Х. Х. Усманов, Об одной функциональной предельной теореме для аддитивных функций, *Чебышевский сб.*, 2014, том 15, выпуск 3, 86–99

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 3 (2014)

УДК 511.37

ОБ ОДНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Х. Х. Усманов (г. Волжский)

Аннотация

Посредством аддитивных арифметических функций на последовательности сдвинутых простых чисел строятся процессы с реализациями из пространства функций без разрывов второго рода. В этом пространстве с топологией Скорохода и σ-алгеброй борелевских множеств вводится последовательность мер, соответствующих построенным арифметическим процессам. Именно, за меру борелевского множества принимается относительная частота простых чисел, не превосходящих натурального числа n, которым соответствуют реализации построенных процессов, попадающие в это множество. Найдены необходимые и достаточные условия слабой сходимости последовательности введённых мер к мере, соответствующей некоторому процессу. При этом предельным является процесс с независимыми приращениями, распределения которых не вырождены. Необходимые и достаточные условия представляют собой два предельных соотношения, первое из которых – это бесконечная малость последовательности заданных сумм. Доказательство необходимости выполнения этого соотношения для слабой сходимости последовательности мер является основной частью всего доказательства теоремы. Проводится это доказательство путём рассмотрения распределений приращений арифметических процессов на промежутках, близких к единице и переходом к характеристическим функциям, соответствующим этим распределениям. Далее, воспользовавшись независимостью приращений предельного процесса, слабой компактностью последовательности мер (следующей из известной теоремы Ю. Прохорова о слабой сходимости вероятностных мер), асимптотической формулой для средних значений мультипликативных функций на последовательности сдвинутых простых чисел Н. Тимофеева, получаем первое условие теоремы. При доказательстве достаточности обеих условий для слабой сходимости последовательности мер вновь применяются характеристические функции. Это позволяет, в частности, воспользоваться ранее полученными автором предельными теоремами в функциональных пространствах для аддитивных функций на "редких" множествах. Последовательность {p+1} входит в класс последовательностей, рассмотренных в этих теоремах. Однако, в них условие аналогичное первому условию, рассматриваемому здесь, не является необходимым, но является достаточным. Это позволяет, применяя указанные теоремы к рассматриваемому случаю получить слабую сходимость последовательности мер. Получено также представление для характеристической функции предельного процесса.

Ключевые слова: аддитивная функция, характеристическая функция, случайный процесс, мера.

Библиография: 16 названий.

ON A FUNCTIONAL LIMIT THEOREM FOR ADDITIVE FUNCTIONS

Usmanov Kh. Kh.

Abstract

By means of additive arithmetic functions on a sequence of the shifted prime numbers the processes with realizations from a space of functions without ruptures of the second sort are based. In this space with a topology of Skorokhod and σ-algebra of the borelean multitudes a sequence of the measures corresponding to constructed arithmetic processes is entered. Exactly, the relative frequency of prime numbers is accepted to a measure of the borelean multitudes. These numbers don't surpass natural number of n to which there a correspond realization of the constructed processes getting to this multitude. Necessary and sufficient conditions of weak convergence of sequence of the entered measures to the measure corresponding to a process are found. Thus process with the independent increments, which distributions are not expressed, is limited. Necessary and sufficient conditions represent two limit ratios the first of which is an infinite of a sequence of the set sums. The proofs of need of performance of this ratio for weak convergence of sequence of measures are the main part of all proofs of the theorem. This proof is carried out by consideration of distributions of increments of arithmetic processes on the intervals close to a unit and a transition to characteristic functions, corresponding to these distributions. Further, using an independence of increments of a limit process and a weak compactness of a sequence of measures (taken from Yu. Prokhorov's known theorem of weak convergence of probability measures), by an asymptotic formula for average values of multiplicative functions on sequence of the shifted prime numbers of N. Timofeev, we receive the first condition of the theorem. At the proof of sufficiency of both conditions for weak convergence of sequence of measures characteristic functions are applied again. It allows, in a particular, to use early the limit theorems received by the author in functional spaces for additive functions on "rare" multitudes. The sequence {p+1} is included in a class of the sequences considered in these theorems. However, in them the condition similar to the first condition considered here, isn't necessary, but is sufficient. It allows, applying the specified theorems to a considered case to receive a weak convergence of sequence of measures. A representation for a characteristic function of a limit process is also received.

Keywords: additive function, characteristic function, stochastic process, measure.

Bibliography: 16 titles.

Эту статью посвящаю моему наставнику
Тимофееву Николаю Михайловичу,
которому 7 августа 2014 года
исполнилось бы 70 лет.

1. Введение

Последовательность вещественных или комплексных чисел $g(n)$ $(n = 1, 2, ...)$ называется арифметической аддитивной функцией, если $g(k \cdot s) = g(k) + g(s)$ для всех пар взаимно простых натуральных чисел k, s.

Пусть $g(n)$ — аддитивная вещественнозначная функция, $B(n)$ — последовательность положительных вещественных чисел такая, что $B(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Для $t \in [0, 1]$ положим

$$H_n(p,t) = \sum_{\substack{q^\alpha // p+1 \\ q \leqslant y(t)}} \frac{g(q^\alpha)}{B(n)} - \sum_{q \leqslant y(t)} \left\| \frac{g(q)}{B(n)} \right\| \frac{1}{q},$$

где p, q — простые числа, $q^\alpha // m$ означает, что q^α делит m, а $q^{\alpha+1}$ уже не делит m; $\|u\| = u$, при $|u| < 1$ и $\|u\| = \operatorname{sgn} u$ при $|u| \geqslant 1$;

$$y(t) = y(t,n) = \max \left\{ m \leqslant n \colon \sum_{q \leqslant m} \left\| \frac{g(q)}{B(n)} \right\|^2 \frac{1}{q} \leqslant t \sum_{q \leqslant n} \left\| \frac{g(q)}{B(n)} \right\|^2 \frac{1}{q} \right\}.$$

В пространстве $D\,[0, 1]$ с топологией Скорохода и σ-алгеброй $\mathrm{B}(D)$ борелевских множеств (см. [1] с.155) введем последовательность мер ν_n, полагая

$$\nu_n(A) = \frac{1}{\pi(n)} N\left\{p \leqslant n; \quad H_n(p,t) \in A\right\}, \tag{1}$$

где $A \in B(D)$, $\pi(n)$- число простых чисел $p \leqslant n$, $N\{B\}$ —число элементов множества B. Таким образом, $H_n(p,\ t)$ становится случайным процессом, а ν_n — соответствующей ему мерой.

Целью настоящей статьи является нахождение необходимых и достаточных условий слабой сходимости мер ν_n в $(D,\ \mathrm{B})$. Полученный результат аналогичен результату работы [2], в которой аддитивные функции рассматриваются на натуральном ряде. Следует отметить, что, хотя в работах [3]—[5] рассматриваются более общие случаи, однако в них указанная задача решается в меньшей общности чем в работе [2], а также в настоящей заметке, где для аддитивных функций на последовательности {p+1} доказывается следующая предельная теорема.

Теорема.*Пусть $H(t)$ — некоторый процесс с реализациями из $D\,[0,1]$ и независимыми приращениями, распределения которых являются невырожденными, ν — соответствующая $H(t)$ мера. Для того чтобы последовательность мер (1) слабо сходилась к ν:*

$$\nu_n \Rightarrow \nu \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) *существует последовательность $r = r(n) \to \infty$ такая, что*

$$\frac{\log r}{\log n} \to 0, \sum_{r \leqslant q \leqslant n} \left\| \frac{g(q)}{B(n)} \right\|^2 \frac{1}{q} \to 0, \quad (n \to \infty) \tag{3}$$

2) *существует неубывающая ограниченная функция $L(u)$,*

$$L(\pm\infty) = \lim_{u \to \pm\,\infty} L(u), \quad L(+\infty) > 0,$$

для которой

$$\sum_{\substack{q \leqslant n \\ g(q) \leqslant uB(n)}} \left\| \frac{g(q)}{B(n)} \right\|^2 \frac{1}{q} \to L(u), (n \to \infty) \tag{4}$$

во всех точках непрерывности функции $L(u)$.

Кроме того, если условия 1) и 2) выполнены, то х.ф. (характеристическая функция) процесса $H(t)$ имеет вид:

$$\exp \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi u} - 1 - i\xi \left\| u \right\|}{\left\| u \right\|^2} \, d \left(\int\limits_{-\infty}^{u/a(t)} \frac{\left\| a(t) \cdot x \right\|^2}{\left\| x \right\|^2} \, dL(x) \right) \right\}, \tag{5}$$

где $a(t) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(B\left(y(t)\right) / B(n) \right)$.

Идея доказательства данной теоремы и основные этапы его восходят к работам [2], [6]—[9]. Отметим, что исследованием аддитивных функций на последовательности сдвинутых простых чисел методами вероятностной теории чисел занимались многие авторы (см., например, [10], [11]).

2. Доказательство теоремы

Необходимость. Вначале покажем, что, если имеет место соотношение (2), то выполняется условие 1). Пусть

$$t(n) = \sup \left\{ \, t \in [0,1] \colon y(t) \leqslant n^{2/3} \right\}.$$

Докажем, что $t(n) \to 1$ при $n \to \infty$. Допустим, что это не так. Тогда существует такая последовательность n_k, что $t(n_k) \to t_0 < 1$. В дальнейшем будем считать, что $n = n_k$. В силу определений $y(t)$ и $t(n)$ при любом t на промежутке $(t_0,\ 1]$ $y(t) > n^{2/3}$. А так как на промежутке $(n^{2/3},\ n]$ не может существовать более одного простого делителя числа $p+1$, $p \leqslant n$ (если он существует, то входит в разложение $p+1$ лишь в первой степени), то при $t_0 < t < s \leqslant 1$

$$H_n(p,s) - H_n(p,t) = \sum_{\substack{y(t)<q<y(s)\\ q/p+1}} \frac{g(q)}{B(n)} - \sum_{y(t)<q<y(s)} \left\| \frac{g(q)}{B(n)} \right\| \frac{1}{q}.$$

Поэтому х.ф., соответствующая распределению величины $H_n(p,s) - H_n(p,t)$,

$$\frac{1}{\pi(n)} \sum_{p\leqslant n} \exp\left\{ i\xi (H_n(p,s) - H_n(p,t)) \right\}$$

равна

$$\exp\left\{ -i\xi \sum_{y(t)<q<y(s)} \left\| \frac{g(q)}{B(n)} \right\| \frac{1}{q} \right\} \cdot$$
$$\cdot \left[\frac{1}{\pi(n)} \sum_{y(t)<q<y(s)} \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\equiv -1 (\mathrm{mod} q)}} \left(\exp\left\{ i\xi \frac{g(q)}{B(n)} \right\} - 1 \right) + 1 \right] \tag{6}$$

Пусть π_t — естественная проекция из $D\ [0,1]$ на R, т.е. отображение, которое при каждом $t \in [0,1]$ сопоставляет любой функции $x(\bullet) \in D\ [0,1]$ её значение $x(t) \in R$; T_ν- множество таких точек $t \in [0,1]$, для которых проекция π_t непрерывна всюду за исключением точек, составляющих множество ν-меры нуль (см. [1], с.172-173). Обозначим через $\tau_n^{(t,s)}(\xi)$ и $\tau^{(t,s)}(\xi)$ х.ф., соответствующие распределениям величин $H_n(p,s) - H_n(p,t)$ и $H(s) - H(t)$. При $t, s \in T_\nu$ из (2), на основании теоремы 5.1 [1], следует:

$$\tau_n^{(t,s)}(\xi) = \tau^{(t,s)}(\xi) + o(1) \tag{7}$$

равномерно по ξ в любой области $|\xi| < C$. Так как $H(t)$ является процессом с независимыми приращениями, то при любых $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant 1$

$$\tau^{(t_1,\, t_3)}(\xi) = \tau^{(t_1,\, t_2)}(\xi) \cdot \tau^{(t_2,\, t_3)}(\xi). \tag{8}$$

Пусть $t_i \in T_\nu \bigcap (t_0,\ 1]$, $i = 1, 2, 3$. В силу равенств (7) и (8)

$$\tau_n^{(t_1,t_3)}(\xi) = \tau_n^{(t_1,t_2)}(\xi) \cdot \tau_n^{(t_2,t_3)}(\xi) + o(1). \tag{9}$$

Однако при $t, s \in (t_0,\ 1]$ х.ф. $\tau_n^{(t,s)}(\xi)$ равна выражению (6). Поэтому, на основании соотношения (9) имеем:

$$\frac{1}{\pi(n)}\sum_{y(t_1)<q<y(t_3)}\ \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\equiv -1(\mathrm{mod} q)}}\left(\exp\left\{i\xi\frac{g(q)}{B(n)}\right\}-1\right)+1=$$

$$=\frac{1}{\pi(n)}\sum_{y(t_1)<q<y(t_2)}\ \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\equiv -1(\mathrm{mod} q)}}\left(\exp\left\{i\xi\frac{g(q)}{B(n)}\right\}-1\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi(n)}\sum_{y(t_2)<q<y(t_3)}\ \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\equiv -1(\mathrm{mod} q)}}\left(\exp\left\{i\xi\frac{g(q)}{B(n)}\right\}-1\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{\pi(n)}\sum_{y(t_1)<q<y(t_2)}\ \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\equiv -1(\mathrm{mod} q)}}\left(\exp\left\{i\xi\frac{g(q)}{B(n)}\right\}-1\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\pi(n)}\sum_{y(t_2)<q<y(t_3)}\ \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\equiv -1(\mathrm{mod} q)}}\left(\exp\left\{i\xi\frac{g(q)}{B(n)}\right\}-1\right)\right)+1+o(1).$$

Следовательно, при $n\to\infty$

$$\left(\frac{1}{\pi(n)}\sum_{y(t_1)<q<y(t_2)}\ \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\equiv -1(\mathrm{mod} q)}}\left(\exp\left\{i\xi\frac{g(q)}{B(n)}\right\}-1\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\pi(n)}\sum_{y(t_2)<q<y(t_3)}\ \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\equiv -1(\mathrm{mod} q)}}\left(\exp\left\{i\xi\frac{g(q)}{B(n)}\right\}-1\right)\right)\to 0 \tag{10}$$

равномерно по ξ в любой области $|\xi|<C$.

Так как х.ф. $\tau_n^{(t,s)}(\xi)$ равна выражению (6), то на основании равенства (7) первый и второй сомножители в (10) соответственно равны

$$\tau^{(t_1,\,t_2)}(\xi)\exp\left\{i\xi\sum_{y(t_1)<q\ <y(t_2)}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|\frac{1}{q}\right\}-1+o(1),$$

$$\tau^{(t_2,\,t_3)}(\xi)\exp\left\{i\xi\sum_{y(t_2)<q\ <y(t_3)}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|\frac{1}{q}\right\}-1+o(1).$$

Введём обозначения:

$$a(n)=\sum_{y(t_1)<q<y(t_2)}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|\frac{1}{q}, b(n)=\sum_{y(t_2)<q<y(t_3)}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|\frac{1}{q},$$

Тогда соотношение (10) перепишется в виде

$$(\tau^{(t_1,\,t_2)}(\xi)e^{i\xi a(n)}-1)(\tau^{(t_2,\,t_3)}(\xi)e^{i\xi b(n)}-1)\to 0. \tag{11}$$

Выберем подпоследовательность $\{n_r\}$, по которой $a\{n_r\}\to a$, $b\{n_r\}\to b$ при $n_r\to\infty$, что возможно в силу ограниченности последовательностей $a(n)$и $b(n)$. В силу соотношения (11)

$$(\tau^{(t_1,\,t_2)}(\xi)e^{i\xi a}-1)(\tau^{(t_2,\,t_3)}(\xi)e^{i\xi b}-1)=0. \tag{12}$$

Так как при любых $0\leqslant t<s\leqslant 1$ $\tau^{(t,s)}(\xi)$ является х.ф. невырожденного распределения, то в силу теоремы 2.1.4 [12] почти всюду $\left|\tau^{(t,s)}(\xi)\right|<1$. Следовательно, это справедливо и для х.ф. $\tau^{(t_1,\,t_2)}(\xi)$ и $\tau^{(t_2,\,t_3)}(\xi)$. Однако в силу равенства (12), если, например, $\left|\tau^{(t_2,t_3)}(\xi)\right|<1$ почти всюду, то $\tau^{(t_1,\,t_2)}(\xi)e^{i\xi a}=1$ почти всюду. А так как х.ф. является непрерывной, то последнее равенство справедливо для всех ξ. Таким образом, $\tau^{(t_1,\,t_2)}(\xi)=e^{-i\xi a}$, т. е. $\tau^{(t_1,\,t_2)}(\xi)$ является х.ф. вырожденного распределения, что противоречит условию теоремы. Итак, $t(n)\to 1$ при $n\to\infty$.

Положим

$$A(r,n)=\sum_{q\leqslant r}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|^2\frac{1}{q}.$$

В силу определений $y(t)$ и $t(n)$имеем:

$$\frac{A(y(t(n)),\ n)}{A(n,\ n)}\leqslant t(n),\frac{A(y(t(n)),\ n)}{A(n,\ n)}\leqslant\frac{A(n^{2/3},\ n)}{A(n,\ n)}\leqslant 1.$$

Отсюда следует

$$t(n)\leqslant\frac{A(y(t(n))+1,\,n)}{A(n,\ n)}\leqslant\frac{A(n^{2/3}+1,\,n)}{A(n,\ n)}\leqslant\frac{A(n^{\gamma},n)}{A(n,n)}\leqslant 1,$$

где $2/3<\gamma<1$. В силу этих неравенств и того, что $t(n)\to 1$ при $n\to\infty$, имеем: $A(n^{\gamma},\ n)/A(n,\ n)\to 1$ при $n\to\infty$. Отсюда следует существование такой неограниченно возрастающей функции $r=r(n)$, что $\log r/\log n\to 0$, $A(r,\ n)/A(n,\ n)\to 1$, т.е.

$$\frac{A(n,\ n)-A(r,\ n)}{A(n,\ n)}\to 0\quad(n\to\infty). \tag{13}$$

Условие 1) теоремы, т.е. соотношение (3), будет следовать из (13), если показать, что существует постоянная С>0 такая, что $A(n,\ n)<C$ для любого

n. Пусть это не так, т.е. существует подпоследовательность $\{n_k\}$, на которой $A(n_k,\ n_k) \to \infty$ при $n_k \to \infty$ и $y(n_k) = \max\left\{m \leqslant n_k\colon A(m,\ n_k) \leqslant A^{1/2}(n_k,\ n_k)\right\}$. Тогда $\log y(n_k)/\log n_k \to 0$ при $n_k \to \infty$. В силу определений $y(t)$ и $y(n_k)$ имеем: $y(n_k) = y(t^{'})$, где $t^{'} = A^{-1/2}(n_k, n_k) \to 0$ при $n_k \to \infty$. Следовательно, для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$

$$\overline{\lim_{n_k\to\infty}}\nu_{n_k}\left(\left\{p : \left|\sum_{\substack{q^\alpha//p+1\\ q\leqslant y(n_k)}}\frac{g(q^\alpha)}{B(n_k)} - \sum_{q\leqslant y(n_k)}\left\|\frac{g(q)}{B(n_k)}\right\|\frac{1}{q}\right| > \varepsilon\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n_k\to\infty}}\nu_{n}\left(\left\{p : \sup_{0\leqslant t\leqslant\delta}\left|\sum_{\substack{q^\alpha//p+1\\ q\leqslant y(t)}}\frac{g(q^\alpha)}{B(n)} - \sum_{q\leqslant y(t)}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|\frac{1}{q}\right| > \varepsilon\right\}\right) \tag{14}$$

Так как $\nu_n \Rightarrow \nu$, то последовательность ν_n слабо компактна, то есть для любого положительного ε

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\nu_{n_k}\left(\{p : \Delta_\delta\left(H_n(p,t)\right) > \varepsilon\}\right) = 0,$$

где

$$\Delta_\delta(x(t)) =$$
$$= \sup_{t-\delta\leqslant t'\leqslant t\leqslant t''\leqslant t+\delta}\min\left(|x(t)-x(t')|, |x(t'')-x(t)|\right) + \sup_{0\leqslant t\leqslant\delta}|x(t)| + \sup_{1-\delta\leqslant t\leqslant 1}|x(1)-x(t)|.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ предел правой части неравенства (14) при $\delta \to 0$ равен нулю. Отсюда в силу этого неравенства имеем:

$$\overline{\lim_{n_k\to\infty}}\nu_{n_k}\left(\left\{p : \left|\sum_{\substack{q^\alpha//p+1\\ q\leqslant y(n_k)}}\frac{g(q^\alpha)}{B(n_k)} - \sum_{q\leqslant y(n_k)}\left\|\frac{g(q)}{B(n_k)}\right\|\frac{1}{q}\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Или

$$\nu_{n_k}\left(\{p : H_{n_k}(p,t) \leqslant u\}\right) \to \begin{cases}1 & \text{при } u > 0,\\ 0 & \text{при } u < 0.\end{cases} (n_k\to\infty)$$

Переходя к х.ф. получим:

$$\exp\left\{-i\xi\sum_{q\leqslant y(n_k)}\left\|\frac{g(q)}{B(n_k)}\right\|\frac{1}{q}\right\}\cdot\frac{1}{\pi(n_k)}\sum_{p\leqslant n_k}\left(\exp\left\{i\xi\sum_{\substack{q^\alpha//p+1\\ q\leqslant y(n_k)}}\frac{g(q^\alpha)}{B(n_k)}\right\}\right) = 1 + o(1) \tag{15}$$

равномерно по ξ в любой области $|\xi| < C$.

Приведём одно из утверждений работы [8], которое неоднократно будет использовано в дальнейшем.

Лемма 2 [8]. *Предположим, что при $x \to \infty$*

$$\sum_{y(x) \leqslant p \leqslant x} \|g(p,\ x)\|^2 \frac{1}{p} \to 0,$$

где $g(p,\ x)$ — вещественные числа, $y(x) \to \infty$ так, что $\log y(x)/\log x \to 0$. Тогда для аддитивной функции $g(n)$принимающей на p значения $g(p,\ x)$, равномерно по ξ в любой области $|\xi| \leqslant C$ имеем:

$$\frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leqslant x} \exp\left\{i\xi g(p+1)\right\} = \prod_{p \leqslant x} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left(e^{i\xi g(p^r)} - e^{i\xi g(p^{r-1})}\right) \frac{1}{\varphi(p^r)}\right) + o(1).$$

Аддитивная функция

$$g_y(m) = \sum_{\substack{q^\alpha // m \\ q \leqslant y(n_k)}} \frac{g(p^\alpha)}{B(n_k)}$$

удовлетворяет условиям данной леммы, так как

$$g_y(q^\alpha) = \begin{cases} g(q^\alpha)/B(n_k), & \text{если} q \leqslant y(n_k), \\ 0, & \text{если} q > y(n_k), \end{cases}$$

где $y(n_k) \to \infty$ так, что $\log y(n_k)/\log n_k \to 0$. Поэтому, применяя лемму 2 [8] к соотношению (15), получим:

$$\exp\left\{-i\xi \sum_{q \leqslant y(n_k)} \left\|\frac{g(q)}{B(n_k)}\right\| \frac{1}{q}\right\} \cdot$$

$$\cdot \prod_{q \leqslant y(n_k)} \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\exp\left\{i\xi \frac{g(q^\alpha)}{B(n_k)}\right\} - \exp\left\{i\xi \frac{g(q^{\alpha-1})}{B(n_k)}\right\}\right) \frac{1}{\varphi(p^\alpha)}\right) = 1 + o(1).$$

Так как $B(n_k) \to \infty$ при $n_k \to \infty$, то последнее соотношение можно записать в следующем виде:

$$\exp\left\{\sum_{q \leqslant y(n_k)} \left(\exp\left\{i\xi \frac{g(q)}{B(n_k)}\right\} - 1 - i\xi \left\|\frac{g(q)}{B(n_k)}\right\|\right) \frac{1}{q}\right\} = 1 + o(1).$$

Отсюда следует, что при $n_k \to \infty$

$$\sum_{q \leqslant y(n_k)} \left(1 - \cos \xi \frac{g(q)}{B(n_k)}\right) \frac{1}{q} \to 0$$

равномерно по ξ в любой области $|\xi| \leqslant C$.

Пусть ξ_0 — произвольное положительное число. Проинтегрируем по ξ последнюю сумму от 0 до ξ_0 и поделим на ξ_0. Получим

$$\sum_{q \leqslant y(n_k)} \left(\xi_0 \frac{g(q)}{B(n_k)} - \sin \xi_0 \frac{g(q)}{B(n_k)}\right) \frac{B(n_k)}{q \xi_0 g(q)} \to 0 \tag{16}$$

при $n_k \to \infty$. Разобьём эту сумму на две суммы σ_1 и σ_2 такие, что в σ_1 суммирование распространено по $q \leqslant y(n_k)$, для которых $|g(q)| < B(n_k)$, а в σ_2 — по оставшимся. В σ_1, полагая $\xi_0 = \pi$ и воспользовавшись неравенством

$$1 - \frac{\sin x}{x} > \frac{x^2}{\pi^2},$$

справедливым при $0 < |x| < \pi$, получим

$$\sigma_1 > \sum_{\substack{q \leqslant y(n_k) \\ |g(q)| < B(n_k)}} \left\| \frac{g(q)}{B(n_k)} \right\|^2 \frac{1}{q}.$$

В σ_2 возьмём ξ_0 равным $\pi/2$. Тогда

$$\sigma_2 > \sum_{\substack{q \leqslant y(n_k) \\ |g(q)| \geqslant B(n_k)}} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \left\| \frac{g(q)}{B(n_k)} \right\|^2 \frac{1}{q}.$$

Так как в силу (16) $\sigma_1 \to 0$ и $\sigma_2 \to 0$ при $n_k \to \infty$, то из последних двух неравенств следует, что при $n_k \to \infty$

$$\sum_{q \leqslant y(n_k)} \left\| \frac{g(q)}{B(n_k)} \right\|^2 \frac{1}{q} = A(y(n_k),\ n_k) \to 0. \tag{17}$$

Из определения $y(n_k)$ имеем: $A(y(n_k),\ n_k)/A^{1/2}(n_k,\ n_k) \to 1$ при $n_k \to \infty$. При условии (17) это возможно лишь тогда, когда $A^{1/2}(n_k,\ n_k) \to 0$, Что, однако, противоречит предположению: $A(n_k,\ n_k) \to \infty$ при $n_k \to \infty$. Следовательно, оно неверно, т.е. существует постоянная $C > 0$ такая, что $A(n,\ n) < C$ для всех n. Поэтому, в силу (13) имеет место соотношение (3).

Для доказательства условия 2) теоремы, т.е. соотношения (4), воспользуемся леммой 2 [8]. Для аддитивной функции, принимающей на q значения $g(q)/B(n)$ имеет место соотношение (3), т.е. выполняется условие леммы 2 [8]. Поэтому, применяя ее к х.ф. $\tau_n(\xi)$ случайной величины $H_n(p,\ 1)$ получим:

$$\tau_n(\xi) = \exp\left\{\sum_{q\leqslant n}\left(\exp\left\{i\xi\frac{g(q)}{B(n)}\right\} - 1 - i\xi\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|\right)\frac{1}{q}\right\} + o(1) =$$

$$= \exp\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\xi u} - 1 - i\xi\,\|u\|}{\|u\|^2}\,d\sum_{\substack{q\leqslant y(n)\\ g(q)\leqslant uB(n)}}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|^2\frac{1}{q}\right\} + o(1)$$

равномерно по ξ при $|\xi| < C$. Далее, рассуждая как при доказательстве части A теоремы 1 [9] (см. [9], с. 143-145), получим соотношение (4).

Достаточность. Воспользуемся результатами работы [4] . Полагая в ней $\rho(m) = m/\varphi(m)$ (см. [4], с. 14) убеждаемся в том, что последовательность $\{p+1\}$ в терминах этой работы является R – последовательностью и первое условие теоремы 2 [4] имеет следующий вид: $(n\to\infty)$

$$\sum_{r\leqslant q\leqslant n}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|^2\frac{1}{q-1} + \frac{1}{\pi(n)}\sum_{q^\alpha\geqslant n^\delta}\left\|\frac{g(q^\alpha)}{B(n)}\right\|^2\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\equiv -1(\mathrm{mod} q^\alpha)}}1 \to 0, \tag{18}$$

где $r = r(n)\to\infty$, $\log r/\log n\to 0$, $\delta\in(0,\,1)$. Покажем, что из условия 1) следует соотношение (18). Действительно, второе слагаемое в (18) не превосходит

$$\frac{1}{\pi(n)}\left(\sum_{\substack{n^\delta\leqslant q^\alpha\leqslant n\\ \alpha\geqslant 2}}\left\|\frac{g(q^\alpha)}{B(n)}\right\|^2\frac{n}{q^\alpha} + \sum_{n^\delta\leqslant q\leqslant n}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|^2\pi(n,-1,q)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi(n)}\sum_{n^\delta\leqslant q\leqslant n}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|^2\pi(n,-1,q) + o(1) \tag{19}$$

При $n^\delta\leqslant q\leqslant\sqrt{n}$ оценим $\pi(n,\ -1,\ q)$, используя неравенство Бруна-Титчмарша, а для $q > \sqrt{n}$ воспользуемся неравенством (см. [13])

$$\sum_{\sqrt{n}<q<\,n} q\pi^2(n,\ -1,\ q)\leqslant c\pi^2(n).$$

В итоге выражение (19) будет равно $<< A(n,\ n) - A(r,\ n)$. Таким образом, по теореме 2 [4] из условий 1) и 2) следует соотношение (2).

Представление (5) для х.ф. предельного процесса $H(t)$ можно получить, воспользовавшись леммой 2 [8] и рассуждениями, проведёнными при доказательстве леммы 4 [14]. Действительно, по лемме 2 [8] х.ф. $\tau_n^{(t)}(\xi)$, соответствующая распределению величины $H_n(p,\ t)$, равна

$$\exp\left\{-i\xi\sum_{q\leqslant y(t)}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|\frac{1}{q}\right\}\prod_{q\leqslant y(t)}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\exp\left\{i\xi\frac{g(q^{\alpha})}{B(n)}\right\}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\exp\left\{i\xi\frac{g(q^{\alpha-1})}{B(n)}\right\}\right)\frac{1}{\varphi(q^{\alpha})}\right)+o(1).$$

равномерно по ξ при $|\xi|<C$. Поэтому, так как $B(n)\to\infty$ при $n\to\infty$.

$$\tau_n^{(t)}(\xi)=\exp\left\{\sum_{q\leqslant y(t)}\left(\exp\left\{i\xi\frac{g(q)}{B(n)}\right\}-1-i\xi\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|\right)\frac{1}{q}\right\}+o(1)=$$
$$=\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\xi u}-1-i\xi\|u\|}{\|u\|^2}d\sum_{\substack{q\leqslant y(t)\\ g(q)\leqslant uB(n)}}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|^2\frac{1}{q}\right\}+o(1). \qquad (20)$$

Отсюда, учитывая, что

$$\sum_{\substack{q\leqslant y(t)\\ g(q)\leqslant uB(y(t))}}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|^2\frac{1}{q}=\int_{-\infty}^{u\frac{B(n)}{B(y(t))}}\left\|x\frac{B(y(t))}{B(n)}\right\|^2\frac{1}{\|x\|^2}d\sum_{\substack{q\leqslant y(t)\\ g(q)\leqslant uB(y(t))}}\left\|\frac{g(q)}{B(y(t))}\right\|^2\frac{1}{q},$$

в силу существования предела $B(y(t))/B(n)$ (см. [14], с.29) и соотношения (4) получаем (5). В силу (5) для любых $t,\ l,\ s,\ 0\leqslant t<l<s\leqslant 1$, имеем: $\tau^{(t,s)}(\xi)=\tau^{(t,l)}(\xi)\cdot\tau^{(l,s)}(\xi)$. Т.е. предельный процесс $H(t)$ является процессом с независимыми приращениями. Наконец, предположив существование t и s, $0\leqslant t<s\leqslant 1$, таких, что распределение величины $H(s)-H(t)$ будет вырожденным, получим: $\tau_n^{(t,s)}(\xi)=1+o(1)$. Поэтому в силу (20) при $n\to\infty$

$$\sum_{y(t)\leqslant q\leqslant y(s)}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|^2\frac{1}{q}\to 0. \qquad (21)$$

С другой стороны, в силу (4) и определения $y(t)$

$$\sum_{y(t)\leqslant q\leqslant y(s)}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|^2\frac{1}{q}=(s-t)\sum_{q\leqslant n}\left\|\frac{g(q)}{B(n)}\right\|^2\frac{1}{q}+O\left(\frac{1}{y(t)}\right)=(s-t)L(+\infty)+o(1).$$

Так как $s-t>0$ и $L(+\infty)>0$, то последнее противоречит соотношению (21). Следовательно, приращения процесса $H(t)$ имеют невырожденные распределения. Теорема полностью доказана.

3. Заключение

Как уже отмечалось, идея приведённого доказательства восходит, в основном, к работе [2], в которой рассматривается моделирование случайных процессов с независимыми приращениями посредством аддитивных арифметических функций на натуральном ряде. При рассмотрении таких функций на последовательности {p+1}, возникает необходимость (при переходе к характеристическим функциям) в получении асимптотических формул для средних значений мультипликативных функций на этой последовательности. Однако возможно и другое решение рассмотренной здесь задачи, которое можно провести с использованием модели Кубилюса вероятностного пространства (см. [3] и [16]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

2. Тимофеев Н. М., Усманов Х. Х. Об арифметическом моделировании случайных процессов с независимыми приращениями // Докл. АН Тадж. ССР. 1984. Т. 27, №10. С. 556–559.

3. Кубилюс Й. П. Вероятностные методы в теории чисел. Вильнюс. Госиздат политической и научной литературы Литовской ССР, 1962.

4. Усманов Х. Х. Предельные теоремы в функциональных пространствах для аддитивных функций на редких множествах // Известия АН Тадж. ССР. Отд. физ. - мат. и геол.-хим. наук. 1979. №2 (72). С. 14–21.

5. Манставичюс Э. А. Аддитивные функции и случайные процессы // Литовский математический сборник. 1985. Т. 25, №1. С. 97–109.

6. Тимофеев Н. М., Усманов Х. Х. Об арифметическом моделировании броуновского движения // Докл. АН Тадж. ССР. 1982. Т. 25, №4. С. 207–211.

7. Тимофеев Н. М., Усманов Х. Х. Об одном классе арифметических моделей случайных процессов // Докл. АН Тадж. ССР. 1986. Т. 29, №6. С. 330–334.

8. Тимофеев Н. М. Распределение значений аддитивных функций на последовательности {p+1} // Мат. зам. 1983. Т. 33, №6. С. 933–942.

9. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Несколько интегральных предельных теорем для аддитивных функций // Литов. мат. сб. 1976. Т. 16, №4. С. 133–147.

10. Hildebrand A. Additive and multiplicative functions on shifted primes // Proc. London Math. Soc. 1989. Vol. 59. №3. P 209–232.

11. Тимофеев Н. М. Гипотеза Эрдёше-Кубилюса о распределении значений аддитивных функций на последовательности сдвинутых простых чисел // Acta Arith. 1991. Т. 58, №2. С. 113–131.

12. Лукач Е. Характеристические функции. М.: Наука, 1979.

13. Барбан М. Б., Виноградов А. И., Левин Б. В. Предельные законы для класса Н И. П. Кубилюса, заданных на множестве сдвинутых простых чисел // Литов. мат. сб. 1965. Т. 5, №1. С. 5–7.

14. Тимофеев Н. М., Усманов Х. Х. Предельные теоремы в функциональных пространствах для аддитивных функций на редких множествах // Известия АН Тадж. ССР. Отд. физ.-мат. и геол.-хим. наук. 1978. №4 (70). С. 25–33.

15. Григелионес Б. , Микулявичюс Р. О функциональных предельных теоремах вероятностной теории чисел // Литовский математический сборник. 1984. Т. 24, №2. С. 72–81.

16. Elliott P. D. T. A. Probabilistic number theory I. New York – Heidelberg. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Bd. 239. 1979.

Филиал Национального Исследовательского Университета «МЭИ» в г. Волжском.

Поступило 27.06.2014