



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. R. Kiyatkin, Inference rules with metavariables, and logical equations in the  
pretabular modal logic PM1,  
*Sibirsk. Mat. Zh.*, 2000, Volume 41, Number 1, 88–97

<https://www.mathnet.ru/eng/smj1519>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms  
of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

April 23, 2025, 14:08:58



УДК 510.6

ПРАВИЛА ВЫВОДА С МЕТАПЕРЕМЕННЫМИ  
 И ЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ  
 В ПРЕДТАБЛИЧНОЙ МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ PM1

В. Р. Кияткин

**Аннотация:** Проблема разрешимости логических уравнений для некоторой логики  $\lambda$  вызывает интерес по крайней мере по двум причинам. Во-первых, с ней тесно связана проблема выводимости в логике  $\lambda$ , во-вторых, она сводится к проблеме разрешимости логики  $\lambda$  по допустимости для правил вывода с параметрами. Распознаваемость разрешимости логических уравнений впервые была установлена В. В. Рыбаковым для модальной логики  $S4$ , интуиционистской логики  $Int$ , для модальных логик  $S$  и  $GL$ , аксиоматизирующих доказуемость и других. Распознаваемость разрешимости логических уравнений с метапеременными в табличных и предтабличных локально конечных модальных логиках  $PM2$ – $PM5$ , расширяющих логику  $S4$ , установлена автором. Настоящая работа положительно решает проблему распознаваемости для предтабличной модальной логики  $PM1$ . Библиогр. 3.

Модальная пропозициональная формула  $\mathcal{F}$  от  $x_1, \dots, x_n$  считается истинной на топовулевой алгебре  $A$  (обозначение  $A \models \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ ), если на ней истинно тождество  $\forall x_1, \dots, \forall x_n (\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) = 1)$ . Множество формул  $\lambda(A) = \{\mathcal{F} \mid A \models \mathcal{F}\}$  называется *логикой алгебры*  $A$ . Хорошо известно, что для любой модальной логики  $\lambda \supseteq S4$  существует топовулева алгебра  $B$  такая, что  $\lambda = \lambda(B)$ . Эта алгебра порождает многообразие топовулевых алгебр  $\text{var}(B)$ , соответствующее логике  $\lambda$  (обозначение  $\text{var}(\lambda)$ ). Логику  $\lambda$  называют *табличной*, если существует конечная алгебра  $A$  такая, что  $\lambda = \lambda(A)$ , и *нетабличной* в противном случае. Собственно пропозициональные переменные будем отличать от переменных  $x_i$  для формул, называя их метапеременными или параметрами  $p_j$ . Когда же это различие несущественно, то те и другие переменные будем обозначать через  $y_l$ . Правило с метапеременными

$$\frac{\mathcal{A}_1(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m), \dots, \mathcal{A}_n(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)}{\mathcal{B}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)} \quad (1)$$

(обозначение  $\mathcal{A}_1(\bar{x}, \bar{p}), \dots, \mathcal{A}_n(\bar{x}, \bar{p})/\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p})$ , где  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$  и  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ) называется *допустимым в логике*  $\lambda$ , если для любых формул  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$  из того, что  $\mathcal{A}_i(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k, p_1, \dots, p_m) \in \lambda$  для всех  $1 \leq i \leq n$  следует  $\mathcal{B}(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k, p_1, \dots, p_m) \in \lambda$ . Правило (1) эквивалентно однопосылочному правилу вида  $\mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})/\mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p})$ , поскольку  $\alpha \in \lambda$  и  $\beta \in \lambda \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \in \lambda$ . *Логическим уравнением* называют любую формулу вида  $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)$  (обозначение  $\mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})$ ). Всякий набор формул  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ , удовлетворяющий условию  $\mathcal{A}(\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}) \in \lambda$ , где  $\bar{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k)$ , называется *решением* этого уравнения в логике  $\lambda$ . Если все переменные формулы  $\mathcal{A}$  являются параметрами, то проблема разрешимости уравнения  $\mathcal{A}$  в логике  $\lambda$  — это проблема выводимости данной формулы в  $\lambda$ .

**Теорема 1** [1]. Логическое уравнение  $\mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})$  разрешимо в логике  $\lambda$  тогда и только тогда, когда в ней недопустимо правило с метапеременными  $\mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})/\perp$ .

Таким образом, проблема логических уравнений, по существу, сводится к распознаванию допустимости правил вывода с метапеременными.

*Шкалой*  $\langle W, R \rangle$  называется непустое множество  $W$  с заданным на нем бинарным отношением  $R$ . Шкала  $\langle W_1, R_1 \rangle$  называется *открытой подшкалой шкалы*  $\langle W_2, R_2 \rangle$ , если  $W_1 \subseteq W_2$ ,  $R_2 \cap W_1^2 = R_1$  и  $\forall a \in W_1, \forall b \in W_2 (aR_2b \Rightarrow b \in W_1)$ . Множество всех элементов шкалы  $\langle W, R \rangle$ , достижимых из фиксированного элемента  $a \in W$ , т. е.  $\{b \in W \mid \langle a, b \rangle \in R\}$ , назовем *верхним конусом элемента*  $a$  (обозначение  $\nabla(a)$ ). Множество всех элементов шкалы  $\langle W, R \rangle$ , из которых достижим фиксированный элемент  $a \in W$ , т. е.  $\{c \in W \mid \langle c, a \rangle \in R\}$ , назовем *нижним конусом элемента*  $a$  (обозначение  $\Delta(a)$ ). Множество  $\{b \in \Delta(a) \mid b \neq a, \forall c (\langle b, c \rangle \in R \Rightarrow (c = a) \vee (c = b))\}$  назовем *множеством непосредственных предшественников элемента*  $a$  (обозначение  $\Lambda(a)$ ). Отображение  $\varphi$  шкалы  $\langle W_1, R_1 \rangle$  в шкалу  $\langle W_2, R_2 \rangle$  называется *p-морфизмом* если

- (i)  $(\forall a, b \in W_1)(aR_1b \Rightarrow \varphi(a)R_2\varphi(b))$ ,
- (ii)  $(\forall a, b \in W_1)(\varphi(a)R_2\varphi(b) \Rightarrow (\exists c \in W_1)(aR_1c \& (\varphi(c) = \varphi(b))))$ .

Всякое подмножество элементов из  $W$ , не связанных друг с другом отношением  $R$ , называется *антицепью шкалы*  $\langle W, R \rangle$ . *Моделью* называют тройку  $\langle W, R, V \rangle$ , где  $\langle W, R \rangle$  — шкала, а  $V$  — функция означивания переменных и метапеременных:  $D \xrightarrow{V} 2^W$ , где  $D = \text{Dom}(V) = \{y_1, y_2, \dots\}$  — область определения функции  $V$ . Стандартным образом функция  $V$  распространяется на произвольные формулы:

$$V(\neg \mathcal{A}) = W \setminus V(\mathcal{A}), \quad V(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = V(\mathcal{A}) \cap V(\mathcal{B}),$$

$$V(\Box \mathcal{A}) = \{a \mid \forall b (\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow (b \in V(\mathcal{A})))\}.$$

Модель  $\langle W_1, R_1, V_1 \rangle$  называется *открытой подмоделью модели*  $\langle W_2, R_2, V_2 \rangle$ , если

- (i)  $\langle W_1, R_1 \rangle$  — открытая подшкала шкалы  $\langle W_2, R_2 \rangle$ ,
- (ii)  $\text{Dom}(V_1) = \text{Dom}(V_2)$  и  $\forall y \in \text{Dom}(V_1)(V_1(y) = V_2(y) \cap W_1)$ .

Истинность формулы на элементе  $a$  модели  $\langle W, R, V \rangle$  определяется индуктивно:

$$a \Vdash_V y \Leftrightarrow a \in V(y), \quad y \in \text{Dom}(V),$$

$$a \Vdash_V \neg \mathcal{A} \Leftrightarrow a \not\Vdash_V \mathcal{A} \Leftrightarrow a \notin V(\mathcal{A}),$$

$$a \Vdash_V (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow (a \Vdash_V \mathcal{A}) \wedge (a \Vdash_V \mathcal{B}) \Leftrightarrow a \in V(\mathcal{A}) \cap V(\mathcal{B}),$$

$$a \Vdash_V \Box \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall b (\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow (b \Vdash_V \mathcal{A})) \Leftrightarrow a \in V(\Box \mathcal{A}).$$

Множество  $V(a) = \{y_i \mid y_i \in \text{Dom}(V), a \Vdash_V y_i\}$  будем называть *означиванием элемента*  $a$  в модели  $\langle W, R, V \rangle$ . Формула  $\mathcal{A}$  истинна в модели тогда и только тогда, когда  $\forall a \in W (a \Vdash_V \mathcal{A})$  (обозначение  $\langle W, R, V \rangle \Vdash \mathcal{A}$ ). Формула  $\mathcal{A}$  истинна на шкале тогда и только тогда, когда  $\forall V (\langle W, R, V \rangle \Vdash_V \mathcal{A})$  (обозначение  $\langle W, R \rangle \Vdash_V \mathcal{A}$ ). Отображение  $\varphi$  называется *p-морфизмом модели*  $\langle W_1, R_1, V_1 \rangle$  в модель  $\langle W_2, R_2, V_2 \rangle$ , если

- (i)  $\varphi$  является p-морфизмом шкалы  $\langle W_1, R_1 \rangle$  в шкалу  $\langle W_2, R_2 \rangle$ ,
- (ii)  $\text{Dom}(V_1) = \text{Dom}(V_2)$ ,
- (iii)  $\forall y \in \text{Dom}(V_1), \forall a \in W_1 (a \Vdash_{V_1} y \Leftrightarrow \varphi(a) \Vdash_{V_2} y)$ .

**Теорема 2** [2]. Пусть отображение  $\varphi$  есть  $p$ -морфизм модели  $\langle W_1, R_1, V_1 \rangle$  на модель  $\langle W_2, R_2, V_2 \rangle$ . Тогда для любой формулы  $\mathcal{F}$  от пропозициональных переменных и метапеременных из  $\text{Dom}(V_1)$

$$\forall a \in W_1 (a \Vdash_{V_1} \mathcal{F} \Leftrightarrow \varphi(a) \Vdash_{V_2} \mathcal{F}).$$

Правило с метапеременными  $r = \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p}) / \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p})$ , где  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$  и  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ , истинно в модели  $\langle W, R, V \rangle$  (обозначение  $\langle W, R, V \rangle \Vdash r$ ) тогда и только тогда, когда для любого означивания  $V'$  такого, что  $V'(p_j) = V(p_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , из  $\langle W, R, V' \rangle \Vdash \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})$  следует  $\langle W, R, V' \rangle \Vdash \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p})$ . Модель  $\langle W_n, R_n, V_n \rangle$  называется  $n$ -характеристической для логики  $\lambda$ , если для любой формулы  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(y_1, \dots, y_n)$  от  $n$  переменных из  $\text{Dom}(V_n)$

$$\mathcal{A} \in \lambda \Leftrightarrow \langle W_n, R_n, V_n \rangle \Vdash \mathcal{A}.$$

Элемент  $a$  модели  $\langle W_n, R_n, V_n \rangle$  называют *формульным*, если найдется формула  $\mathcal{F}_a$  от  $n$  переменных из  $\text{Dom}(V_n)$  такая, что  $\forall b \in W_n ((b \Vdash_{V_n} \mathcal{F}_a \Leftrightarrow (b = a))$ . Означивание  $V$  называют *формульным в модели*  $\langle W_n, R_n, V_n \rangle$ , если для любого  $y \in \text{Dom}(V)$  существует формула  $\mathcal{F}_y$  от  $n$  переменных из  $\text{Dom}(V_n)$  такая, что  $V(y) = V_n(\mathcal{F}_y)$ . Пусть  $C$  — конечная или бесконечная цепь с максимальным элементом. Максимальный элемент цепи  $C = C_1$  назовем *элементом глубины 1*, если  $a$  — элемент глубины  $d-1$ , то максимальный элемент  $b$  цепи  $C_d = C_{d-1} \setminus \{a\}$  назовем *элементом глубины  $d$* . Известен следующий критерий допустимости для правил вывода с метапеременными.

**Теорема 3** [2]. Правило с метапеременными  $r = \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p}) / \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p})$ , где  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$  и  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ , допустимо в логике  $\lambda$  тогда и только тогда, когда правило  $r$  истинно в модели  $\langle W_n, R_n, V \rangle$  для любой  $n$ -характеристической модели  $\langle W_n, R_n, V_n \rangle$  логики  $\lambda$ , для любого  $n \geq m$  и любого формульного означивания  $V$  такого, что  $\text{Dom}(V) = \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{p_1, \dots, p_m\}$ ,  $V(p_j) = V_n(p_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ .

Логик, максимальные в классе нетабличных, называются *предтабличными*. Существует в точности пять (PM1–PM5) предтабличных расширений модальной логики S4 [3]. В частности, модальная логика PM1 =  $\{\mathcal{F} \mid \forall \ell = 0, 1, \dots (A_\ell \Vdash \mathcal{F})\}$ , где  $A_\ell = \{\langle a_{(\ell, k)} \mid 0 \leq k \leq \ell + 1 \rangle, R_\ell\}$  — рефлексивная и транзитивная шкала и  $\langle a_{(\ell, k+1)}, a_{(\ell, k)} \rangle \in R_\ell$  (т. е.  $A_\ell$  — цепь длины  $\ell + 2$ ).

**Теорема 4** [2]. Следующая модель является  $n$ -характеристической для модальной логики PM1:

$$T(n) = \langle \{a_{\xi_1, \dots, \xi_d} \mid 1 \leq d < \infty, \xi_i \subseteq \Omega, \xi_j \neq \xi_{j+1}, 1 \leq j \leq d-1\}, R_n, V_n \rangle,$$

$$\Omega = \{y_1, \dots, y_n\}, \quad \Omega = \text{Dom}(V_n),$$

$$\langle a_{\xi_1, \dots, \xi_s}, a_{\zeta_1, \dots, \zeta_t} \rangle \in R_n \Leftrightarrow \forall k (1 \leq k \leq t \Rightarrow (\xi_k = \zeta_k) \wedge (s \geq t+1)),$$

$$V_n(y_i) = \{a_{\xi_1, \dots, \xi_d} \mid y_i \in \xi_d\}.$$

Любой элемент этой модели формульный.

Модель  $T(n)$  есть прямое объединение  $2^n$  подмоделей — компонент. Все элементы модели  $T(n)$  индексируются с помощью всевозможных различных подмножеств  $\xi_1, \dots, \xi_{2^n}$  множества  $\Omega$ , пронумерованных каким-нибудь способом. Элемент  $a_{\xi_i}$  считаем максимальным в своей компоненте  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq 2^n$ . Его глубина  $d$  равна 1. Полагаем, что  $a_{\xi_i} \Vdash_{V_n} y_s$  тогда и только тогда, когда  $y_s \in \xi_i$ , т. е.  $\xi_i = V(a_{\xi_i})$  — означивание элемента  $a_{\xi_i}$  в модели  $T(n)$ . Для

каждого элемента  $a_{\xi_i}$  в качестве множества  $\Lambda(a_{\xi_i})$  его непосредственных предшественников берем антицепь элементов  $a_{\xi_i, \xi_1}, \dots, a_{\xi_i, \xi_{i-1}}, a_{\xi_i, \xi_{i+1}}, \dots, a_{\xi_i, \xi_{2^n}}$ . В компоненте  $B_i$  они образуют множество элементов глубины  $d = 2$ . Полагаем, что  $a_{\xi_i, \xi_j} \Vdash_{V_n} y_s$  тогда и только тогда, когда  $y_s \in \xi_j$ , т. е.  $\xi_j = V(a_{\xi_i, \xi_j})$  будет означиванием элемента  $a_{\xi_i, \xi_j}$ ,  $1 \leq j \leq 2^n$  и  $j \neq i$ . Затем для каждого элемента  $a_{\xi_i, \xi_j}$  в качестве множества  $\Lambda(a_{\xi_i, \xi_j})$  его непосредственных предшественников берем антицепь элементов  $a_{\xi_i, \xi_j, \xi_1}, \dots, a_{\xi_i, \xi_j, \xi_{j-1}}, a_{\xi_i, \xi_j, \xi_{j+1}}, \dots, a_{\xi_i, \xi_j, \xi_{2^n}}$ . Они образуют множество элементов глубины  $d = 3$  в компоненте  $B_i$ . Полагаем, что  $a_{\xi_i, \xi_j, \xi_k} \Vdash_{V_n} y_s$  тогда и только тогда, когда  $y_s \in \xi_k$ , т. е.  $\xi_k = V(a_{\xi_i, \xi_j, \xi_k})$  будет означиванием элемента  $a_{\xi_i, \xi_j, \xi_k}$  для  $1 \leq k \leq 2^n$  и  $k \neq j$ . Этот процесс продолжаем указанным способом, двигаясь от максимального элемента и увеличивая глубину  $d = 3, 4, 5, \dots$ . Таким образом, всякая компонента  $B_i$  получается последовательным достраиванием множеств непосредственных предшественников для каждого элемента. По существу, компонента  $B_i$  представляет из себя пучок бесконечных цепей с максимальным элементом. При этом любые два соседних элемента одной цепи имеют различное означивание. Модель  $T(n)$  — это некоторая совокупность таких пучков. Если в этой модели положить  $\Omega = \{x_1, \dots, x_q\} \cup \{p_1, \dots, p_l\}$ ,  $q + l = n$ , то полученную  $n$ -характеристическую модель будем обозначать через  $T(q + l) = \langle W_{q+l}, R_{q+l}, V_{q+l} \rangle$ .

Зафиксируем какое-нибудь правило вывода  $r = \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p}) / \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p})$  вида (1), где  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ ,  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ . Зададим на шкале  $\langle W_n, R_n \rangle$  модели  $T(n)$  некоторое означивание  $V$  переменных из множества  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  и метапеременных из множества  $P = \{p_1, \dots, p_m\}$  (т. е.  $\text{Dom}(V) = X \cup P$ ). Полученную модель обозначим через  $T = \langle W_n, R_n, V \rangle$ . Возьмем произвольную полную цепь  $C$  из модели  $T$ . Для каждого элемента  $a_d \in C$  глубины  $d$  определим некоторое множество  $\eta(a_d) = P(a_d) \cup X(a_d) \cup F(a_d)$ , где  $P(a_d) = \{p_j \mid p_j \in P, a_d \Vdash_V p_j\}$ ,  $X(a_d) = \{x_i \mid x_i \in X, a_d \Vdash_V x_i\}$ ,  $F(a_d) = \{f_t \mid f_t \in F, a_d \Vdash_V f_t\}$ ,  $F$  — множество всех подформул  $\varphi$  формул  $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)$  и  $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)$ , а также формул вида  $\diamond\varphi$ , полученных из них. Пусть  $\bar{F} = l$ . Тогда для элемента  $a_d$  глубины  $d$  будет однозначно определена последовательность  $(\eta(a_1), \dots, \eta(a_d))$ , где  $\{a_1, \dots, a_d\}$  — верхний конус  $a_d$ . Множество  $\pi(a_d) = \{\eta(a_1), \dots, \eta(a_d)\}$ , состоящее из элементов этой последовательности, назовем  $r$ -потенциалом (или просто потенциалом) элемента  $a_d$ . Поскольку  $\pi(a_{d+1}) = \{\pi(a_d), \eta(a_{d+1})\}$ , мощности потенциалов соседних элементов различаются не более чем на 1. Следовательно, потенциал монотонно (может быть, нестрого) возрастает с увеличением глубины. Так как  $\overline{P \cup X \cup F} = k + m + l$ , мощности потенциалов ограничены числом  $2^{k+m+l}$ . Пару  $\tau(a_d) = (\eta(a_d), \pi(a_d))$  назовем  $r$ -типом (или просто типом) элемента  $a_d$  на цепи  $C$  в модели  $T$ , где  $\pi(a_d)$  — потенциал элемента  $a_d$ . Для любого фиксированного потенциала  $\pi$  существует ровно  $\bar{\pi}$  типов элементов. Отсюда произвольная цепь модели  $T$  может содержать максимум  $\Theta = 1 + 2 + 3 + \dots + 2^{k+m+l} = (1 + 2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$  различных типов элементов. Множество  $M$  элементов модели  $T$  назовем полным, если для любого подмножества  $\beta \subseteq P$  найдется по крайней мере один элемент  $a \in M$  такой, что  $\{p_j \mid a \Vdash_{V_n} p_j\} = \beta$ , т. е. чье означивание на параметрах совпадает с  $\beta$ . Например, нижний конус любого элемента модели  $T(n)$  и множество непосредственных предшественников любого элемента из  $T(n)$  являются полными множествами.

**Теорема.** *Правило вывода с метапеременными*

$$r = \frac{\mathcal{A}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)}{\mathcal{B}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)}$$

допустимо в логике РМ1 тогда и только тогда, когда оно истинно в любой конечной модели  $\mathcal{T}$  такой, что

1)  $\mathcal{T}$  является открытой подмоделью модели  $T_s$ , которая получается из  $s$ -характеристической модели  $T(s) = \langle W_s, R_s, V_s \rangle$  для логики РМ1 при  $s \leq m + k$  заданием некоторого означивания  $V^*$  такого, что  $V^*(p_j) = V_s(p_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ ;

2) модель  $\mathcal{T}$  содержит все максимальные элементы модели  $T_s$ ;

3) любая цепь модели  $\mathcal{T}$  содержит не более  $(1 + 2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$  элементов, где  $k$  — мощность множества переменных  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ ,  $m$  — мощность множества метапеременных  $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ ,  $l$  — мощность множества  $F$  всех подформул  $\varphi$  формул  $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)$  и  $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)$ , а также формул вида  $\diamond\varphi$ , полученных из них;

4) для любого элемента  $a \in \mathcal{T}$  если множество  $\Lambda(a)$  его непосредственных предшественников неполно, то для каждого подмножества  $\beta$  из  $P$  в верхнем конусе  $\nabla(a)$  найдется соответствующий ему элемент  $c_\beta$  такой, что  $\{p_j \mid c_\beta \Vdash_{V^*} p_j\} = \beta$  и его  $r$ -потенциал  $\pi(c_\beta)$  равен  $r$ -потенциалу  $\pi(a)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть правило вывода  $r$  недопустимо в логике РМ1. По теореме 3 найдутся некоторая  $s$ -характеристическая модель  $T(s) = \langle W_s, R_s, V_s \rangle$ , формульное означивание  $V'$ , удовлетворяющее условию  $\text{Dom}(V') = X \cup P = \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{p_1, \dots, p_m\}$ ,  $V'(p_j) = V_s(p_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , и элемент  $a_0 \in W_s$  такие, что

$$\forall a \in W_s (a \Vdash_{V'} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \text{ но } a_0 \not\Vdash_{V'} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

т. е.  $\langle W_s, R_s, V' \rangle \not\Vdash r$ . Докажем, что существует модель  $\mathcal{T}$  с указанными свойствами такая, что  $\mathcal{T} \not\Vdash r$ .

**Предложение 1.** *Если  $s > k + m$ , то правило  $r$  будет ложно в некоторой  $(k + m)$ -характеристической модели  $T(k + m) = \langle W_{k+m}, R_{k+m}, V_{k+m} \rangle$  при некотором означивании  $V''$  таком, что  $V''(p_j) = V_{k+m}(p_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ .*

Указанную  $(k + m)$ -характеристическую модель мы получим, преобразуя модель  $T_1 = \langle W_s, R_s, V' \rangle$ . Произведем преобразование отождествления элементов одной и той же конечной глубины модели  $T_1$ . Начнем с элементов глубины 1. Пусть максимальный элемент  $a_{\xi_i} \in T_1$  таков, что его означивание есть  $V'(a_{\xi_i}) = \alpha \cup \beta$ , где  $\alpha \subseteq X$  и  $\beta \subseteq P$ . Возьмем все остальные максимальные элементы  $a_{\xi_j}$  модели  $T_1$ , удовлетворяющие условию  $V'(a_{\xi_j}) = \alpha \cup \beta$ , и отождествим их с элементом  $a_{\xi_i}$ , т. е. сольем последовательно один за другим с  $a_{\xi_i}$ . Элемент  $a_{\xi_i}$  назовем *элементом слияния*. Далее перейдем к следующему максимальному элементу и выполним преобразование отождествления, затем — к следующему и т. д., пока не останутся только элементы слияния. В результате максимальных элементов в модели будет не больше  $2^{k+m}$ . Если это число строго меньше  $2^{k+m}$ , то добьемся точного равенства. Для этого отменим отождествление необходимого количества тех или иных элементов так, чтобы для всякого  $\beta \subseteq P$  осталось ровно  $2^k$  элементов  $a_{\xi_j}$ , чье означивание на параметрах в точности совпадает с  $\beta$ , т. е.  $V(a_{\xi_j}) \cap P = \beta$ . В итоге в результирующей модели останется ровно  $2^{k+m}$  максимальных элементов, т. е. столько же, сколько их в модели  $T(k + m)$ . Очевидно, ровно столько же будет и компонент. Возьмем одну из компонент полученной модели. Пусть  $a_{\xi_q}$  — ее максимальный элемент, а

$V(a_{\xi_q}) = \alpha_1 \cup \beta_1$  — его означивание ( $\alpha_1 \subseteq X, \beta_1 \subseteq P$ ). Элементы глубины 2 этой компоненты образуют множество  $\Lambda(a_{\xi_q})$  непосредственных предшественников элемента  $a_{\xi_q}$ . Произведем над ними преобразование отождествления. Эта процедура позволит нам оставить в множестве  $\Lambda(a_{\xi_q})$  результирующей модели для каждого  $\beta_t \subseteq P, \beta_t \neq \beta_1$ , ровно  $2^k$  элементов с означиванием  $\beta_t$  на параметрах и  $2^k - 1$  элементов с означиванием  $\beta_1$ , т. е. точно столько, сколько их в модели  $T(k+m)$ . Возьмем какой-нибудь элемент  $a_{\xi_q \xi_s}$  преобразованного множества  $\Lambda(a_{\xi_q})$ . Пусть  $V(a_{\xi_q \xi_s}) = \alpha_2 \cup \beta_2$  — его означивание ( $\alpha_2 \subseteq X, \beta_2 \subseteq P$ ). Рассмотрим множество  $\Lambda(a_{\xi_q \xi_s})$  непосредственных предшественников элемента  $a_{\xi_q \xi_s}$  в полученной модели. Они образуют множество элементов глубины 3. Произведем над ними процедуру отождествления. Это даст нам возможность оставить в множестве  $\Lambda(a_{\xi_q \xi_s})$  непосредственных предшественников в результирующей модели для каждого  $\beta_2 \subseteq P, \beta_2 \neq \beta_2$ , ровно  $2^k$  элементов с означиванием  $\beta_t$  на параметрах и  $2^k - 1$  элементов с означиванием  $\beta_2$ , т. е. точно столько, сколько их в модели  $T(k+m)$ . Такие же преобразования проведем для каждого оставшегося элемента  $a_{\xi_q \xi_j}$  из множества  $\Lambda(a_{\xi_q})$ . Далее переходим к элементам глубины 4, 5, 6 и т. д., двигаясь по направлению от максимальных элементов вглубь. Точно такие же преобразования производим со всеми остальными компонентами модели  $T_1$ . Результирующую модель обозначим через  $\tilde{T}$ . По построению модель  $\tilde{T}$  имеет фрейм, совпадающий с фреймом модели  $T(k+m)$ , и  $V''(p_j) = V_{k+m}(p_j), 1 \leq j \leq m$ , т. е. фактически  $\tilde{T} = \langle W_{k+m}, R_{k+m}, V'' \rangle$ . Отметим, что для любой полной цепи модели  $T_1$  некоторый ее дубликат (относительно означивания  $V''$ ) содержится в модели  $\tilde{T}$ . Определим отображение  $\varphi$  модели  $T_1$  на модель  $\tilde{T}$ . Произвольному элементу модели  $T_1$  поставим в соответствие его элемент слияния из модели  $\tilde{T}$ , если отождествление не отменялось, и сам этот элемент из  $\tilde{T}$ , если отождествление для него отменялось. Очевидно, что отображение  $\varphi$  является  $p$ -морфизмом. Тогда по теореме 2

$$\forall a \in W_{k+m}(a \Vdash_{V''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \quad \text{но} \quad a'_0 \not\Vdash_{V''} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где  $a'_0 = \varphi(a_0)$ , т. е.  $\langle W_{k+m}, R_{k+m}, V'' \rangle \not\Vdash r$ , что и требовалось доказать.

Вернемся к модели  $T_1 = \langle W_s, R_s, V' \rangle$  и трансформируем ее поэтапно в модель  $\mathcal{T}$ . Доказанное предложение 1 позволяет считать, что  $s \leq k+m$ . Введем некоторое преобразование цепей, которое назовем *прореживанием*. Пусть  $a$  — максимальный элемент произвольной цепи  $C$  какой-либо компоненты модели  $T_1$ . Все элементы того же  $r$ -типа, что и  $a$ , образуют некоторую подцепь цепи  $C$  с данным элементом  $a$  в качестве максимального. Элемент  $a$  назовем *представителем* данного типа на  $C$ . Удаляем все элементы этой подцепи, кроме самого элемента  $a$ , сохраняя его означивание (прореживаем по типу элемента  $a$ ). В преобразованной таким образом цепи возьмем элемент  $b$  глубины 2. Все элементы одинакового с ним типа также образуют некоторую подцепь. Удаляем все элементы этой подцепи, кроме самого элемента  $b$ , также сохраняя его означивание (прореживаем по типу элемента  $b$ ). Во вновь полученной цепи производим такую же процедуру с элементом глубины 3, затем глубины 4 и т. д. В результате получим прореженную цепь  $C^*$ , состоящую только из представителей типов, вместе с их означиванием из цепи  $C$ . Поскольку различных типов элементов всего  $\Theta = (1 + 2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$ , то и длина цепи  $C^*$  не превосходит  $\Theta$ . Для любого элемента  $a \in C$  через  $m(a)$  обозначим представителя его типа на цепи  $C^*$ .

**Предложение 2.**  $\forall a \in C$  ( $\tau(a) = \tau(m(a))$ ), в частности, представитель любого типа сохраняет свой тип на прореженной цепи  $C^*$ .

Доказательство ведем индукцией по глубине элемента  $a_d$ . Пусть для удобства нижний индекс элемента указывает его глубину. Если  $d = 1$ , то утверждение, очевидно, верно. Пусть оно верно также для всех элементов глубины  $d < l$ . Возьмем на цепи  $C$  элемент  $a_{l+1}$  глубины  $l + 1$ . Если он не максимальный в подцепи однотипных элементов, то на цепи  $C$  найдется элемент  $a_q$  того же типа, но глубины  $q \leq l$ . По индукционному предположению  $\tau(a_q) = \tau(m(a_q))$ . Поскольку  $\tau(a_{l+1}) = \tau(a_q)$  и  $\tau(m(a_q)) = \tau(m(a_{l+1}))$ , то  $\tau(a_{l+1}) = \tau(m(a_{l+1}))$ . Пусть  $a_{l+1}$  максимальный в подцепи однотипных элементов на  $C$ , т. е. именно он, сохранив свое означивание, под именем  $m(a_{l+1})$  займет соответствующее место на цепи  $C^*$ . По определению  $\pi(a_{l+1}) = \{\pi(a_l), \eta(a_{l+1})\}$ , где  $\eta(a_{l+1}) = F(a_{l+1}) \cup P(a_{l+1}) \cup X(a_{l+1})$ . Очевидно, что  $F(a_{l+1}) = \{f_t \mid f_t \in F, a_{l+1} \Vdash_{V'} f_t\}$  определяется только множествами  $P(a_{l+1}) = \{p_j \mid p_j \in P, a_{l+1} \Vdash_{V'} p_j\}$ ,  $X(a_{l+1}) = \{x_i \mid x_i \in X, a_{l+1} \Vdash_{V'} x_i\}$  и  $\pi(a_l)$ . Аналогично  $\pi(m(a_{l+1})) = \{\pi(m(a_l)), \eta(m(a_{l+1}))\}$ , и точно так же  $F(m(a_{l+1}))$  определяется только множествами  $P(m(a_{l+1})) \cup X(m(a_{l+1}))$  и  $\pi(m(a_l))$ . По построению элементы  $a_l$  и  $a_{l+1}$  имеют одинаковое означивание, т. е.  $P(a_{l+1}) = P(m(a_{l+1}))$  и  $X(a_{l+1}) = X(m(a_{l+1}))$ . По индукционному предположению  $\pi(a_l) = \pi(m(a_l))$ . Отсюда  $\tau(a_{l+1}) = \tau(m(a_{l+1}))$ , что и требовалось.

Возьмем произвольную компоненту модели  $T_1 = \langle W_s, R_s, V' \rangle$  с максимальным элементом  $a$ . Произведем прореживание всех цепей нижнего конуса  $\Delta(a)$  по типу элемента  $a$ . В преобразованной компоненте рассмотрим множество  $\Lambda(a)$  непосредственных предшественников элемента  $a$ . Для каждого  $b \in \Lambda(a)$  произведем прореживание всех цепей нижнего конуса  $\Delta(b)$  по типу элемента  $b$ . В полученной компоненте рассмотрим каждое множество  $\Lambda(b)$ . Для всякого  $c \in \Lambda(b)$  произведем прореживание всех цепей нижнего конуса  $\Delta(c)$  по типу элемента  $c$  и т. д. Указанное преобразование продолжаем, двигаясь по направлению от максимального элемента вглубь. Аналогично преобразуем и все остальные компоненты модели  $T_1$ . Таким образом будет прорежена каждая цепь модели  $T_1$ . Полученную в итоге модель обозначим через  $T_2 = \langle W_2, R_2, V_2 \rangle$ . Докажем, что

$$\forall f \in F (T_1 \Vdash f \Leftrightarrow T_2 \Vdash f).$$

Действительно, пусть для некоторой формулы  $f_1 \in F$  и некоторого элемента  $a \in T_1$   $a \not\Vdash_{V'} f_1$ . По предложению 2 элемент  $b = m(a)$  из  $T_2$  имеет тот же тип, что и элемент  $a$ . Тогда  $b \not\Vdash_{V_2} f_1$ . Обратное, пусть для некоторой формулы  $f_2 \in F$  и некоторого элемента  $c \in T_2$   $c \Vdash_{V_2} f_2$ . Возьмем любой элемент  $d \in T_1$  такой, что  $m(d) = c$ . По предложению 2 типы элементов  $d$  и  $c$  равны, т. е.  $d \Vdash_{V'} f_2$ . Из этого утверждения следует, что

$$\forall a \in W_2 (a \Vdash_{V_2} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \text{ но } a_0'' \not\Vdash_{V_2} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где  $a_0'' = m(a_0)$ , т. е.  $\langle W_2, R_2, V_2 \rangle \not\Vdash r$ . В полученной конечной модели  $T_2$ , двигаясь по направлению от максимальных элементов вглубь, произведем преобразование отождествления элементов множества  $\Lambda(a)$  для каждого  $a \in T_2$ , описанное в утверждении 1, не отменяя ни одно из них. Полученную результирующую модель обозначим через  $\mathcal{T} = \langle W_3, R_3, V_3 \rangle$ . По построению все максимальные элементы модели  $T_1$  остались таковыми в модели  $\mathcal{T}$ . Все блоки модели  $\mathcal{T}$  представляют собой пучки конечных цепей длины не более  $\Theta = (1 + 2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$



с максимальными элементами. Все элементы из множества  $\Lambda(a)$  непосредственных предшественников любого элемента  $a \in \mathcal{T}$  имеют различное означивание. Очевидно, что модель  $\mathcal{T}$  является открытой подмоделью модели  $T(k+m)$  при некотором означивании  $V^*$  таком, что  $V^*(p_j) = V_{k+m}(p_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Отображение  $\psi$ , ставящее в соответствие всякому элементу модели  $T_2$  его элемент слияния из модели  $\mathcal{T}$ , является  $p$ -морфизмом. Отсюда следует, что

$$\forall a \in W_3(a \Vdash_{V_3} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \text{ но } a_0''' \not\Vdash_{V_3} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где  $a_0''' = \psi(a_0'')$ , т. е.  $\mathcal{T} \not\Vdash r$ . Таким образом, условия 1–3 из формулировки настоящей теоремы справедливы для модели  $\mathcal{T}$ .

Докажем справедливость условия 4. Пусть элемент  $a \in \mathcal{T}$  таков, что множество  $\Lambda(a)$  его непосредственных предшественников неполно. Это значит, что в ходе прореживания из модели  $T_1$  был удален некоторый непосредственный предшественник  $\tilde{a}$  элемента  $a$  со всем своим нижним конусом  $\Delta(\tilde{a})$ . Пусть  $\beta$  — произвольное подмножество из  $P$ . Означивание  $V'$  в модели  $T_1$  таково, что  $V'(p_j) = V_s(p_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Это значит, что нижний конус любого элемента в модели  $T_1$  является полным множеством. Поэтому в  $\Delta(\tilde{a}) \subset T_1$  найдется элемент  $b$ , чье означивание на параметрах равно  $\beta$ . Тогда в  $\nabla(a) \subset T_1$  обязательно найдется элемент  $c$ , максимальный среди элементов того же типа, что и  $b$ . При этом, с одной стороны,  $\pi(c) \subseteq \pi(a) \subseteq \pi(b)$  ввиду монотонности потенциала, с другой стороны,  $\pi(c) = \pi(b)$  как потенциалы однотипных элементов. В итоге  $\pi(c) = \pi(a)$  и согласно предложению 2 условие 4 теоремы тоже выполнено.

Обратно, пусть некоторая модель  $\mathcal{T} = \langle W, R, V''' \rangle$  удовлетворяет условиям настоящей теоремы, т. е. является открытой подмоделью некоторой  $s$ -характеристической модели  $\langle W_s, R_s, V_s \rangle$ ,  $s \leq m+k$ , с заданным на ней означиванием  $V^*$  таким, что  $V^*(p_j) = V_s(p_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ . При этом  $W \subset W_s$ ,  $\overline{W} < \infty$ ,  $R = R_s \upharpoonright W$ ,  $V''' = V^* \upharpoonright W$ ,  $V'''(p_j) = V^*(p_j) \upharpoonright W$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Пусть  $\mathcal{T} \not\Vdash r$ . Тогда найдется элемент  $a_1 \in W$  такой, что

$$\forall a \in W(a \Vdash_{V'''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \text{ но } a_1 \not\Vdash_{V'''} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}).$$

Докажем, что тогда  $\langle W_s, R_s, V^* \rangle \not\Vdash r$  для некоторого формульного означивания  $V^*$  такого, что  $V^*(p_j) = V_s(p_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Построим модель  $\mathcal{T}$  до модели  $T = \langle W_s, R_s, V^* \rangle$  и докажем формульность  $V^*$ . С этой целью введем преобразования, в некотором смысле обратные преобразования прореживания и отождествления. Пусть  $a$  есть произвольный элемент модели  $\mathcal{T}$  и  $\alpha$  — его означивание на параметрах. Первое преобразование относится к случаю, когда множество  $\Lambda(a)$  непосредственных предшественников элемента  $a$  неполно. Пусть  $\beta \subset P$  — недостающее подмножество. По условию теоремы в верхнем конусе  $\nabla(a)$  найдется элемент  $c$  такой, что  $\pi(c) = \pi(a)$  и его означивание на параметрах совпадает с  $\beta$ . Добавим в множество  $\Lambda(a)$  модели  $\mathcal{T}$  элемент  $b$  с означиванием, совпадающим с означиванием элемента  $c$ , т. е.  $\eta(b) = \eta(c)$ . Полученное расширение модели обозначим через  $\widehat{\mathcal{T}} = \langle \widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V}''' \rangle$ . Потенциалы элементов соседствующих элементов  $a$  и  $b$  могут различаться по мощности лишь на 1. Поскольку  $\eta(b) = \eta(c)$ ,  $\eta(c) \in \pi(c)$  и  $\pi(c) = \pi(a)$ , то  $\eta(b) \in \pi(a)$  и, значит,  $\pi(b) = \pi(a) = \pi(c)$ . Отсюда следует, что типы элементов  $c$  и  $b$  в модели  $\widehat{\mathcal{T}}$  равны. По этой причине из того, что  $c \Vdash_{V'''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})$ , следует  $b \Vdash_{\widehat{V}'''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})$ , т. е. в модели  $\widehat{\mathcal{T}}$  сохраняется истинность посылки и ложность следствия правила  $r$ . Тогда  $\widehat{\mathcal{T}} \not\Vdash r$ . Произведем такое же преобразование для всех оставшихся недостающих подмножеств из  $P$ . В преобразованной таким образом модели множество  $\Lambda(a)$

непосредственных предшественников элемента  $a$  уже будет полным. Введенное преобразование назовем *пополнением множества*  $\Lambda(a)$ . Второе преобразование относится к случаю, когда множество  $\Lambda(a)$  непосредственных предшественников элемента  $a$  будет полным. Возьмем любой элемент  $b$  из этого множества. Пусть означивание  $b$  на параметрах равно  $\beta$ . Добьемся, если это необходимо, чтобы общее количество элементов с таким же означиванием на параметрах в  $\Lambda(a)$  было  $2^t$  в случае  $\alpha \neq \beta$  и  $2^t - 1$  в случае  $\alpha = \beta$ , где  $t = s - m$ , т. е. в точности столько, сколько их в модели  $T = \langle W_s, R_s, V^* \rangle$ . Для этого добавим в  $\Lambda(a)$  необходимое количество элементов, означивание которых совпадает с означиванием элемента  $b$ . Полученное расширение модели обозначим через  $\widetilde{\mathcal{T}} = \langle \widetilde{W}, \widetilde{R}, \widetilde{V}''' \rangle$ . Заметим, что все добавленные элементы будут иметь тот же тип в модели  $\widetilde{\mathcal{T}}$ , что и элемент  $b$ , поскольку будут иметь тот же потенциал. Отображение  $\varrho$  модели  $\widetilde{\mathcal{T}}$  на модель  $\mathcal{T}$ , переводящее каждый добавленный элемент в элемент  $b$ , а остальные элементы в самих себя, очевидно, является  $p$ -морфизмом. Отсюда по теореме 2

$$\forall a \in \widetilde{W} (a \Vdash_{\widetilde{V}'''} \mathcal{A}(\bar{x}, \bar{p})), \quad \text{но} \quad a'_1 \not\Vdash_{\widetilde{V}'''} \mathcal{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где  $a'_1 = \varrho(a_1)$ , т. е.  $\widetilde{\mathcal{T}} \not\Vdash r$ . Произведем указанное преобразование для каждого  $b \in \Lambda(a)$ . В преобразованной таким образом модели множество  $\Lambda(a)$  непосредственных предшественников элемента  $a$  будем называть *абсолютно полным*. Введенное преобразование назовем *абсолютным пополнением множества*  $\Lambda(a)$ .

Возьмем произвольную компоненту модели  $\mathcal{T}$  с максимальным элементом  $a$ . Рассмотрим элементы глубины 2. Произведем, если необходимо, преобразования пополнения и абсолютного пополнения множества  $\Lambda(a)$  непосредственных предшественников элемента  $a$ . В преобразованной модели множество  $\Lambda(a)$  будет абсолютно полным, как в модели  $T_3$ . Возьмем в этом новом множестве произвольный элемент  $b$  и перейдем к элементам глубины 3. Произведем, если необходимо, преобразования пополнения и абсолютного пополнения множества  $\Lambda(b)$  непосредственных предшественников элемента  $b$ . В преобразованной модели множество  $\Lambda(b)$  также будет абсолютно полным. Произведем указанную процедуру для каждого  $b \in \Lambda(a)$ . В преобразованной таким образом модели возьмем произвольный элемент  $c$  глубины 3 и перейдем к элементам глубины 4. Указанный выше процесс продолжим, переходя к элементам глубины 5, глубины 6 и т. д., двигаясь по направлению от максимального элемента вглубь. Аналогично преобразуем и все остальные компоненты модели  $\mathcal{T}$ . По условию теоремы модель  $\mathcal{T}$  содержит все максимальные элементы модели  $T_3$ . В результате произведенных преобразований модель  $\mathcal{T} = \langle W, R, V''' \rangle$  окажется достроенной до модели  $T_3 = \langle W_s, R_s, V^* \rangle$ . Из доказанных выше свойств преобразований пополнения и абсолютного пополнения следует, что  $\langle W_s, R_s, V^* \rangle \not\Vdash r$ .

Докажем формульность означивания  $V^*$ . Для любого  $\eta \subseteq X \cup P \cup F$  построим формулы

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= \left( \bigwedge_{x_i \in \eta} x_i \wedge \bigwedge_{x_i \notin \eta} \neg x_i \right) \wedge \left( \bigwedge_{p_j \in \eta} p_j \wedge \bigwedge_{p_j \notin \eta} \neg p_j \right) \wedge \left( \bigwedge_{f_t \in \eta} f_t \wedge \bigwedge_{f_t \notin \eta} \neg f_t \right), \\ \psi(\eta) &= \diamond \left( \bigwedge_{x_i \in \eta} x_i \wedge \bigwedge_{x_i \notin \eta} \neg x_i \right) \wedge \diamond \left( \bigwedge_{p_j \in \eta} p_j \wedge \bigwedge_{p_j \notin \eta} \neg p_j \right) \wedge \diamond \left( \bigwedge_{f_t \in \eta} f_t \wedge \bigwedge_{f_t \notin \eta} \neg f_t \right). \end{aligned}$$

Пусть  $\tau = (\eta_d, \{\eta_1, \dots, \eta_d\})$  — некоторый тип элементов модели  $\langle W_s, R_s, V^* \rangle$ , где  $\eta_i \subseteq X \cup P \cup F$ ,  $1 \leq i \leq d$ . Определим формулу  $f(\tau) = \varphi(\eta_d) \wedge (\psi(\eta_1) \wedge \dots \wedge$

$\psi(\eta_d)$ ). Покажем, что  $f(\tau)$  истинна только на элементах типа  $\tau$ . Пусть  $\tau_1 \neq \tau_2$  и  $a$  — элемент типа  $\tau_1$ . Тогда  $a \not\Vdash_{V^*} f(\tau_2)$ . Действительно, если у этих типов разные потенциалы, то найдется некоторое  $\eta_s$  из потенциала типа  $\tau_2$  такое, что  $a \not\Vdash_{V^*} \psi(\eta_s)$ , где  $\psi(\eta_s)$  — подформула формулы  $f(\tau_2)$ . Если же потенциалы одинаковые, то в них найдется некоторое  $\eta_q$  такое, что  $a \not\Vdash_{V^*} \varphi(\eta_q)$ , где  $\varphi(\eta_q)$  — подформула формулы  $f(\tau_2)$ . В обоих случаях  $a \not\Vdash_{V^*} f(\tau_2)$ . Таким образом, множество  $M_\tau$  элементов модели  $\langle W_s, R_s, V^* \rangle$  типа  $\tau$  формульно:  $M_\tau = V^*(f_\tau)$ . Возьмем произвольную переменную или метапеременную  $y_i \in X \cup P$ . Пусть  $y_i \in \tau$ , т. е.  $y_i \in \eta_d$  в типе  $\tau = (\eta_d, \{\eta_1, \dots, \eta_d\})$ . Для любого элемента  $a$  данного типа  $\tau$   $a \Vdash_{V^*} f(\tau)$  и, следовательно,  $a \Vdash_{V^*} y_i$ . Иными словами,  $M_\tau \subseteq V^*(y_i)$  для любого  $\tau$  такого, что  $y_i \in \tau$ . С другой стороны, любое  $a \in V^*(y_i)$  содержится в  $M_\tau$  для подходящего  $\tau$ . Это означает, что

$$V^*(y_i) = M_{\tau_1} \cup \dots \cup M_{\tau_u} = V^*(f(\tau_1)) \cup \dots \cup V^*(f(\tau_u)) = V^*\left(\bigvee_{j=1}^u f(\tau_j)\right),$$

где  $\tau_1, \dots, \tau_u$  — все типы такие, что  $y_i \in \tau_j$ ,  $1 \leq j \leq u$ . Обозначим формулу  $\bigvee_{j=1}^u f(\tau_j) = \mathcal{F}_i$ , тогда  $V^*(y_i) = V^*(\mathcal{F}_i)$ . Это доказывает, что означивание  $V^*$  формульно. Тогда по теореме 3 правило  $r$  с метапеременными ложно в логике  $PM1$ . Из теоремы 5 непосредственно следует

**Теорема 6.** *Предтабличная модальная логика  $PM1$  разрешима по допустимости для правил вывода с метапеременными. В предтабличной модальной логике  $PM1$  разрешимость логических уравнений алгоритмически распознаваема.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рыбаков В. В. Уравнения в свободной топобулевой алгебре // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 2. С. 172–204.
2. Rybakov V. V. Admissibility of logical inference rules. New York; Amsterdam: Elsevier scientific publ., 1996.
3. Максимова Л. Л. Предтабличные расширения логики  $S4$  Льюиса // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 1. С. 28–56.

*Статья поступила 18 марта 1998 г.*

*г. Красноярск*