V. V. Ishkhanov, B. B. Lur'e, On the embedding problem with noncommutative kernel of order p^4. VI, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1995, Volume 227, 74–82

В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье

О ЗАДАЧЕ ПОГРУЖЕНИЯ С НЕКОММУТАТИВНЫМ ЯДРОМ ПОРЯДКА p^4. VI

Сообщив в предыдущей работе этого цикла о его завершении, авторы несколько поторопились. Закончив исследование задачи погружения с некоммутативным ядром порядка p^4 для случая регулярного ядра (это всегда так при $p > 3$), мы упустили из виду две группы порядка 3^4 и одну группу порядка 2^4. В настоящей работе мы восполняем эти пробелы.

§ 1. Задача погружения с ядром порядка 3^4

1^0. Рассмотрим задачу погружения $(K/k, G, \varphi)$ с ядром B порядка 3^4, порожденную образующими α, γ и соотношениями $\alpha^9 = 1$, $[\alpha, \gamma] = \beta$, где $\beta^3 = 1$, $[\alpha, \beta] = 1$, $[\beta, \gamma] = \alpha^3$. При этом γ^3 может равняться либо 1, либо α^3. Условия $\gamma^3 = 1$ и $\gamma^3 = \alpha^3$ дают неизоморфные группы, но рассмотрение задач погружения с этими двумя ядрами практически одинаково. Группу G мы, как и ранее, считаем p-группой, а поле k содержащим первообразный корень ζ степени 3 из единицы.

Полная группа p-автоморфизмов ядра B имеет порядок p^5 и задается на образующих условиями: $\alpha \to \beta^i \alpha^{3j+1}$, $\gamma \to \gamma \beta^k \alpha^l$ (соответственно, $\beta \to \beta\alpha^{-3i}$), где i, j, k рассматриваются по $\bmod 3$, а l по $\bmod 9$. Значительно облегчает изучение нашей задачи следующее соображение.

Лемма 1. *Группа всех p-автоморфизмов группы B является полупрямым расширением подгруппы внутренних автоморфизмов посредством подгруппы внешних p-автоморфизмов.*

Доказательство. Рассмотрим автоморфизмы σ и τ группы B, заданные условиями: $\gamma^\sigma = \gamma\alpha^{-1}$, $\alpha^\sigma = \beta^{-1}\alpha^{-2}$ (соответственно $\beta^\sigma = \beta\alpha^3$); $\gamma^\tau = \gamma\beta$, $\alpha^\tau = \alpha^{-2}$, $\beta^\tau = \beta$.

Тогда $\sigma^3 = 1$, $\tau^3 = 1$, $[\sigma, \tau] = 1$, и (как нетрудно заметить), подгруппа автоморфизмов, порожденная σ и τ, пересекается с под-

Работа поддержана фондом РФФИ, проект NO. 94-01-00915.

*)В работе [7] имеется опечатка. В соотношениях для исследуемой группы должно быть $a^8 = 1$, $b^2 = a^4$, $[a, b] = a^{-2}$.

группой внутренних автоморфизмов лишь по единичному автоморфизму. Поскольку группа внутренних автоморфизмов имеет порядок p^3, то подгруппа $\langle\sigma,\tau\rangle$ и является искомым полупрямым дополнением.

Обозначим через H_0 подгруппу элементов $g \in G$, индуцирующих тривиальные автоморфизмы на ядре B, а через H подгруппу элементов $g \in G$, индуцирующих автоморфизмы вида $\sigma^i\tau^j$ $(i,j = 0,1,2,)$ при указанном выше действии σ,τ. Тогда H сюръективно отображается на $F = \mathrm{Gal}(K/k)$, а подгруппы B и H пересекаются лишь по центру группы B порядка 3 (порожденному элементом α^3). Мы получили следующее

Предложение 1. *Групповое расширение* $1 \to B/B_0 \to G/B_0 \to F \to 1$, *где* $B_0 = \langle\alpha^3\rangle$, *является полупрямым. Исходное же расширение* $1 \to B \to G \to F \to 1$ *может быть определено каноническим коциклом* z_{f_1,f_2} *со значениями в* B_0.

2^0. Будем решать нашу задачу погружения $(K/k, G, \varphi)$ в два этапа. На первом рассмотрим сопутствующую задачу погружения, полученную факторизацией по коммутанту A ядра, порожденному элементами α^3 и β, и опишем все решения L этой задачи. На втором – выясним, каким условиям должно удовлетворять расширение L для того, чтобы была разрешима задача погружения расширения L/k с ядром A и группой G.

Обозначим через φ^* сопровождающий гомоморфизм F в группу внешних p-автоморфизмов ядра B. Мы будем считать, что этот гомоморфизм сюръективен (в противном случае изучение задачи лишь упрощается). Пусть F_0 – ядро φ^*, и K_0 – подполе поля K, отвечающее F_0. Тогда K_0 порождается над k элементами $\sqrt[3]{m_\sigma}$, $\sqrt[3]{m_\tau}$, где $m_\sigma, m_\tau \in k^*$, выбранными так, что $\sqrt[3]{m_\sigma}^{\,\sigma} = \sqrt[3]{m_\sigma}\zeta$, $\sqrt[3]{m_\sigma}^{\,\tau} = \sqrt[3]{m_\sigma}$, $\sqrt[3]{m_\tau}^{\,\sigma} = \sqrt[3]{m_\tau}$, $\sqrt[3]{m_\tau}^{\,\tau} = \sqrt[3]{m_\tau}\zeta$ (под σ и τ мы понимаем здесь и далее элементы из F , чьи прообразы в H действуют на ядре указанным выше образом).

Задача $(K/k, G/A, B/A)$ – абелева полупрямая, и ее решения легко описываются. Всякое решение L этой задачи имеет вид $K(\sqrt[3]{x}, \theta)$, где $x \in k^*$, $\sqrt[3]{x}^{\,\bar\alpha} = \sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x}^{\,\bar\gamma} = \sqrt[3]{x}\zeta$, $(K(\sqrt[3]{x})$ решает прямую задачу погружения, полученную факторизацией по подгруппе $\langle\alpha,\beta\rangle)$,

$$\theta^\gamma = \theta, \quad \theta^\alpha = \theta\zeta^{-1}, \quad \theta^\tau = \theta, \quad \theta^\sigma = \frac{\theta v}{\sqrt[3]{x}}, \quad \text{где} \quad v \in k(\sqrt[3]{m_\sigma}).$$

Кроме того, x является нормой элемента v, т.е. $x = v^{1+\sigma+\sigma^2}$,

$\theta^3 = \theta^{\sigma+2\sigma^2} \cdot y$, где $y \in k^*$. Таким образом, L определяется двумя произвольно выбранными элементами $v \in k(\sqrt[3]{m_\sigma})$ и $y \in k^*$.

Наша задача свелась к выяснению условий, наложенных на v и y, при которых разрешима задача погружения, связанная с последовательностью

$$1 \to A \to G \to \mathrm{Gal}(L/k) \to 1. \tag{2}$$

Напомним, что L может быть как полем, так и алгеброй Галуа.

3^0. Задача (2) имеет ядро порядка p^2, поэтому ее разрешимость эквивалентна условию согласности, т.е. распадению скрещенного произведения $G \times L$ в матричную алгебру над своим центром. Центр алгебры $G \times L$ является прямой суммой нескольких полей с центральными идемпотентами $e_0 = \frac{1+\alpha^3+\alpha^6}{3} \cdot \frac{1+\beta+\beta^2}{3}$, $e_i = \frac{1+\alpha^3+\alpha^6}{3} \cdot \frac{1+\beta\zeta^{-i}+\beta^2\zeta^i}{3}$ $(i = 1,2)$, $E_j = \frac{1+\alpha^3\zeta^{-j}+\alpha^6\zeta^j}{3}$ $(j = 1,2)$. При этом центры алгебр $(G \times L)\ E_j$ суть $k(\beta\sqrt[3]{x}^j\sqrt[3]{m_\sigma}^{-j}E_j) \simeq k(\sqrt[3]{xm_\sigma^{-j}})$ (разумеется, если $x^j m_\sigma^{-j}$ является кубом в k, алгебры $k(\beta\sqrt[3]{x}^j\sqrt[3]{m_\sigma}^{-j}E_j)$ являются прямой суммой трех полей, изоморфных k).

Алгебра $(G \times L)e_0$ изоморфна скрещенному произведению поля (алгебры) L со своей группой Галуа G/A с единичными факторами, и поэтому всегда распадается. Условия распадения алгебр $(G \times L)e_1$ и $(G \times L)e_2$ экивалентны, так же эквивалентны условия распадения алгебр $(G \times L)E_1$ и $(G \times L)E_2$. Поэтому достаточно исследовать условия распадения алгебр $(G \times L)e_1$ и $(G \times L)E_1$.

4^0. Выясним условия распадения $(G \times L)e_1$. Эти условия являются в то же время условиями разрешимости задачи погружения $(L/k, G/B_0)$.

Алгебра $(H \times K)e_1$ является скрещенным произведением поля K с группой F с единичными факторами, так как значения канонического коцикла становятся тривиальными при умножении на e_1. Алгебра $(G\times K)e_1$ изоморфна тензорному произведению (над k) алгебры $(H \times K)e_1$ и ее централизатора в $(G \times K)e_1$. Этот централизатор порожден над k элементами $\alpha\sqrt[3]{m_\sigma}e_1$ и $\gamma^{-1}(1+\zeta^2\alpha+\alpha^2)\sqrt[3]{m_\tau}e_1$. Поскольку $(\gamma^{-1})^\alpha e_1 = \gamma^{-1}\zeta e_1$, и $[\gamma^{-1}(1+\zeta^3\alpha+\alpha^2)e_1]^3 = 3(1-\zeta^2)e_1$, централизатор $(H \times K)e_1$ в $(G \times K)e_1$ изоморфен алгебре обобщенных кватернионов $k[3(1-\zeta^2)m_\tau, m_\sigma]$. Обозначение $k[w_1, w_2]$ мы используем для простой алгебры размерности 9 над k с образующими ξ_1, ξ_2 и соотношениями $\xi_1^3 = w_1$, $\xi_2^3 = w_2$, $\xi_2^{-1}\xi_1\xi_2 = \xi_1\zeta$.

Соответственно, централизатор алгебры $(G\times K)e_1$ в $(G\times L)e_1$ порождается над k двумя элементами $\alpha\sqrt[3]{m_\sigma}\sqrt[3]{x}^{-1}$ и $\eta=\gamma^{-1}(\theta+\zeta^2\alpha\theta^\sigma+\alpha^2\theta^{\sigma^2})\sqrt[3]{m_\tau}e_1$. Поскольку $(\alpha\sqrt[3]{m_\sigma}\sqrt[3]{x}^{-1}e_1)^\eta = (\alpha\sqrt[3]{m_\sigma}\sqrt[3]{x}^{-1}e_1)\zeta$, этот централизатор изоморфен алгебре $k[m_\sigma x^{-1}, \eta^3]$. Элемент η^3 принадлежит центру алгебры $(G\times L)e_1$, т.е. $\eta^3 \in ke_1$. Вычисления показывают, что $\eta^3 = (\mathrm{Tr}\,(v^{2+\sigma^2}) - 3\zeta^2 x)\cdot y m_\tau e_1$. Соответственно, централизатор алгебры $(H\times K)e_1$ в $(G\times L)e_1$ изоморфен тензорному произведению двух кватернионных алгебр $k[3(1-\zeta^2)m_\tau, m_\sigma]\otimes k[m_\sigma x^{-1}$, $(\mathrm{Tr}\,(v^{2+\sigma^2}) - 3\zeta^2 x)y m_\tau]$ и мы получили предложение

Предложение 2. *Для распадения алгебр $(G\times L)e_i$ $(i = 1, 2)$ необходимо и достаточно, чтобы были изоморфны алгебры $k[3(1-\zeta^2)m_\tau, m_\sigma]$ и $k[(\mathrm{Tr}\,(v^{2+\sigma^2}) - 3\zeta^2 x)y m_\tau, m_\sigma x^{-1}]$.*

Заметим, что указанные алгебры очевидно изоморфны, если положить $v = 1$, $y = 1$ (тогда и $x = 1$). Это было ясно и априори, т.к. расширение $1 \to B/B_0 \to G/B_0 \to F \to 1$ – полупрямое.

Для дальнейшего отметим, что условия распадения алгебры $(G\times L)e_1$ существенно упрощаются, если взять $y = 1$, а $v = u_1 + u_2\sqrt[3]{m_\sigma}$, где $u_1, u_2 \in k$ (без коэффициента при $\sqrt[3]{m_\sigma}^2$). Тогда $x = u_1^3 + m_\sigma u_2^3$, $\mathrm{Tr}\,(v^{2+\sigma^2}) = 3(u_1^3 + \zeta^2 u_2^3 m_\sigma)$, поэтому $\mathrm{Tr}\,(v^{2+\sigma^2}) - 3\zeta^2 x = 3(1-\zeta^2)u_1^3$. Обозначив теперь $m'_\tau = 3(1-\zeta^2)m_\tau$, получаем в этом случае, что условие распадения алгебры $(G\times L)e_1$ означает, что изоморфны алгебры $k[m'_\tau, m_\sigma]$ и $k[m'_\tau, m_\sigma x^{-1}]$, т.е. что алгебра $k[x, m'_\tau]$ должна быть матричной.

5^0. Рассмотрим теперь алгебру $(G\times L)E_1$. Центром ее, как сказано выше, является $k(\beta\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{m_\sigma}^{-1})E_1 \simeq k(\sqrt[3]{x m_\sigma^{-1}})$. Алгебра $(H\times K)E_1$ является скрещенным произведением поля K со своей группой Галуа F с системой факторов $\chi(z_{f_1,f_2})$, где z_{f_1,f_2} – канонический коцикл расширения $H(f_i \in F)$, а χ – характер $B_0 \to k^*$, заданный формулой $\chi(\alpha^3) = \zeta$. Алгебра $(G\times L)E_1$ изоморфна тензорному произведению над $k(\sqrt[3]{x m_\sigma^{-1}})$ подалгебры $(H\times K)E_1$ и ее централизатора.

Громоздкие вычисления показывают, что централизатор $(H\times K)E_1$ в $(G\times L)E_1$ порождается над своим центром элементами $\varkappa_1 = \beta m_\sigma^{-1}E_1$, $\varkappa_2 = \gamma[(1+\beta+\beta^2)+\zeta\alpha(1+\zeta^2\beta+\zeta\beta^2)+\zeta^2\alpha^2(1+\zeta\beta+\zeta^2\beta^2)]E_1$, $\varkappa_3 = \alpha(1+\beta+\zeta^2\beta^2)\sqrt[3]{m_\tau}E_1$ и $\varkappa_4 = [(\theta+\theta^\sigma+\theta^{\sigma^2}) + \zeta\beta(\theta+\zeta\theta^\sigma + \zeta^2\theta^{\sigma^2}) + \beta^2(\theta+\zeta^2\theta^\sigma+\zeta\theta^{\sigma^2})]E_1$. При этом $[\varkappa_1, \varkappa_3] = [\varkappa_1, \varkappa_4] = [\varkappa_2, \varkappa_3] = [\varkappa_2, \varkappa_4] = 1$, $[\varkappa_1, \varkappa_2] = [\varkappa_3, \varkappa_4] = \zeta$, $\varkappa_1^3 = m_\sigma^{-1}E_1$, $\varkappa_2^3 = 27\gamma^3 E$, $\varkappa_3^3 = 3(1-\zeta^2)m_\tau E_1$, $\varkappa_4^3 = y\cdot g(v)$, где $g(v) \in k(\beta\sqrt[3]{m_\sigma}^{-1}E_1)$ – некоторое выражение, зависящее от выбора $v \in k(\sqrt[3]{m_\sigma})$ и принадлежащее центру.

Таким образом, алгебра $(G\times L)E_1$ изоморфна тензорному произведению алгебры $(H\times K)E_1$ и двух кватернионных алгебр $k[m_\sigma, \chi(\gamma^3)]$ и $k(\sqrt[3]{x m_\sigma^{-1}})[3(1-\zeta^2)m_\tau, \varkappa_4^3]$. Обозначим через P произведение алгебр $(H \times K)E_1$ и $k(m_\sigma, \chi(\gamma^3)]$, не зависящее от выбора v и y, а через m'_τ (как и прежде) $3(1-\zeta^2)m_\tau$. Мы доказали предложение.

Предложение 3. *Для распадения алгебры $(G \times L)E_1$ в матричную алгебру над своим центром необходимо и достаточно, чтобы распадалось тензорное произведение алгебры P и кватернионной алгебры $k(\sqrt[3]{m_\sigma x_\sigma^{-1}})[m'_\tau, \varkappa_4^3]$.*

Соответственно, мы получим и условие разрешимости исходной задачи.

Теорема 1. *Для разрешимости задачи погружения $(K/k, G, \varphi)$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись элементы $v \in (k(\sqrt[3]{m_\sigma}))^*$ и $y \in k^*$, при которых*

1) были изоморфны алгебры $k[m'_\tau, m_\sigma]$ и $K[(\operatorname{Tr}(v^{2+\sigma^2}) - 3\zeta^2 x)y\; m_\tau, m_\sigma x^{-1}]$

2) полностью распадалась в матричную алгебра $P \underset{k(\sqrt[3]{m_\sigma x_\sigma^{-1}})}{\otimes} [m'_\tau, g(v)y]$, где $x = v^{1+\sigma+\sigma^2}$, $g(v) \in k(\sqrt[3]{m_\sigma x_\sigma^{-1}})$

6^0. Рассмотрим теперь нашу задачу погружения в случае локальных или глобальных числовых полей. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Норма элемента $\varkappa_4^3 \in k(\sqrt[3]{m_\sigma x_\sigma^{-1}})$ в поле k является кубом в поле k.*

Доказательство. Рассмотрим на алгебре $L(\beta E_1)$ автоморфизм ω, оставляющий инвариантными элементы поля (алгебры) L и переводящий β^i в $\beta^i\zeta^i$ $(i = 0, 1, 2)$. Тогда норма элемента $\varkappa_4^3$ есть произведение $\varkappa_4^3 \cdot \varkappa_4^{3\omega} = \varkappa_4^{3\omega^2} = (\varkappa_4 \varkappa_4^\omega \varkappa_4^{\omega^2})^3$. Но $\varkappa_4 \cdot \varkappa_4^\omega \cdot \varkappa_4^{\omega^2}$ равно (исходя из вида $\varkappa_4$) $(\theta + \theta^\sigma + \theta^{\sigma^2})^3 + (\theta + \zeta\theta^\sigma + \zeta^2\theta^{\sigma^2})^3 + (\theta + \zeta^2\theta^\sigma + \zeta\theta^{\sigma^2})^3 - 3\zeta(\theta + \theta^\sigma + \theta^{\sigma^2})(\theta + \zeta\theta^\sigma + \zeta^2\theta^{\sigma^2})(\theta + \zeta^2\theta^{\sigma^2} + \zeta\theta^{\sigma^2})$. Легко проверяется, что это выражение инвариантно относительно подгруппы H, элементов α и γ, и принадлежит L. Значит $\varkappa^{1+\omega+\omega^2} \in k$, и поэтому норма $\varkappa_4^3$ является кубом в k^*.

Изучим также подробнее алгебру P. Алгебра $(H \times K)E_1$ имеет показатель 3 (или 1), поскольку представляет собой скрещенное произведение поля K со своей группой Галуа F с системой факторов со значениями в ζ^i $(i = 0, 1, 2)$. Соответственно, и алгебра P (кстати, подобная $(H \times K)E_1$ при $\gamma^3 = 1$), также имеет показатель 3. Значит, для числовых полей P является матричной алгеброй над своей подалгеброй размерности 9, являющейся тем самым, кватернионной алгеброй над k. Таким образом, алгебра P подобна (в группе Брауэра) некоторой кватернионной алгебре $k[w_1, w_2]$, $w_i \in k^*$.

Для дальнейшего нам будет полезен следующий простой факт.

Предложение 4. *В локальном поле k всякий элемент может быть представлен в виде разности двух n-ых степеней*

(Мы не претендуем на авторство этого предложения, но не можем привести соответствующую ссылку.)

Доказательство. Пусть k – локальное поле, π – его простой элемент, n – натуральное число. Для любого $a \in k$ найдется такое натуральное m, что $a \cdot \pi^{mn}+1$ является n-ой степенью: $z^n = a \cdot \pi^{nm}+1$. Тогда $a = \left(\frac{z}{\pi^m}\right)^n - \left(\frac{1}{\pi^m}\right)^n$.

Докажем теперь основной результат работы.

Теорема 2. *Исследуемая задача погружения $(K/k, G, \varphi)$ в случае числовых (локальных или глобальных) полей всегда разрешима.*

Доказательство. Нам надо показать, что существуют $v \in k(\sqrt[3]{m_\sigma})$ и $y \in k$, для которых выполняются условия теоремы 1. При этом элемент y мы выбираем равным 1. Мы будем сразу исходить из случая полей алгебраических чисел, а для локальных полей разрешимость будет следовать из хода доказательства.

Как и в предыдущих работах, будем выбирать элемент $v \in k(\sqrt[3]{m_\sigma})$ таким образом, чтобы выполнялись условия теоремы 1 для сопутствующих локальных задач. При этом выполнение этих условий для всех таких локальных задач гарантирует их выполнение и для глобальной задачи.

Пусть S – конечное множество простых дивизоров поля $K(\sqrt[3]{m_\sigma})$, содержащее все простые делители дискриминанта поля K, а также делители числа 3. Соответственно, в S попадут при этом делители чисел m_σ и m'_τ.

Рассмотрим несколько случаев.

1). Пусть простой дивизор $\mathfrak{P} \in S$ таков, что m_σ не является кубом в пополнении $k_\mathfrak{p}$ поля k по дивизору $\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. Положим $v_\mathfrak{P} = 1$, тогда и $x_\mathfrak{p} = 1$. Первое условие теоремы 1 становится тривиальным, ибо $(\mathrm{Tr}(v^{2+\sigma^2}) - 3\zeta^2 x)m_\tau$ равно в этом случае m'_τ. Покажем, что выполняется и второе условие. Действительно, алгебра P распадается при подъеме поля $k_\mathfrak{p}$ до кубического расширения $k_\mathfrak{p}(\sqrt[3]{m_\sigma})_\mathfrak{P}$. Далее, для локальных полей символ Гильберта $[w_1, w_2]_{k_1}$, где k_1 – нормальное расширение поля k, а $w_1 \in k$, равен, как известно $[w_1, N_{k_1/k}, w_2]_k$. Но в нашем случае, согласно лемме

2, норма элемента $g(v)$ является кубом в поле k (а значит, и в $k_\mathfrak{p}$), и поэтому алгебра $k_\mathfrak{p}(\sqrt[3]{m_\sigma x^{-1}})[m'_\tau, g(v)]$ также матричная.

2). Пусть $\mathfrak{P} \in S$ таков, что m_σ и m'_τ являются кубами в $k_\mathfrak{p}$. Возьмем тогда в качестве $v_\mathfrak{P}$ такой элемент $u_1+u_2\sqrt[3]{m_\sigma}[u_1, u_2 \in k_\mathfrak{p})$, чтобы $x_\mathfrak{p} = u_1^3 + u_2^3 m_\sigma$ не было кубом в $k_\mathfrak{p}$. Второе условие теоремы 1 снова выполняется. Первое же условие, в виду специализации выбора $v_\mathfrak{P}$ может быть истолковано как распадение алгебры $k_\mathfrak{p}[x_\mathfrak{p}, m'_\tau]$, что и выполняется, так как m'_τ – куб в $k_\mathfrak{p}$.

3). Пусть, наконец, $\mathfrak{P} \in S$ таков, что $m_\sigma = w^3$, где $w \in k_\mathfrak{p}$, но m'_τ не является кубом в $k_\mathfrak{p}$. Представим m'_τ в виде разности двух кубов (см. предложение 4): $m'_\tau = u_1^3 - u_2^3$, где $u_1, u_2 \in k_\mathfrak{p}$. Тогда $m'_\tau = u_1^3 - (\frac{u_2}{w})^3 m_\sigma$. Положим $v_\mathfrak{P} = u_1 - \frac{u_2}{w}\sqrt[3]{m_\sigma}$, тогда $x_\mathfrak{p} = m'_\tau$. Значит, алгебра $k_\mathfrak{p}[x_\mathfrak{p}, m'_\tau]$ распадается, и выполнено первое условие теоремы 1. Второе условие также выполняется, поскольку в этом случае $k_\mathfrak{p}(\sqrt[3]{x m_\sigma^{-1}}) = k_\mathfrak{p}(\sqrt[3]{m_\tau})$, а m'_τ – не куб в $k_\mathfrak{p}$.

Выберем теперь число v из поля алгебраических чисел $k(\sqrt[3]{m_\sigma})$ так, чтобы в разложение главного дивизора (v) поля $k(\sqrt[3]{m_\sigma})$ входили лишь дивизоры из S и некоторый простой дивизор $\mathfrak{A} \notin S$, и кроме того, локальное поведение (v) совпадало с точностью до кубов с построенными элементами $v_\mathfrak{P}$ в точках $\mathfrak{P} \in S$. Это можно сделать в силу теоремы Чеботарева.

Покажем, что выбранное число v (при $y = 1$) удовлетворяет условиям теоремы 1. Для этого надо проверить выполнение этих условий при всех пополнениях поля $k(\sqrt[3]{m_\sigma})$. Когда $\mathfrak{P} \in S$, эти условия выполняются, так как $(v)_\mathfrak{P}$ совпадают с построенными $v_\mathfrak{P}$ с точностью до кубов. Когда $\mathfrak{P} \notin (S \cup \mathfrak{A})$, эти условия выполняются автоматически, поскольку алгебра $L_\mathfrak{P}$ является в этом случае неразветвленной.

Осталось проверить наши условия в точке $\mathfrak{A}$. Символы Гильберта $[m'_\tau, m_\sigma]_{k_\mathfrak{p}}$ и $[(\mathrm{Tr}\,(v^{2+\sigma^2}) - 3\zeta^2 x)m_\tau, m_\sigma x^{-1}]$ совпадают во всех точках поля k, кроме, быть может, одной точки $\mathfrak{a}$ такой, что $\mathfrak{A}|_\mathfrak{a}$. Но тогда, по закону взаимности, они совпадают и в точке $\mathfrak{A}$. Поэтому для $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$ первое условие теоремы 1 выполнено. Число x, будучи нормой простого элемента $v \in k(\sqrt[3]{m_\sigma})$, само является простым элементом в $k_\mathfrak{a}$, а m_σ – локальная единица в $k_\mathfrak{a}$, так как $\mathfrak{A} \notin S$. Поэтому выполняется и второе условие.

Теорема доказана.

Замечание. Мы изучали задачу погружения в случае, когда поле содержит первообразный корень ζ степени 3 из 1. В случае, когда это не так, задача также разрешима в силу теоремы Нейкирха [9].

§ 2. Задача погружения с ядром порядка 2^4

Рассмотрим задачу погружения для 2-групп с ядром порядка 16, порожденным тремя образующими α, β, γ с соотношениями $\alpha^4 = 1$, $\beta^2 = \gamma^2 = 1$, $[\alpha, \beta] = 1$, $[\alpha, \gamma] = 1$, $[\beta, \gamma] = \alpha^2$. Это группа показателя 4, в которой второй порядок имеют элементы α^2, β, γ, $\beta\alpha^2$, $\gamma\alpha^2$, $\gamma\beta\alpha$, $\gamma\beta\alpha^{-1}$ (остальные элементы, кроме нейтрального, четвертый порядок).

Полная группа автоморфизмов ядра имеет порядок 48 и является полупрямым расширением группы внутренних автоморфизмов посредством группы внешних автоморфизмов. Последняя изоморфна прямому произведению симметрической группы $\mathfrak{S}_3$ и циклической группы порядка 2. Образующие этой группы внешних автоморфизмов σ, τ, ω действуют на ядре по формулам

$$\begin{cases} \alpha^\sigma = \alpha \\ \beta^\sigma = \beta\alpha^2 \\ \gamma^\sigma = \gamma\beta\alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha^\omega = \alpha \\ \beta^\omega = \gamma\alpha^2 \\ \gamma^\omega = \gamma\beta\alpha^{-1} \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha^\tau = \alpha^{-1} \\ \beta^\tau = \beta\alpha^2 \\ \gamma^\tau = \gamma\alpha^2 \end{cases}$$

и связаны соотношениями $\sigma^2 = \tau^2 = \omega^3 = 1$, $[\sigma, \omega] = \omega$, $[\sigma, \tau] = 1$, $[\omega, \tau] = 1$. Силовская 2-подгруппа этой группы изоморфна группе Клейна и может быть задана автоморфизмами $\{1, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$.

Рассмотрим подгруппу B_1 ядра, порожденную элементами γ и $\beta\alpha$. Так как $(\beta\alpha)^2 = \alpha^2$ и $[\gamma, \beta\alpha] = \alpha^2$, эта группа изоморфна группе диэдра восьмого порядка. Из вида указанного действия элементов $g \in G$ на ядре вытекает, что B_1 нормальна в G. Но для задачи погружения с ядром B_1 над числовыми полями (см. [8]), условие разрешимости сводится к условиям разрешимости сопутствующей задачи, отвечающей бесконечным дивизорам поля k.

Теперь очевидна теорема.

Теорема 3. *Для разрешимости задачи погружения с указанным ядром B (в случае числовых полей и 2-группы G) необходимо и достаточно, чтобы*

1) *для сопутствующей задачи, полученной при факторизации по B_1, выполнялось условие согласности;*

2) *были разрешимы сопутствующие задачи, полученные при пополнении по архимедовским нормированиям поля k.*

Для задачи погружения над локальными полями необходимо и достаточно, чтобы выполнялось лишь первое условие.

Замечание. Существуют примеры, показывающие, что каждое из указанных условий не следует из другого.

6 Заказ 825

Литература

1. В. В. Ишханов, *О задаче погружения с неабелевым ядром порядка* p^4. — Труды МИАН СССР **183** (1990), 116–121.
2. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *О задаче погружения с неабелевым ядром порядка* p^4. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **175** (1989), 46–62.
3. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *Задача погружения для числовых полей с некоммутативным ядром порядка* p^4. — Алгебра и Анализ **2**, **No. 6** (1990), 161–167.
4. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *О задаче погружения с неабелевым ядром порядка* p^4. *II.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **191** (1991), 101–113.
5. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *О задаче погружения с неабелевым ядром порядка* p^4. *III.* — Зап. научн. семин.ЛОМИ **198** (1991), 20–27.
6. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *О задаче погружения с неабелевым ядром порядка* p^4.*IV.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **211** (1994), 120–126.
7. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *О задаче погружения с неабелевым ядром порядка* p^4. *V.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **211** (1994), 127–132.
8. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа.* М, Наука, 1990, с. 272.
9. J. Neukireh, *On solvable number fields.* — Invent. Math. **53** (1979), 135–164.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 3 марта 1995 г.