\max}}.$$

3. Численный алгоритм решения задачи

Необходимо отметить, что для численного решения задач с фазовыми переходами используются два основных подхода. При первом подходе используются методы с выделением границы раздела фаз. Эти методы иногда называют *variable domain methods*. При втором подходе используют методы без выделения этой границы или методы сквозного счета (*fixed domain methods*) [3, 11-13]. К первой группе методов относятся методы, в которых положение свободной границы отслеживается на каждом временном слое. С этой целью используются численные методы, в которых свободная граница определяет-

ся положением соответствующих узлов. Это достигается за счет использования новых динамических независимых переменных или же согласованных динамических сеток в исходных переменных.

В одномерных задачах адаптация к границе раздела фаз может осуществляться за счет использования переменного шага по времени. Такой подход к использованию переменных шагов по времени (ловля фронта в узел пространственной сетки) хорошо известен и давно используется. В некоторых случаях можно использовать аналогичный подход с переменным шагом по пространству. Такие методы плохо приспособлены к решению многомерных задач.

К методам с выделением границы фазового перехода относятся методы с выпрямлением фронта, когда используется динамическая сетка постоянной структуры с закреплением узлов на границе раздела фаз. При изложении этих подходов обычно ориентируются на формулировку задачи в новых независимых переменных, в которых расчетная область регулярна.

Прогресс в теоретическом исследовании проблем со свободной (неизвестной) границей в настоящее время достигнут за счет рассмотрения этих задач как вариационных. Для однофазной задачи Стефана вводится новая независимая переменная [3], которая позволяет получить более простую задачу. На основе метода штрафа [14], примененного к соответствующему вариационному неравенству, строится метод сквозного счета для задачи Стефана.

Квазистационарная задача Стефана описывается стационарным уравнением теплопроводности. Отмечаются особенности численных методов решения таких задач. В частности, методы сквозного счета могут быть построены на основе выделения особенности решения на границе фазового перехода.

Нелинейность задач с фазовыми переходами обусловлена, прежде всего, наличием неизвестной (свободной) границы фазового перехода. Кроме того, как и в обычных задачах теплопроводности, нелинейность может быть связана с зависимостью теплофизических параметров от температуры.

Следует уделить внимание модельной двухфазной задаче Стефана в прямоугольнике $\Omega = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$. Свободная граница $S=S(t)$ разбивает Ω на две подобласти Ω^+ и Ω^- . В обеих подобластях выполняется уравнение теплопроводности. Теплофизические параметры твердой и жидкой фаз постоянны, для обозначения принадлежности к той или иной области будет использоваться индекс «+» или «-».

Уравнение теплопроводности в каждой подобласти можно записать в виде

$$c^\pm \frac{\partial u^\pm}{\partial t} = \lambda^\pm \frac{\partial^2 u^\pm}{\partial x_1^2} + \lambda^\pm \frac{\partial^2 u^\pm}{\partial x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega^\pm(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (3.1)$$

В начальный момент задается некоторое распределение температуры:

$$u^\pm(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega^\pm(0). \quad (3.2)$$

Пусть $\gamma^\pm = \gamma^\pm(t) = \partial\Omega \cap \partial\Omega^\pm(t)$ и

$$u^\pm(x, t) = g(x, t), \quad x \in \gamma^\pm, \quad 0 < t \leq T. \quad (3.3)$$

Температура фазового перехода принимается равной нулю, и поэтому свободная граница $S = S(t)$ определяется следующим образом:

$$S(t) = \{x \mid x \in \Omega, u(x, t) = 0\}. \quad (3.4)$$

На ней выполнены (см. п.2) два условия сопряжения, отражающие непрерывность температуры и закон сохранения тепла:

$$\Delta[u] = 0, \quad (x, y, z) \in S. \quad (3.5)$$

$$\Delta \left[\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] = -QV_n, \quad (x, y, z) \in S, \quad (3.6)$$

где Q – энтальпия фазового перехода, а V_n – скорость движения границы фазового перехода по нормали к $S(t)$.

Так как скорость движение фронта V_n заранее не известна и должна быть найдена в процессе решения задачи теплопроводности, то граничное условие (3.6), называемое условием Стефана, делает задачу нелинейной.

Рассматриваемая двухфазная задача Стефана (3.1)-(3.6) может быть записана без явного выделения фронта фазового перехода в постановке задачи [1]. Этот переход связан с переходом в класс обобщенных функций. Действительно, теплоту фазового перехода, выделяющуюся на фронте, можно учесть, считая внутреннюю энергию среды разрывной функцией температуры и вводя сосредоточенную теплоемкость среды. При этом внутренняя энергия единицы объема среды ε , как функция температуры, при $u = u^* = 0$ скачком меняется на величину теплоты фазового перехода, т.е.

$$\varepsilon = \int_0^u c(u)\rho(u)du + Q\eta(u), \quad (3.7)$$

где $\eta(u) = \begin{cases} 1, & u > 0, \\ 0, & u < 0 \end{cases}$ – импульсная функция Хэвисайда, производная которой $d\eta/du$

есть дельта-функция $\delta(u)$.

При дифференцировании внутренней энергии (3.7) по температуре получится выражение для эффективной объемной теплоемкости среды с учетом теплоты фазового перехода

$$c_{eff} = c(u)\rho(u) + Q\delta(u). \quad (3.8)$$

Второе слагаемое, записанное через δ -функцию, представляет собой сосредоточенную теплоемкость, которую следует понимать как обобщенную функцию температуры.

При таком описании фазового перехода вместо уравнений (3.1) и условий сопряжения (3.4)-(3.6) можно рассматривать одно уравнение теплопроводности

$$(c(u)\rho(u) + Q\delta(u)) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(u) \operatorname{grad} u) + s(x, y, z, t, u), \quad (x, y, z, t) \in \Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (3.9)$$

Здесь коэффициенты теплоемкости и теплопроводности разрывны. В соответствии с (3.2) и (3.3) уравнение (3.9) дополняется условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.10)$$

$$u(x, t) = g(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (3.11)$$

Особенность задачи Стефана проявляется в наличии слагаемого с δ -функцией в левой части уравнения (3.9). Выделение или поглощение тепла при фазовом переходе соответствует наличию сосредоточенной теплоемкости на границе фазового перехода. Сама краевая задача (3.9)-(3.11) не сильно отличается от других квазилинейных задач теплопроводности.

Простейший подход к приближенному решению задачи Стефана в формулировке (3.9)-(3.11) состоит в том, что коэффициенты уравнения (3.9) сглаживаются, т.е. совершается переход к обычной задаче теплопроводности.

В уравнение (3.9) теплоемкость $c(u)$, плотность $\rho(u)$ и слагаемое $Q\delta(u)$ входят одинаковым образом. Дельта-функцию $\delta(u)$ можно заменить некоторой функцией $\delta(u, \Delta)$, которая отлична от нуля только внутри интервала сглаживания $[-\Delta, \Delta]$, и задать эффективную сглаженную теплоемкость

$$\tilde{c} = c + \rho^{-1} Q\delta(u, \Delta). \quad (3.12)$$

При необходимости проводится сглаживание плотности и коэффициента теплопроводности ($\rho(u)$ заменяется на $\tilde{\rho}(u)$, $\lambda(u)$ заменяется на $\tilde{\lambda}(u)$) и вместо решения уравнения (3.9) находится решение уравнения со сглаженными коэффициентами

$$\tilde{c}(u)\tilde{\rho}(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\tilde{\lambda}(u) \operatorname{grad} u) + s(x, y, z, t, u), \quad (x, y, z, t) \in \Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (3.13)$$

В вычислительной практике получили распространение различные аппроксимационные формулы для $\delta(u, \Delta)$, которые строятся из условия сохранения баланса тепла на интервале $[-\Delta, \Delta]$. Простейшая из них связана с заданием

$$\delta(u, \Delta) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta}, & |u| \leq \Delta, \\ 0, & |u| > \Delta. \end{cases} \quad (3.14)$$

В качестве второго примера можно привести параболическую аппроксимацию, когда

$$\delta(u, \Delta) = \begin{cases} \frac{3}{4\Delta} \left(1 - \frac{u^2}{\Delta^2} \right), & |u| \leq \Delta, \\ 0, & |u| > \Delta, \end{cases} \quad (3.15)$$

для которой условие (3.16) также, очевидно, выполнено

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \delta(u, \Delta) du = 1. \quad (3.16)$$

Другие варианты приближения δ -функции представлены в [15]. Как показывают численные эксперименты [5, 15], точность разностного решения слабо зависит от выбора той или иной аппроксимационной формулы для δ -функции, в частности, от выбора (3.14) либо (3.15). Более существенное влияние оказывает величина параметра сглаживания Δ , который естественно зависит от используемой сетки и определяется, чаще всего, эмпирически в результате методических расчетов.

Для построения консервативных разностных схем естественно исходить из законов сохранения (балансов) для отдельных ячеек разностной сетки. Такой метод построения консервативных разностных схем получил название интегро-интерполяционный метод (метод баланса) [5, 12]. К этому подходу тесно примыкает метод контрольного объема, который фактически не использует дифференциальную формулировку задачи и отражает законы сохранения непосредственно для отдельных ячеек среды [5, 12-13].

4. Метод контрольного объема

В работе метод контрольного объема использован для получения дискретных аналогов. Основная идея метода заключается в том, что дискретные аналоги, полученные этим методом, являются не только формальной математической аппроксимацией, но и имеют ясный физический смысл. Дифференциальные уравнения математической физики представляют собой законы сохранения. В свою очередь, рассматриваемое в работе уравнение теплопроводности основано на законе сохранения энергии. Когда дискретные уравнения получены методом контрольного объема, они представляют собой законы сохранения энергии, количества движения, массы для каждого контрольного объема. Из этого следует, что полученное численное решение удовлетворяет законам сохранения этих величин во всей расчетной области. Для подробного описания метода логично рассмотреть одномерную задачу, после чего провести обобщение на трехмерный случай. В качестве примера выбрана следующая задача. Необходимо в ограниченной области $D = \{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq t \leq t^*\}$ найти численное решение $u = u(x, t)$ уравнения теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) + s(u, x, t), \quad (4.1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (4.2)$$

и граничным условиям

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(L_x, t) = \nu(t), \quad (4.3)$$

где $s(u, x, t)$ – мощность внутренних источников тепла, $\varphi(x)$, $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – заданные функции.

Сетка. Отрезок $[0, L_x]$ разбивается на m контрольных объемов (КО) (рис.4.1а).

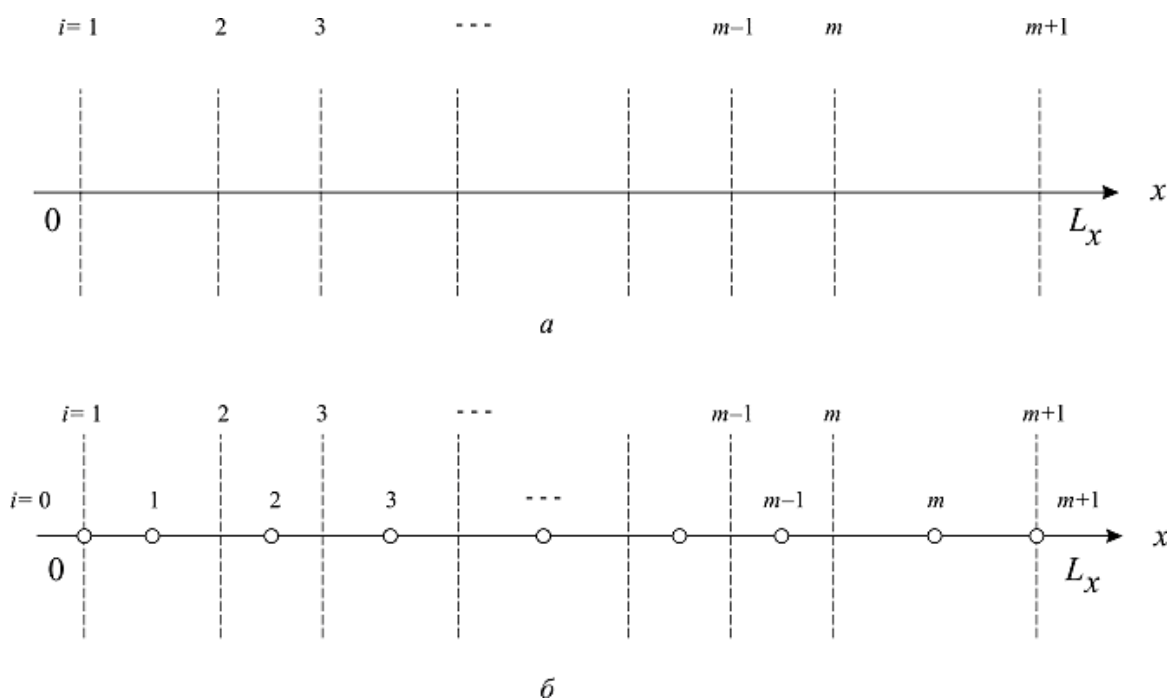


Рис.4.1. Расчетная область.

Множество точек сетки, задающее границы КО, имеет вид

$$\omega = \{w_i, i = 1, \dots, m + 1\} = \{w_1 = 0 < w_2 < \dots < w_m < w_{m+1} = L_x\}. \quad (4.4)$$

Индекс левой границы контрольного объема определяет номер этого КО. Шаг такой сетки (или ширина i -го КО) имеет вид

$$h_i = w_{i+1} - w_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

В общем случае сетка предполагается неравномерной. Точки области D , в которых находится решение задачи, являются расчетными. В качестве внутренних расчетных точек выбираются центры КО:

$$x_i = \frac{w_{i+1} + w_i}{2}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Это множество дополняется двумя граничными точками $x_0=0$ и $x_{m+1}=L_x$, и сеткой ω будет объединенное множество внутренних и граничных расчетных точек (рис.4.1б)

$$\omega = \{x_i, i = 0, 1, \dots, m, m + 1\}.$$

Следует подробно рассмотреть фрагмент расчетной сетки ω , показанной на рис.4.2. Буквами W, P и E обозначены точки сетки: P – рассматриваемая точка (Point), а

W и E – соответственно «западная» (West) и «восточная» (East) соседние точки. В скобках указаны индексы расчетных точек – $(i-1)$, i и $(i+1)$ соответственно. Штриховыми линиями показаны грани контрольных объемов. Для обозначения граней КО, содержащего точку P , используются буквы w и e . Расстояние между точками W и P обозначим как $(\delta x)_w$, а между точками P и E – как $(\delta x)_e$. Ширина контрольного объема обозначена через Δx .

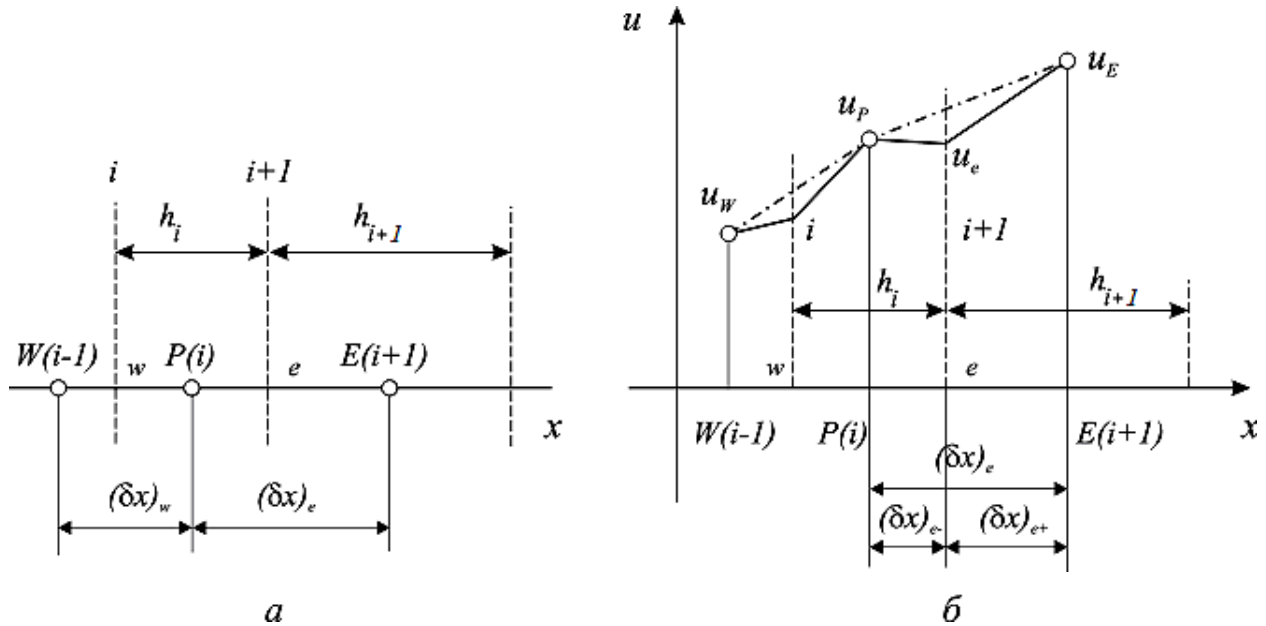


Рис.4.2. Фрагмент расчетной сетки.

Дискретный аналог уравнения теплопроводности. Уравнение (4.1) можно записать в виде

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} + s, \quad (4.5)$$

где

$$J = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.6)$$

есть плотность теплового потока.

Проинтегрировав (4.5) по КО, содержащему точку $P(i)$, т.е. от w до e , имеем

$$\int_w^e c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx = -\int_w^e \frac{\partial J}{\partial x} dx + \int_w^e s dx.$$

В результате получится

$$a_P^0 (u_P - u_P^0) = J_w - J_e + \int_w^e s dx, \quad (4.7)$$

где u_P^0 – известное значение температуры u в точке P в момент времени t , u_P соответствует неизвестной температуре в точке P в момент времени $t + \Delta t$, $a_P^0 = (c\rho)_P \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

При интегрировании температура внутри КО считается постоянной и равной температуре u_P . В правой части уравнения (4.7) первые два члена соответствуют плотностям входящего (J_w) и выходящего (J_e) потоков тепла, а последнее слагаемое в виде интеграла обозначает суммарную мощность генерации тепла в КО.

Для представления J_w и J_e через температуры в расчетных точках использован кусочно-линейный профиль, приведенный штрихпунктирной линией на рис.4.2б. В результате получим

$$J_w = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w} (u_W - u_P), \quad J_e = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e} (u_P - u_E). \quad (4.8)$$

Для расчета интеграла $\int_w^e s dx$ можно обозначить среднюю мощность генерации тепла в контрольном объеме через \bar{s} . Линеаризация \bar{s} по температуре имеет вид $\bar{s} = s_C + s_P u_P$. Тогда

$$\int_w^e s dx = \bar{s} \Delta x = (s_C + s_P u_P) \Delta x. \quad (4.9)$$

Если \bar{s} не зависит от температуры, то $s_P = 0$, $\bar{s} = s_C$.

При подстановке (4.8) и (4.9) в выражение (4.7) получим дискретный аналог уравнения (4.5) в виде

$$a_P u_P = a_W u_W + a_E u_E + b, \quad (4.10)$$

где

$$a_W = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w}, \quad a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e}, \quad a_P^0 = (c\rho)_P \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

$$a_P = a_W + a_E + a_P^0 - s_P \Delta x, \quad b = s_C \Delta x + a_P^0 u_P^0.$$

При аппроксимации плотности теплового потока по формулам (4.8) используются значения коэффициента теплопроводности λ на гранях КО. В задаче же все необходимые величины задаются в расчетных точках – центрах КО. Если теплопроводность задана только в расчетной точке, то разумно предположить, что ее значение остается постоянным по всему КО, окружающему эту точку. Другими словами, каждый КО заполнен материалом с постоянной теплопроводностью (соответствующей ее значению в расчетной точке), а также плотностью и теплоемкостью.

Если зависимость температуры от x аппроксимировать кусочно-линейным профилем, показанным на рис.4.2б сплошной линией, то плотность теплового потока на грани

e может быть определена как

$$J_e = \frac{\lambda_P}{(\delta x)_{e-}} (u_P - u_e) = \frac{\lambda_E}{(\delta x)_{e+}} (u_e - u_E). \quad (4.11)$$

Исключив из этого выражения u_e , получим

$$J_e = \left[\frac{(\delta x)_{e-}}{\lambda_P} + \frac{(\delta x)_{e+}}{\lambda_E} \right]^{-1} (u_P - u_E). \quad (4.12)$$

Сравнив вторую формулу в (4.8) с (4.12), можно записать выражение для коэффициента a_E

$$a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e} = \left[\frac{(\delta x)_{e-}}{\lambda_P} + \frac{(\delta x)_{e+}}{\lambda_E} \right]^{-1} = \frac{\lambda_E \lambda_P}{\lambda_E (\delta x)_{e-} + \lambda_P (\delta x)_{e+}}. \quad (4.13)$$

Аналогично записывается формула для коэффициента a_W

$$a_W = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w} = \frac{\lambda_P \lambda_W}{\lambda_P (\delta x)_{w-} + \lambda_W (\delta x)_{w+}}. \quad (4.14)$$

Из (4.11) можно также вывести формулу для u_e :

$$u_e = \frac{F_P u_P + F_E u_E}{F_P + F_E}, \quad (4.15)$$

где $F_P = \frac{\lambda_P}{(\delta x)_{e-}}$, $F_E = \frac{\lambda_E}{(\delta x)_{e+}}$.

В вычислительной схеме получаются температуры в расчетных точках, а температуры на гранях контрольных объемов обычно не определяются. Когда необходимо получить температуру на грани, следует использовать выражение (4.15).

Формула (4.14) используется для вычисления a_W , когда индекс i точки P принимает значения от 2 до m , а формула (4.13) – для $i=1, \dots, m-1$. При $i=1$ левая грань первого КО совпадает с точкой $W(0)$, поэтому полагая $(\delta x)_{w-} = 0$, получаем выражение для a_W

$$a_W = \frac{\lambda_P}{(\delta x)_{w+}}. \quad (4.16)$$

На правой границе области при $i=m$ правая грань m -го КО совпадает с точкой $E(m+1)$, т.е. здесь $(\delta x)_{e+} = 0$. Для коэффициента a_E получается формула

$$a_E = \frac{\lambda_P}{(\delta x)_{e-}}. \quad (4.17)$$

Составление системы линейных алгебраических уравнений. Для коэффициентов в уравнении (4.10) можно ввести следующие обозначения:

$$a_W(i) = A_i, \quad a_P(i) = B_i, \quad a_E(i) = C_i, \quad b(i) = D_i.$$

С учетом введенной сетки (см. формулу (4.4) и рис.4.1 и 4.2) выражения для коэффициентов примут вид

$$A_1 = a_W(1) = \frac{2\lambda_1}{h_1}, \quad A_i = a_W(i) = \frac{2\lambda_i\lambda_{i-1}}{\lambda_i h_{i-1} + \lambda_{i-1} h_i}, \quad i = 2, \dots, m;$$

$$C_i = a_E(i) = \frac{2\lambda_{i+1}\lambda_i}{\lambda_{i+1} h_i + \lambda_i h_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad C_m = a_E(m) = \frac{2\lambda_m}{h_m}; \quad (4.18)$$

$$B_i = a_P(i) = a_W(i) + a_E(i) + a_P^0(i) - s_P(i)(\Delta x)_i = A_i + C_i + a_P^0(i) - s_P(i)h_i;$$

$$a_P^0(i) = \frac{(cp)_i h_i}{\Delta t}; \quad D_i = b(i) = s_C(i)h_i + a_P^0(i)u_P^0(i), \quad u_P^0(i) = u_i^0.$$

В формулах (4.18) u_i^0 – значение температуры в точке $x = x_i$ в предыдущий момент времени, $s_C(i)$ и $s_P(i)$ – значения функций $s_C(x, t)$ и $s_P(x, t)$ в точке $x = x_i$ в текущий момент времени.

Для каждой внутренней точки можно выписать уравнение (4.10). В результате для нахождения неизвестных значений u_i , $i = 1, \dots, m$, получится следующая система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{aligned} B_1 u_1 - C_1 u_2 &= D_1 + A_1 u_0, \\ -A_2 u_1 + B_2 u_2 - C_2 u_3 &= D_2, \\ \dots & \\ -A_i u_{i-1} + B_i u_i - C_i u_{i+1} &= D_i, \\ \dots & \\ -A_{m-1} u_{m-2} + B_{m-1} u_{m-1} - C_{m-1} u_m &= D_{m-1}, \\ -A_m u_{m-1} + B_m u_m &= D_m + C_m u_{m+1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Система (4.19) решается методом прогонки [17]. После нахождения поля температуры делается следующий шаг по времени и вычисления продолжаются до нужного момента времени.

Обобщение для трехмерного случая. Описанный алгоритм обобщается для решения двумерной и трехмерной нестационарных краевых задач для уравнения теплопроводности [5]. Ниже рассматривается трехмерный случай.

Уравнение теплопроводности

$$\text{ср} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial z} \right) + s \quad (4.20)$$

представляется в виде

$$\text{ср} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial J_x}{\partial x} - \frac{\partial J_y}{\partial y} - \frac{\partial J_z}{\partial z} + s, \quad (4.21)$$

где $J_x = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}$, $J_y = -\lambda \frac{\partial u}{\partial y}$, $J_z = -\lambda \frac{\partial u}{\partial z}$ – плотности теплового потока в направлении осей x , y и z , соответственно. Расчетная область D разбивается на контрольные объемы. Центр каждого КО является расчетной точкой. Типичный контрольный объем V_{ijk} показан на рис.4.3.

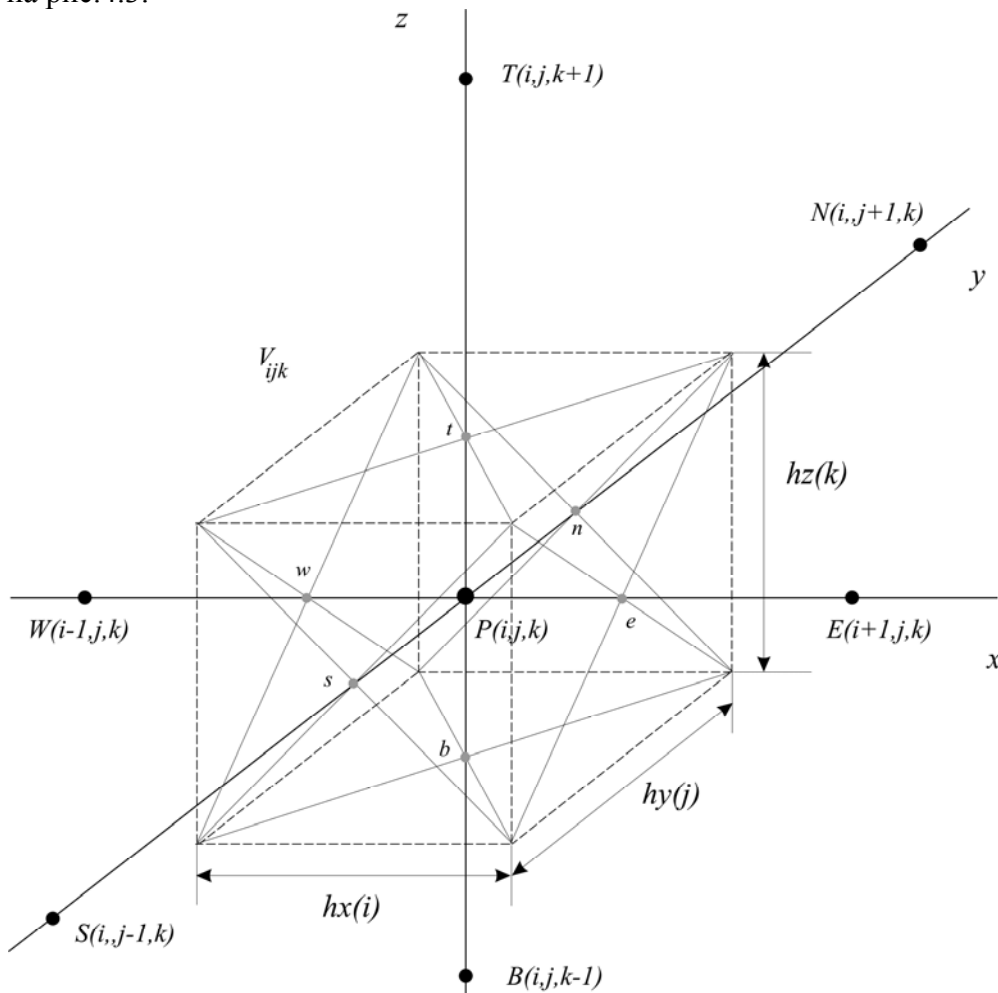


Рис.4.3. Типичный контрольный объем.

Буквами W, P, E, S, N, B, T обозначены точки сетки: P – рассматриваемая точка (Point), а W, E, S, N, B и T – «западная» (West), «восточная» (East), «южная» (South), «северная» (North), «нижняя» (Bottom) и «верхняя» (Top) соседние точки соответственно. В скобках указаны индексы расчетных точек. Штриховыми линиями показаны грани

контрольных объемов. Для обозначения граней КО, содержащих точку P, используются соответствующие прописные буквы w, e, s, n, b и t . Проинтегрировав уравнение (4.21) по КО, получим

$$(cp)_P \frac{\Delta V}{\Delta t} (u_P - u_P^0) = J_w A_w - J_e A_e + J_s A_s - J_n A_n + J_b A_b - J_t A_t + \bar{s} \Delta V. \quad (4.22)$$

Здесь верхний индекс «0» обозначает известное значение температуры в начале шага по времени Δt , J – плотность теплового потока через грань КО, на которую указывает нижний индекс; A – площадь соответствующей грани, например, $A_e = h_j^y \cdot h_k^z$; \bar{s} – усредненный по объему источниковый член, $\Delta V = h_i^x \cdot h_j^y \cdot h_k^z$ – объем КО, h_i^x, h_j^y, h_k^z – шаги сетки по осям x, y, z соответственно.

Потоки тепла через грани КО e и w могут быть рассчитаны следующим образом:

$$J_e A_e = D_e (u_P - u_E), \quad J_w A_w = D_w (u_W - u_P), \quad (4.23)$$

где D_e – проводимость между точками P и E, которая вычисляется по значениям λ в этих точках. Проводимость D_e можно рассчитать по формуле (аналогично формулам (4.13) и (4.14))

$$D_e = A_e \frac{2\lambda_E \lambda_P}{\lambda_E h_x(i) + \lambda_P h_x(i+1)}. \quad (4.24)$$

Формулы, аналогичные (4.23) и (4.24), используются и для вычисления соответствующих величин на других гранях. Источниковый член \bar{s} линеаризуется по температуре: $\bar{s} = s_C + s_P u_P$. Если \bar{s} не зависит от температуры, то $s_P = 0$, $\bar{s} = s_C$. При подстановке выражения для J и \bar{s} в (4.22) получается дискретный аналог уравнения (4.20):

$$a_P u_P = a_W u_W + a_E u_E + a_N u_N + a_S u_S + a_T u_T + a_B u_B + b, \quad (4.25)$$

где $a_E = D_e$, $a_W = D_w$, $a_N = D_n$, $a_S = D_s$, $a_T = D_t$, $a_B = D_b$, $b = s_C \Delta V + a_P^0 u_P^0$, $a_P^0 = \frac{(cp)_P \Delta V}{\Delta t}$,

$$a_P = a_W + a_E + a_N + a_S + a_T + a_B + a_P^0 - s_P \Delta V.$$

Для каждого КО, содержащего внутреннюю расчетную точку, записывается дискретный аналог вида (4.25). С помощью граничных условий в приграничных КО делаются преобразования, после которых значения u на границе явным образом не будут входить в систему уравнений. В результате получается замкнутая система линейных алгебраических уравнений, которая может быть решена с помощью любого приемлемого алгоритма. Для решения системы в работе используется основанный на методе прогонки метод переменных направлений [17].

Суть этого метода состоит в том, что сначала прогонка применяется для всех линий, параллельных оси x . Значения температуры в точках, лежащих на выбранной оси, считаются неизвестными, значения температуры в остальных точках берутся с предыдущего временного слоя. Затем прогонка повторяется для всех линий, параллельных оси

u и z . Рассчитанные новые значения u вдоль линии используются в качестве значений u^* при решении уравнений для соседней линии. Последовательность выбора линий может быть произвольной. В работе сначала рассматривается линия вдоль оси x сразу над нижней границей ($j = 1$). Затем все параллельные ей линии перебираются снизу вверх до верхней границы ($j = n$) и в обратном направлении. После этого применяется прогонка ко всем линиям вдоль оси y слева направо и обратно. Такой алгоритм обеспечивает быстрое «проникновение» информации о граничных условиях во внутреннюю часть расчетной области.

Численная реализация и апробация алгоритма. Численная реализация выполнена на языке Fortran. Программа способна рассчитать температурное поле в заданной области исследования при наличии определенного набора входных данных: физические характеристики области исследования, геометрическое разбиение области исследования, начальное распределение температуры.

Для подтверждения правильности используемых методов и алгоритмов были проведены методические расчеты. Рассмотрена упрощенная задача, для которой можно легко найти точное аналитическое решение.

Проверка работоспособности численной схемы для нахождения решения $u(x, y, z, t)$ в области D проверялась на решении модельной краевой задачи для уравнения $\partial u / \partial t = a^2 \Delta u + s(x, y, z, t)$, где Δ – оператор Лапласа, $0 \leq t \leq T$, T задано. Для этого выбиралась функция $u(x, y, z, t)$, затем вычислялась функция $s(x, y, z, t) = \partial u / \partial t - a^2 \Delta u$ и задавались начальное и граничные условия, которым удовлетворяет выбранная функция $u(x, y, z, t)$. После чего решение строилось численно методом контрольного объема. Полученное решение сравнивалось с исходной функцией $u(x, y, z, t)$. Численное и аналитическое решение совпадают друг с другом с точностью до 10^{-5} .

Для рассматриваемой в работе задачи параметры расчетной сетки были подобраны в результате проведения серии методических расчетов с числами контрольных объемов, равными: $40 \times 30 \times 35 = 42000$, $56 \times 42 \times 49 = 115248$, $72 \times 54 \times 63 = 244944$ и $88 \times 66 \times 77 = 447216$. Результаты проведенных расчетов совпадают с точностью до $10^{-3} \sim 10^{-4}$.

5. Пример расчета

В качестве примера рассматривается задача о распределении температурных полей в грунте в районах с сезонными промерзаниями и оттаиваниями почвы. Необходимо найти распределение температурных полей под зданием, чтобы определить глубину оттаивания грунтов под ним. В силу симметрии рассматривается четверть исходной области. Пусть область исследования D имеет вид, представленный на рис.5.1. Плоскость Oxy соответствует поверхности земли. Ось Oz направлена вглубь грунта. Закрашенный прямоугольник на верхней границе области соответствует четверти здания, расположенного над этой областью. Размер этого прямоугольника (горизонтального сечения здания) составляет $10\text{ м} \times 4\text{ м}$ (рис.5.1).

Характеристики области D : $L_x = 21\text{ м}$, $L_y = 15\text{ м}$, $L_z = 17\text{ м}$. Область D состоит из 3 литологических слоев: D_1 , D_2 и D_3 (соответственно, области 1, 2 и 3 на рис.5.1). Эти множества задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \{\forall M(x, y, z) \in D : 0 < z < 2\}, \\
 D_2 &= \{\forall M(x, y, z) \in D : 6 < x < 21, 2 < z < 6\}, \\
 D_3 &= D \setminus (D_1 \cup D_2).
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

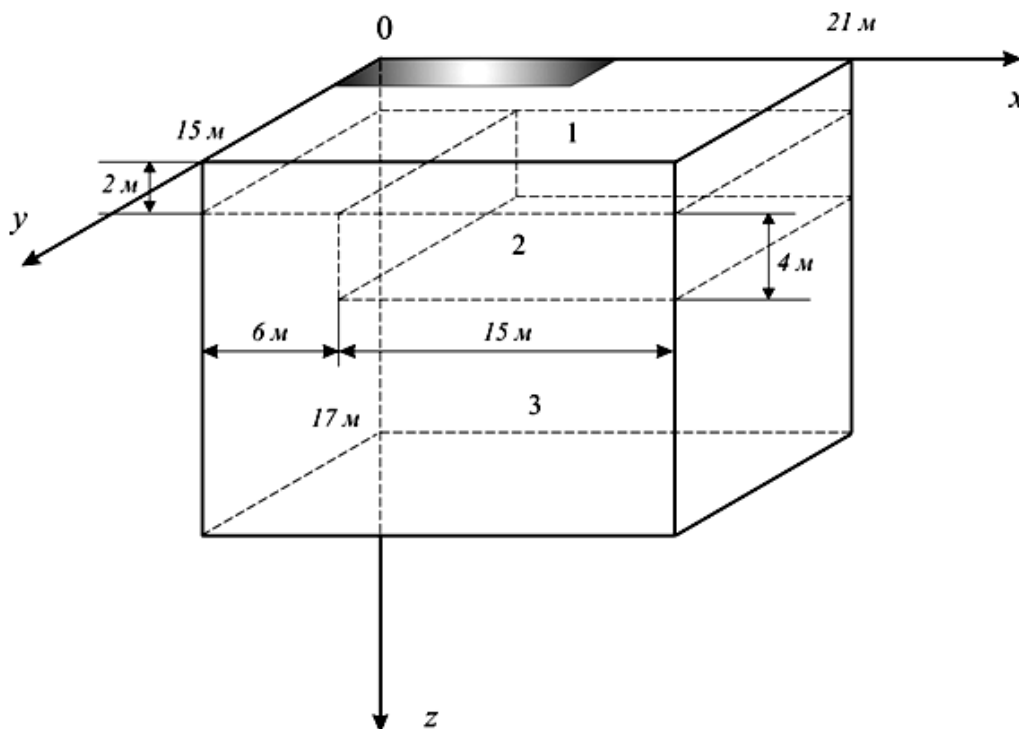


Рис.5.1. Расчетная область.

Для удобства задания литологических слоев область D разбита на блоки. Размеры блоков в метрах по направлениям осей задаются следующим образом:

- по оси x : 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3;
- по оси y : 2, 2, 2, 3, 3, 3;
- по оси z : 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3.

Всего блоков $8 \times 6 \times 7 = 336$. Каждый блок делится по каждой оси на 5 объемов. Шаг по пространству выбран неравномерным для возможности задания сложных областей. Расчеты проводились с числом контрольных объемов, равным $40 \times 30 \times 35 = 42000$. При этом минимальный безразмерный шаг по пространству $\Delta h_{\min} = 0.019$, $\Delta h_{\max} = 0.029$; безразмерный шаг по времени $\Delta t = 0.00083$. Безразмерная полуширина сглаживания δ -функции выбиралась равной $\Delta = 0.08$.

Для слагаемого sr в левой части уравнения (3.9) можно записать следующее выражение [15]:

$$c_p = \begin{cases} \rho_d \left(c_d + c_{ice}(W_{tot} - W_w) + c_w W_w + k \frac{\partial W_w}{\partial u} \right), & u < u^*; \\ \rho_d (c_d + c_w W_{tot}), & u > u^*. \end{cases} \quad (5.2)$$

Здесь $c_d = 0.22$ ккал/(кг·°С) – удельная теплоемкость сухого грунта, $c_{ice} = 0.49$ ккал/(кг·°С) – удельная теплоемкость льда, $c_w = 1.006$ ккал/(кг·°С) – удельная теплоемкость воды, ρ_d – плотность сухого грунта, W_{tot} – суммарная влажность грунта в долях к массе сухого грунта, $W_w = W_w(u)$ – доля незамерзшей воды по отношению к массе сухого грунта, $k = 79.4$ ккал/кг – удельная теплота фазового перехода льда, $u^* = 0$ °С – температура фазового перехода.

Формула для объемной теплоемкости (5.2) учитывает фазовые переходы в области отрицательных температур. Функцией $W_w = W_w(u)$ описывается массовая доля (по отношению к массе сухого грунта) незамерзшей воды при температуре u [15].

Коэффициент теплопроводности λ в уравнении (1.1) определяется так

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_M, & u < u^*, \\ \lambda_T, & u > u^*, \end{cases} \quad (5.3)$$

где λ_M – коэффициент теплопроводности мерзлого грунта, λ_T – коэффициент теплопроводности талого грунта. Коэффициент теплоотдачи h записывается в виде $h = (\alpha^{-1} + R)^{-1}$, где α – коэффициент конвективного теплообмена и R – коэффициент термического сопротивления. Теплота фазового перехода Q принимается равной количеству теплоты, необходимой для таяния льда (замерзания воды) в единице объема грунта [15] и вычисляется по формуле $Q = k\rho_d (W_{tot} - W_w(u^*))$. Внутренние источники тепла в предложенном примере отсутствуют, поэтому $s(x, y, z, t) = 0$.

Анализ изменения температурного поля в расчетной области проводится следующим образом. На прямых линиях, параллельных оси z и проходящих через характерные точки на верхней границе области, выбираются точки наблюдения. Результатами расчетов являются графики зависимости температуры от времени в этих точках. На рис.5.2 приведен пример такого расчета с пятью точками наблюдения (кривые 1-5) на вертикальной прямой, проходящей через характерную точку плоскости $z = 0$. На вертикальных линиях, проходящих параллельно оси Oz через точки наблюдения $M_1(1.5,1)$ и $M_2(9,5)$ – в непосредственной близости от этой зоны, представлены зависимости температуры u в этих точках от времени t на различных глубинах (рис.5.2, 5.3).

Также был проведен анализ влияния зон, в которых не происходит фазового превращения вовсе, и зон с внутренними источниками (стоками) тепла на распределение температурного поля во всей области. Такие задачи возникают при строительстве зданий со свайным фундаментом и при использовании термостабилизаторов.

Термостабилизатор – это парожидкостное устройство для охлаждения грунтов, представляющее собой металлическую герметично запаянную, заправленную хладагентом трубку диаметром от 36 до 57 мм, длиной от 6 до 10 м и более, состоящее из кон-

денсатора с оребрением (надземной части длиной в пределах 1–2.5 м) и испарителя (подземной части длиной от 5 до 9 м и более) [16]. Работа осуществляется без внешних источников питания, только за счет законов физики – переноса тепла вследствие испарения в испарителе хладагента и его поднятия в конденсаторную часть, где пар конденсируется, отдавая тепло, и стекает по внутренним стенкам трубы вниз.

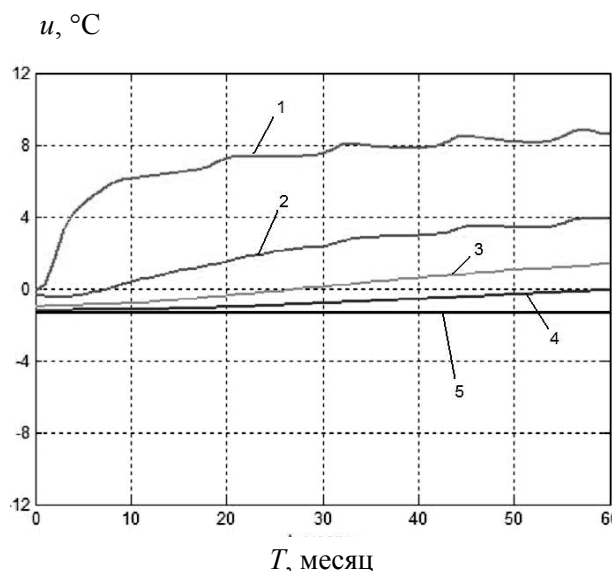


Рис.5.2. Зависимость температуры от времени в точке M_1 1 – на глубине 1 м, 2 – на глубине 3 м, 3 – на глубине 5 м, 4 – на глубине 7 м, 5 – на глубине 15.5 м.

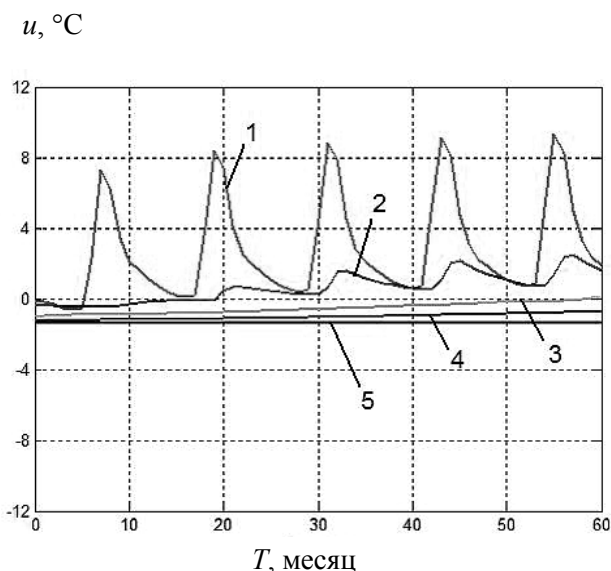


Рис.5.3. Зависимость температуры от времени в точке M_2 1 – на глубине 1 м, 2 – на глубине 3 м, 3 – на глубине 5 м, 4 – на глубине 7 м, 5 – на глубине 15.5 м.

Авторами рассмотрена подобная задача на примере здания со свайным фундаментом и термостабилизаторами, расположенными по периметру. Размеры здания принимались неизменными и составляли 10 м×4 м. Глубина залегания свай составляет 8 м. Программно сваи заданы как 4-й литологический слой. Предполагается, что сваи состоят полностью из тяжелого (обычного) бетона с физическими параметрами: плотность $\rho_b = 2300 \text{ кг/м}^3$, удельная теплоемкость $c_b = 0.2 \text{ ккал/(кг} \cdot \text{°C)}$, коэффициент теплопроводности $\lambda_b = 1.5 \text{ ккал/(м} \cdot \text{ч} \cdot \text{°C)}$, $Q_b = 0 \text{ ккал/м}^3$. Фазовые превращения в бетонной свае не рассматриваются. Программно сваи можно задать как 4-ю область.

Область исследования D имеет тот же самый вид, что и на рис.5.1, за исключением 6 свай и 5 термостабилизаторов, расположенных, как показано на рис.5.4.

В расчетах моделировался термостабилизатор с глубиной погружения в грунт $z_0 = 8 \text{ м}$, общей длиной 9 м и мощностью $s_0 = 28.3932 \text{ ккал/(м} \cdot \text{ч)}$. Рассматриваемый термостабилизатор работает с 1 октября по 31 марта и не работает с 1 апреля по 30 сентября каждого года. Термостабилизатор рассматривается как бесконечно тонкий стержень:

$$s(x, y, z, t) = s_0(t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot I_{[0, z_0]}(z). \tag{5.4}$$

Здесь (x_0, y_0) – координаты установки термостабилизатора в грунте, $I_{[0, z_0]}(z)$ – инди-

катор сегмента $[0, z_0]$. Расположение термостабилизаторов представлено на рис.5.4.

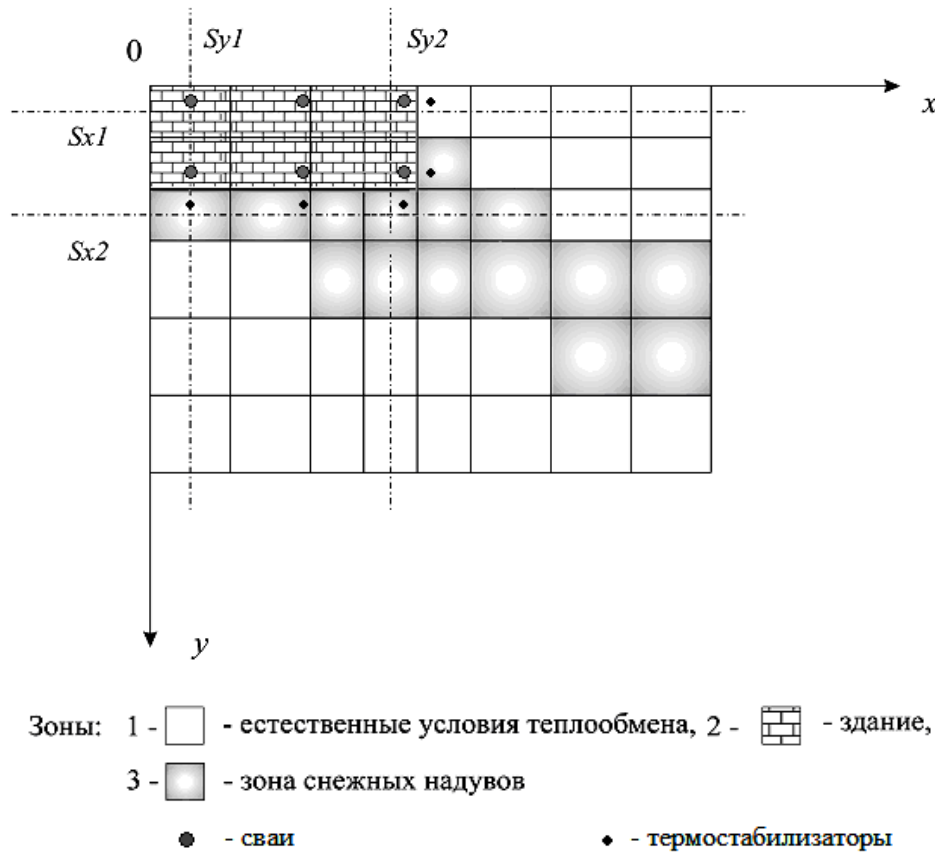


Рис.5.4. Верхняя граница расчетной области для здания со свайным фундаментом и термостабилизаторами.

Для использования источникового члена в методе контрольного объема необходимо найти \bar{s} – среднее значение функции $s(x, y, z, t)$ по контрольному объему. В результате усреднения имеем

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} s(x, y, z, t) dV = \frac{s_0(t)}{\Delta V} \int_w^e \delta(x - x_0) dx \int_s^n \delta(y - y_0) dy \int_b^t I_{[0, z_0]}(z) dz = \\ &= \frac{s_0(t)}{\Delta V} \int_{w_{k-1}^z}^{w_k^z} I_{[0, z_0]}(z) dz = \begin{cases} \frac{s_0(t)}{\Delta V} h_k^z, & w_k^z \leq z_0, \\ \frac{s_0(t)}{\Delta V} \Delta z_0, & w_k^z > z_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.5)$$

где w_{k-1}^z и w_k^z – координаты граней рассматриваемого КО вдоль оси z , h_k^z – высота контрольного объема по оси z , $\Delta z_0 = h_k^z - w_k^z + z_0$ – глубина, на которую погружен термостабилизатор в рассматриваемый КО (она может быть отлична от h_k^z только для того КО, в который попадает нижний конец термостабилизатора).

В задаче рассматривается простой тип термостабилизаторов: прямой, без изменения формы для теплоотвода. Предполагается, что у здания нет вентилируемого подполья, поэтому термостабилизаторы находятся вне границы здания.

На рис.5.5, 5.6 представлена динамика изменения температуры под зданием и вблизи него. Очевидно, с течением времени под зданием будет накапливаться холод. На рис.5.7, 5.8 представлены разрезы вдоль оси x и y соответственно.

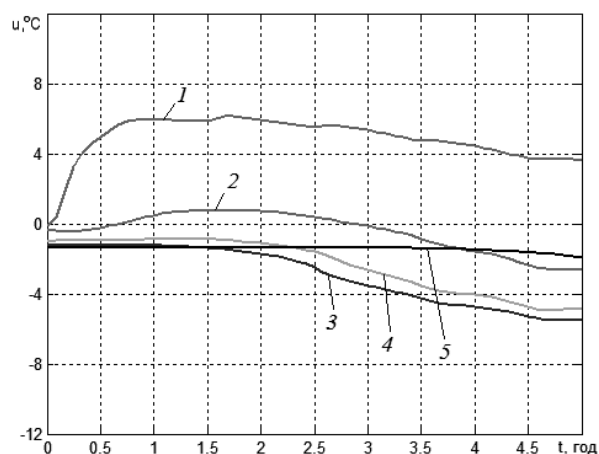


Рис.5.5. Зависимость температуры от времени в точке M_1 1 – на глубине 1м, 2 – на глубине 3м, 3 – на глубине 5м, 4 – на глубине 7м, 5 – на глубине 15.5м.

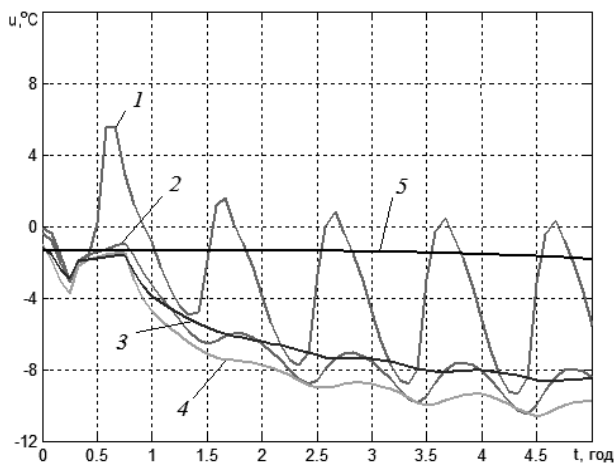


Рис.5.6. Зависимость температуры от времени в точке M_2 1 – на глубине 1м., 2 – на глубине 3м, 3 – на глубине 5м, 4 – на глубине 7м, 5 – на глубине 15.5м.

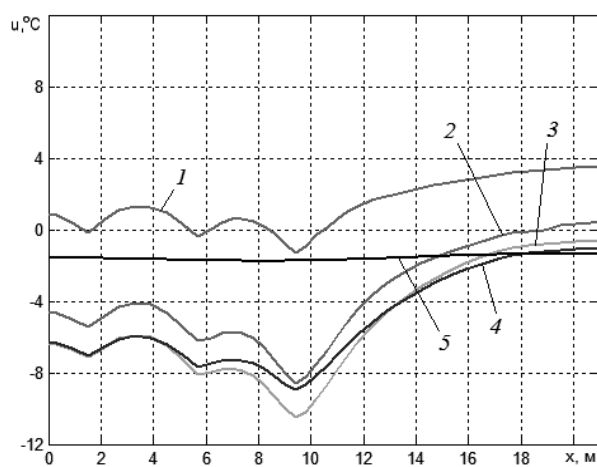


Рис.5.7. Зависимость температуры от координаты x в разрезе $Sx2$ в конечный момент времени 1 – на глубине 1м, 2 – на глубине 3м, 3 – на глубине 5м, 4 – на глубине 7м, 5 – на глубине 15м.

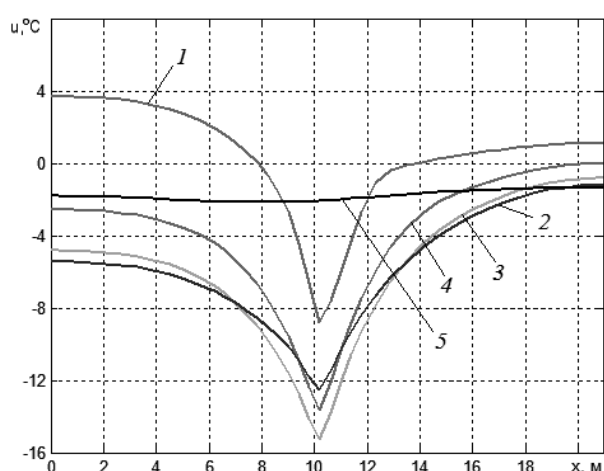


Рис.5.8. Зависимость температуры от координаты y в разрезе $Sx1$ в конечный момент времени 1 – на глубине 1м, 2 – на глубине 3м, 3 – на глубине 5м, 4 – на глубине 7м, 5 – на глубине 15м.

Расчеты проводились для температурного режима грунтов для конкретных инженерно-геологических разрезов с учетом естественных изменений температурного режима воздуха, естественных и техногенных условий теплообмена на поверхности грунтов и техногенных источников и стоков тепла (здания и сооружения).

Заключение

В работе изложена модель расчета распределения температурных полей в двухфазных дисперсных средах (грунтах). Новизна работы заключается в использовании ме-

тогда контрольного объема в решении трехмерных задач теплопроводности с учетом фазовых переходов. Предложенная методика позволяет осуществлять единый подход к проведению тепловых расчетов грунтов оснований для принятия проектных решений по обеспечению устойчивости и эксплуатационной надежности оснований и фундаментов геотехнических сооружений в условиях криолитозоны.

В разработанных алгоритмах учитываются условия на границе слоев, условия на границе фазового перехода воды в лед, физические свойства отдельных слоев. Теплофизические характеристики корректируются по ходу вычислений при изменении влажности и температуры. Разрешающие уравнения записываются в разностной форме. В каждом узле сетки определяются температура и влажность. С использованием разработанных моделей и программ можно проводить системный аналитический прогноз последствий техногенных воздействий. Основное достоинство нового подхода состоит в том, что в нем потенциально содержатся средства дальнейшего изучения свойств свободной границы.

Температурный режим (совокупность последовательных температурных полей в грунтовом массиве, соответствующих любым заданным моментам времени от начала расчета) рассчитывается как результат задаваемых на весь период расчета прогноза тепловых воздействий на верхней, боковых и нижней границах грунтового массива.

Применение результатов работы позитивно скажется на совершенствовании проектирования геотехнических объектов благодаря повышению обоснованности и качества принятия проектных решений. Использование методики повысит надежность, безопасность и экономичность эксплуатации фундаментов зданий и сооружений благодаря разработке математического аппарата для проведения прогноза температурного состояния грунтов, повышению обоснованности и качества проектных решений.

Работа имеет достаточно высокий предметный и математический уровень, показывающий возможность вычислительного эксперимента в данной области и освещающий вопросы: постановки задачи, построения математической модели, выбор математического метода, вычислительного алгоритма и его решения. Авторами разработана и внедрена программа для решения сформулированной задачи, представлены иллюстрированные расчеты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003, 784 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: учеб. пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1999, 799 с.
3. Дульнев Г.Н., Новиков В.В. Процессы переноса в неоднородных средах. – Л.: Энергоатомиздат, 1991, 248 с.
4. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы вычислений. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения: Учеб. пособие. – М.: Изд-во ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006, 72 с.
5. Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. – М.: Издательство МЭИ, 2003, 312 с.
6. Лыков Л.В. Тепломассообмен: (справочник). – М.: Энергия, 1978 г. – 480с.
7. Данилюк И.И. О задаче Стефана // Успехи математических наук, 1985, сентябрь-октябрь. т.40, вып.5(245), с.133-185.

8. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967, 599 с.
9. *Короновский Н.В.* Общая геология: учебник. – М.: Изд-во «Книжный дом университет», 2006, 528 с.
10. *Крылов Д.А., Сидняев Н.И., Федотов А.А.* Интегральный метод в задачах математического моделирования распределения температурных полей // Материалы Четвертой Всероссийской молодежной научно-инновационной школы «Математика и математическое моделирование». – Саров: Изд-во «Альфа», 2010, 109 с.
11. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1977, 440 с.
12. *Ferziger Joel H., Petric M.* Computational methods for fluid dynamics. 3 rev. ed. – New York: Springer, 2002, 423 p.
13. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х томах. – М.: Мир, 1991, 504с.
14. *Хрусталева Л.Н., Пармузин С.Ю., Емельянов Л.В.* Надежность северной инфраструктуры в условиях меняющегося климата: монография. – М.: Университетская книга, 2011, 260 с.
15. *Хрусталева Л.Н.* Основы геотехники в криолитозоне: Учебник. – М.: Изд-во МГУ, 2005, 542с.
16. *Попов А.П., Милованов В.И. и др.* К вопросу о типовых технических решениях по основаниям и фундаментам для криолитозоны // Инженерная геология, 2008, сентябрь, с.22-38.
17. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989, 432с.

Поступила в редакцию 24.10.2011.
Окончательный вариант 10.05.2012.