И. В. Павлов, О. В. Назарько, Обобщение теоремы Дуба о свободном выборе для деформированных субмартингалов, *УМН*, 2013, том 68, выпуск 6, 175–176

DOI: 10.4213/rm9560

## Обобщение теоремы Дуба о свободном выборе для деформированных субмартингалов

**И. В. Павлов, О. В. Назарько**

Данная работа посвящена развитию теории преобразования свободного выбора в случае дискретного времени (см., например, [1]) на структуре, значительно более общей, чем классический стохастический базис. Эта структура названа авторами деформированным стохастическим базисом и представляет собой фильтрованное пространство вместе с некоторым семейством вероятностей.

Пусть $(\Omega, \mathbf{F})$ – фильтрованное пространство с дискретным временем, где $\Omega$ – произвольное множество, а $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ – возрастающая последовательность $\sigma$-алгебр на нем (фильтрация). Семейство $\mathbf{Q} = (\mathsf{Q}^{(n)}, \mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ вероятностных мер $\mathsf{Q}^{(n)}$, определенных на $\mathscr{F}_n$, будем называть деформацией (выбор такого термина подробно аргументирован в [2]). Назовем $\mathbf{Q}$ деформацией 1-го рода (D1), если при всех $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ выполняются соотношения абсолютной непрерывности $\mathsf{Q}^{(n+1)}|_{\mathscr{F}_n} \ll \mathsf{Q}^{(n)}$, и деформацией 2-го рода (D2), если выполняются соотношения $\mathsf{Q}^{(n+1)}|_{\mathscr{F}_n} \gg \mathsf{Q}^{(n)}$.

Предположим, что при всех $n \in \mathbb{N}$ случайные величины (с. в.) $Z_n$ принадлежат пространствам $L_p(\Omega, \mathscr{F}_n, \mathsf{Q}^{(n)})$. Если $\mathbf{Q}$ есть D1 (соответственно D2), то процесс $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{Q}^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ назовем деформированным субмартингалом 1-го рода – DSubM1 (соответственно 2-го рода – DSubM2) при выполнении $\mathsf{Q}^{(n+1)}$-п. н. (соответственно $\mathsf{Q}^{(n)}$-п. н.) неравенств $Z_n \leqslant \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^{(n+1)}}[Z_{n+1} \mid \mathscr{F}_n]$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Аналогично определяются деформированные супермартингалы и мартингалы 1-го и 2-го рода (DSupM1, DSupM2, DM1, DM2).

Пусть $\tau\colon \Omega \to \mathbb{N}$ – конечный момент остановки (м. о.) относительно фильтрации $(\mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ (в данной работе мы будем рассматривать только такие м. о.). Пусть также $\mathbf{Q}$ – произвольная деформация. Для любого $A \in \mathscr{F}_\tau$ обозначим $\mathsf{Q}^{(\tau)}(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{Q}^{(i)}(A\{\tau = i\})$. Ясно, что $\mathsf{Q}^{(\tau)}$ – неотрицательная $\sigma$-конечная мера, совпадающая на $\{\tau = n\}$ при любом $n \in \mathbb{N}$ с мерой $\mathsf{Q}^{(n)}$. Если м. о. $\tau$ принимает лишь конечное число значений, то мера $\mathsf{Q}^{(\tau)}$ ограничена. В дальнейшем, если интеграл по мере $\mathsf{Q}^{(\tau)}$ от $\mathscr{F}_\tau$-измеримой с. в. $f$ определен, то он обозначается $\mathsf{E}^{(\tau)}(f) = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^{(\tau)}}(f)$.

Следующие технические результаты, использующиеся в доказательствах основных теорем данной работы, представляют и самостоятельный интерес.

Предложение 1. *Пусть м. о. $\tau$ и $\nu$ таковы, что $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant 1$, с. в. $f$ измерима относительно $\mathscr{F}_\nu$ и либо $f \geqslant 0$ $\mathsf{Q}^{(\nu)}$-п. в., либо $f \in L_1(\Omega, \mathscr{F}_\nu, \mathsf{Q}^{(\nu)})$. Тогда $\mathsf{Q}^{(\nu)}$-п. в. справедливо равенство*

$$\mathsf{E}^{(\nu)}[f \mid \mathscr{F}_\tau] = \sum_{k=0}^{\infty} f I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}^{(k+1)}\bigl[f I_{\{\nu=k+1\}} \mid \mathscr{F}_k\bigr] I_{\{\tau=k\}} I_{\{\nu=k+1\}}.$$

Предложение 2. *Пусть м. о. $\tau$ и $\nu$ таковы, что $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant N < \infty$. Если $\mathbf{Q}$ есть* D1, *то $\mathsf{Q}^{(\nu)}\big|_{\mathscr{F}_\tau} \ll \mathsf{Q}^{(\tau)}$. Если $\mathbf{Q}$ есть* D2, *то $\mathsf{Q}^{(\tau)} \ll \mathsf{Q}^{(\nu)}\big|_{\mathscr{F}_\tau}$.*

Предложение 3. *Пусть м. о. $\tau$ ограничен, а $\mathbf{Q}$ есть* D1 *или* D2. *Тогда $\mathsf{Q}^{(\tau)}(\Omega) > 0$.*

Отметим, что если м. о. $\tau$ неограничен, то легко конструируются примеры деформаций 1-го и 2-го рода, для которых $\mathsf{Q}^{(\tau)}(\Omega) = 0$.

С помощью предложений 1 и 2 доказывается следующая теорема, неулучшаемая для D1 и обобщаемая в дальнейшем для D2.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00637-а).

DOI: 10.4213/rm9560

Теорема 1. *Пусть* $(Z_n,\mathscr{F}_n,\mathsf{Q}^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ *есть* DSubM, *м. о.* $\tau$ *и* $\nu$ *таковы, что* $0\leqslant \nu-\tau\leqslant 1$ *и* $Z_\nu\in L_1(\Omega,\mathscr{F}_\nu,\mathsf{Q}^{(\nu)})$. *Если* $\mathbf{Q}$ *есть* D1, *то* $\mathsf{E}^{(\nu)}[Z_\nu\mid\mathscr{F}_\tau]\geqslant Z_\tau$ $\mathsf{Q}^{(\nu)}\big|_{\mathscr{F}_\tau}$*-п. в. Если* $\mathbf{Q}$ *есть* D2, *то* $\mathsf{E}^{(\nu)}[Z_\nu\mid\mathscr{F}_\tau]\geqslant Z_\tau$ $\mathsf{Q}^{(\tau)}$*-п. в.*

Для деформации 2-го рода $\mathbf{Q}$ введем процесс плотностей $(h^{(n)},\mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ формулой $d\mathsf{Q}^{(n)}=h^{(n)}d\mathsf{Q}^{(n+1)}\big|_{\mathscr{F}_n}$. Будем говорить, что деформация $\mathbf{Q}$ ограничена (BD2), если $\|h^{(n)}\|_{L_\infty(\Omega,\mathscr{F}_n,\mathsf{Q}^{(n)})}<\infty$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Равномерная ограниченность (UBD2) определяется неравенством $\sup_n\|h^{(n)}\|_{L_\infty(\Omega,\mathscr{F}_n,\mathsf{Q}^{(n)})}<\infty$.

Пусть $0\leqslant\nu-\tau\leqslant 1$. Рассмотрим операторы $E_\tau^{(\nu)}f:=\mathsf{E}^{(\nu)}[f\mid\mathscr{F}_\tau]$. Нетрудно доказать, что если $\mathbf{Q}$ есть D2, то $E_\tau^{(\nu)}\colon L_\infty(\Omega,\mathscr{F}_\nu,\mathsf{Q}^{(\nu)})\to L_\infty(\Omega,\mathscr{F}_\tau,\mathsf{Q}^{(\tau)})$ – ограниченный линейный оператор с нормой 1, и если $\mathbf{Q}$ есть UBD2, то $E_\tau^{(\nu)}\colon L_p(\Omega,\mathscr{F}_\nu,\mathsf{Q}^{(\nu)})\to L_p(\Omega,\mathscr{F}_\tau,\mathsf{Q}^{(\tau)})$ – ограниченный линейный оператор для любого $1\leqslant p<\infty$.

Определение 1. Пусть $\mathbf{Q}$ есть D2 и $\tau\leqslant\nu$ – два м. о., удовлетворяющие условию $0\leqslant\nu-\tau\leqslant N<\infty$. Образуем следующую последовательность м. о. $\{\tau_k\}_{k=0}^{K}$:

$$\tau=\tau_0\leqslant\tau_1\leqslant\cdots\leqslant\tau_K=\nu,\qquad 0\leqslant\tau_{k+1}-\tau_k\leqslant 1,\quad k=0,1,\dots,K-1$$

(например, можно положить $\tau_k=\nu\wedge(\tau+k)$, $k=0,1,\dots,N$). Если $f$ – $\mathscr{F}_\nu$-измеримая с. в. такая, что $f\geqslant 0$ $\mathsf{Q}^{(\nu)}$-п. в., то определим оператор $E_\tau^{(\nu)}f=E_{\tau_0}^{(\tau_1)}E_{\tau_1}^{(\tau_2)}\cdots E_{\tau_{K-1}}^{(\tau_K)}f$.

Теорема 2. *В условиях определения* 1 $\mathsf{Q}^{(\tau)}$*-п. в. справедлива формула* (*обосновывающая корректность определения* $E_\tau^{(\nu)}$): $E_\tau^{(\nu)}f=\sum_{k=0}^{\infty}I_{\{\tau=k\}}\sum_{i=0}^{\infty}E_k^{(k+i)}(fI_{\{\nu=k+i\}})$.

Теорема 3 (обобщение теоремы Дуба о преобразовании свободного выбора). *Предположим, что* $\mathbf{Q}$ *есть* UBD2, $\mathbf{Z}=(Z_n,\mathscr{F}_n,\mathsf{Q}^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ *есть* DSubM, $0\leqslant\nu-\tau\leqslant N<\infty$ *и* $Z_\nu\in L_1(\Omega,\mathscr{F}_\nu,\mathsf{Q}^{(\nu)})$. *Справедливо неравенство*

$$E_\tau^{(\nu)}Z_\nu\geqslant Z_\tau\qquad \mathsf{Q}^{(\tau)}\text{-}п.\,в.$$

Теоремы 1 и 3 с очевидными видоизменениями справедливы для деформированных супермартингалов и мартингалов.

Следствие 1. *Теорема о преобразовании свободного выбора справедлива, если* $\mathbf{Q}$ *есть* BD2 *в случае, когда м. о.* $\nu$ *принимает конечное число значений.*

Замечание 1. Пусть $\mathsf{P}$ – вероятностная мера, определенная на $\mathscr{F}_\infty$ – наименьшей $\sigma$-алгебре, содержащей все $\mathscr{F}_n$ $(n\in\mathbb{N})$, а $\mathsf{Q}^{(n)}=\mathsf{P}\big|_{\mathscr{F}_n}$. Тогда следствие 1 совпадает с классической теоремой о преобразовании свободного выбора для ограниченных м. о. Что касается основной теоремы 3, то для классического стохастического базиса $(\Omega,\mathbf{F},\mathscr{F}_\infty,\mathsf{P})$ при условиях $0\leqslant\nu-\tau\leqslant N<\infty$ и $Z_\nu\in L_1(\Omega,\mathscr{F}_\nu,\mathsf{P})$ получаем выполнение $\mathsf{P}$-п. н. неравенства $\mathsf{E}(Z_\nu\mid\mathscr{F}_\tau)\geqslant Z_\tau$. Возможно, такое достаточное условие является новым.

## Список литературы

[**1**] А. Н. Ширяев, *О мартингальных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением*, Совр. пробл. матем., **8**, МИАН, М., 2007, 80 с. [**2**] О. В. Назарько, И. В. Павлов, *Вестн. Ростов. гос. ун-та путей сообщения*, 2012, № 1(45), 200–208.

**И. В. Павлов (I. V. Pavlov)**
Ростовский государственный строительный университет
*E-mail*: pavloviv2005@mail.ru

Представлено Д. В. Трещёвым
Принято редколлегией
05.10.2013

**О. В. Назарько (O. V. Nazarko)**
Ростовский государственный строительный университет
*E-mail*: pavloviv2005@mail.ru