A. N. Panov, Supercharacter theory for groups of invertible elements of reduced algebras,
*Algebra i Analiz*, 2015, Volume 27, Issue 6, 242–259

Алгебра и анализ
Том 27 (2015), №6

Сергею Владимировичу Востокову
по случаю его семидесятилетия

# ТЕОРИЯ СУПЕРХАРАКТЕРОВ ДЛЯ ГРУПП ОБРАТИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИВЕДЕННЫХ АЛГЕБР

© А. Н. ПАНОВ

В работе построена теория суперхарактеров для группы обратимых элементов приведенной алгебры. Для случая треугольной группы вычислены значения суперхарактеров на суперклассах.

## §1. Введение

Традиционно основной задачей теории представлений конечных групп является задача классификации неприводимых представлений. Однако для ряда групп, таких как унитреугольная группа $\mathrm{UT}(n, \mathbb{F}_q)$, задача классификации неприводимых представляется безнадежно сложной. В 2008 г. П. Диаконис и И. Айзекс в работе [4] предложили заменить задачу классификации неприводимых представлений задачей построения так называемой теории суперхарактеров. В этой теории суперхарактеры и суперклассы играют роль, аналогичную неприводимым характерам и классам сопряженных элементов. В той же работе [4] авторы предложили теорию суперхарактеров для алгебра групп, т.е. групп вида $1+J$, где $J$ — нильпотентная ассоциативная конечномерная алгебра над конечным полем. Главным примером является теория базисных характеров для унитреугольной группы, построенная К. Андре [1, 2, 3] и Нинг Яном [5].

Отметим, что априори каждая конечная группа имеет несколько теорий суперхарактеров. Наиболее грубая из них имеет только два суперхарактера и два суперкласса, а наиболее точная совпадает с теорий неприводимых характеров. Главная цель — построить теорию суперхарактеров,

*Ключевые слова:* суперхарактеры, суперклассы, теория суперхарактеров, представления групп, треугольная группа, группа обратимых элементов, приведенная алгебра.

дающую наиболее точное приближение теории неприводимых характеров. Упомянутая выше теория для алгебра групп является, по-видимому, оптимальной, поскольку неизвестна более точная теория. Начиная с 2008 г. теории суперхарактеров посвящены многочисленные исследования, о которых можно судить по библиографии из работы [6]. Выделим только работы, относящиеся к теме этой статьи. В работе [7] была предложена общая конструкция для полупрямых произведений групп; однако эта общая конструкция дает довольно грубую теорию суперхарактеров, которая может быть улучшена в конкретных примерах. В случае полупрямого произведения с абелевой нормальной подгруппой есть примеры более точных супертеорий [8, 9].

В настоящей работе строится теория суперхарактеров для групп обратимых элементов алгебр приведенного вида (см. теорему 4). Такая группа является полупрямым произведением абелевой группы $(A/J)^*$ и алгебра группы $1+J$, где $J$ — радикал исходной алгебры $A$. Построенная теория является более точной, чем общая теория из [7]. С другой стороны, построенная теория является прямым продолжением супертеории для алгебры групп из [4]. В виде частного случая получаем теорию суперхарактеров для треугольной группы $\mathrm{T}(n,\mathbb{F}_q)$ (см. теорему 5), в которой значения суперхарактеров на суперклассах могут быть явно вычислены (см. теорему 5).

Напомним основные определения из работы [4]. Пусть $G$ — конечная группа,

$$\mathfrak{Ch} = \{\chi_\alpha |\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$$

— система комплексных характеров (представлений) группы $G$.

**Определение 1.1.** Система характеров $\mathfrak{Ch}$ задает теорию суперхарактеров на $G$, если характеры из $\mathfrak{Ch}$ попарно дизъюнктны и существует разбиение группы $G$ на систему подмножеств

$$\mathcal{K} = \{K_\beta |\ \beta \in \mathfrak{B}\},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

S1) $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$;

S2) каждый характер $\chi_\alpha$ постоянен на каждом подмножестве $K_\beta$;

S3) $\{1\} \in \mathcal{K}$ (здесь и далее $1$ — единичный элемент группы).

При этом каждый характер из $\mathfrak{Ch}$ называют *суперхарактером*, а каждое подмножество из $\mathcal{K}$ — *суперклассом*.

Легко проверяемое условие S3) является принципиально важным, что видно из следующего утверждения из [4]. Для удобства читателя мы приведем полное доказательство.

Обозначим через $\mathcal{X}$ систему подмножеств $\{X_\alpha : \ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ в $\mathrm{Irr}(G)$, где каждое $X_\alpha$ — множество неприводимых составляющих характера $\chi_\alpha$.

**Предложение 1.2** [4, лемма 2.1]**.** *Предположим, что система дизъюнктных характеров $\mathfrak{Ch}$ и система подмножеств $\mathcal{K}$ удовлетворяют условиям* S1) *и* S2). *Тогда условие* S3) *эквивалентно следующему условию*: S4) *система подмножеств $\mathcal{X}$ задает разбиение* $\mathrm{Irr}(G)$, *и каждый характер $\chi_\alpha$ постоянным множителем отличается от характера*

$$\sigma_\alpha = \sum_{\psi \in X_\alpha} \psi(1)\psi.$$

**Доказательство.** Предположим, что выполнено S3). Всякая система дизъюнктных характеров линейно независима. Так как $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$, то система $\mathfrak{Ch}$ является базисом в пространстве комплекснозначных функций на группе $G$, постоянных на подмножествах из $\mathcal{K}$. Регулярный характер $\rho(g)$ равен $|G|$ при $g = 1$ и 0 при $g \neq 1$. Из условия S3) вытекает, что $\rho(g)$ постоянен на подмножествах из $\mathcal{K}$. Имеем

$$\rho = \sum a_\alpha \chi_\alpha, \ \text{где } a_\alpha \in \mathbb{C}^*.$$

С другой стороны, каждый неприводимый характер входит в разложение $\rho$ с кратностью, равной своей размерности. Поэтому каждый неприводимый характер входит в разложение ровно одного из $\chi_\alpha$ и $\chi_\alpha = \frac{1}{a_\alpha} \cdot \sigma_\alpha$. Что доказывает S4).

Предположим, что выполнено условие S4). Единица группы попадает в одно из подмножеств $\mathcal{K}$, скажем, в $K_1$. Из S1) имеем $\chi_\alpha(g) = \chi_\alpha(e)$ для любых $g \in K_1$ и $\alpha \in \mathfrak{A}$. Из условия S4) получаем, что $\rho(g) = \rho(1)$ и, следовательно, $g = 1$ и $K_1 = \{1\}$. □

**Следствие 1.3.** *Система суперхарактеров однозначно с точностью до постоянных множителей определяется по разбиению* $\mathrm{Irr}(G) = \bigcup X_\alpha$.

Отметим также некоторые важные свойства систем $\mathfrak{Ch}$ и $\mathcal{K}$.

**Предложение 1.4** [4, теорема 2.2]**.**

1) *Каждый суперкласс является объединением классов сопряженных элементов.*

2) *Разбиение $\mathcal{K}$ определяется однозначно по разбиению $\mathcal{X}$, и наоборот.*

3) *Главный характер является суперхарактером* (*с точностью до постоянного множителя*).

## §2. Группа обратимых элементов приведенной алгебры

Пусть $A$ — конечномерная ассоциативная алгебра с единицей, определенная над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из $q$ элементов. Цель этой работы —

построить теорию суперхарактеров для группы $G = A^*$ обратимых элементов алгебры $A$.

Известно, что в случае конечного поля существует подалгебра $S$, дополняющая радикал $J = J(A)$, т.е. $A = S \oplus J$ (см. [10, §11.6]). Подалгебра $S$ полупроста и изоморфна $A/J$. Алгебра $A$ *приведенная*, если алгебра $A/J$ коммутативна (т.е. $S$ коммутативна). Это означает, что $S$ является прямой суммой полей [10, §13.6]. То есть

$$S = k_1e_1 \oplus \ldots \oplus k_ne_n,$$

где $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — система примитивных идемпотентов в $S$, а $k_1, \ldots, k_n$ — конечные расширения поля $\mathbb{F}_q$. Два элемента из $S$ будем называть *ассоциированными*, если они отличаются множителем из $S^*$. Каждый элемент из $S$ ассоциирован с некоторым идемпотентом $f = e_{i_1} + \ldots + e_{i_m}$ из $S$.

Группа $G$ является полупрямым произведением подгруппы $H = S^*$ обратимых элементов подалгебры $S$ и нормальной подгруппы $N = 1 + J$. Образуем группу $\widetilde{G}$, которая состоит из троек $\tau = (t, a, b)$, где $t \in H$, $a, b \in N$, с операцией

$$((t_1, a_1, b_1) \cdot (t_2, a_2, b_2) = (t_1t_2,\ t_2^{-1}a_1t_2a_2,\ t_2^{-1}b_1t_2b_2).$$

Определим представление группы $\widetilde{G}$ в $J$ по формуле

$$\rho(\tau)(x) = taxb^{-1}t^{-1}.$$

В сопряженном пространстве $J^*$ представление группы $\widetilde{G}$ определяется естественным образом

$$\rho^*(\tau)\lambda(x) = \lambda(\rho(\tau^{-1})(x)).$$

В $J^*$ определено также левое и правое действия группы $G$ по формулам $b\lambda(x) = \lambda(xb)$ и $\lambda a(x) = \lambda(ax)$. Тогда $\rho(\tau)(\lambda) = tb\lambda a^{-1}t^{-1}$.

Для любого идемпотента $e \in A$ обозначим через $A_e$ подалгебру $eAe$. Подалгебра $J_e = eJe$ является радикалом в $A_e$. Обозначим $e' = 1 - e$. Имеет место разложение Пирса

$$J = eJe \oplus eJe' \oplus e'Je \oplus e'Je'.$$

Сопряженное пространство $J_e^*$ естественно отождествляется с подпространством в $J^*$, состоящим из линейных форм, равных нулю на всех компонентах разложения Пирса, кроме первого.

**Определение 2.1.**

1) Элемент $x \in J$ назовем сингулярным, если существует идемпотент $e \in A$, $e \neq 1$, такой, что $x \in J_e$. В противном случае $x$ назовем регулярным.

2) Элемент $\lambda \in J^*$ назовем сингулярным, если существует идемпотент $e \in A$, $e \neq 1$, такой, что $\lambda \in J_e^*$. В противном случае $\lambda$ назовем регулярным.

**Лемма 2.2.** *Следующие условия эквивалентны:*

1) *элемент $x \in J$ (соответственно $\lambda \in J^*$) сингулярен;*

2) *существует $c \in A \setminus J$ такой, что $cx = xc = 0$ (соответственно $c\lambda = \lambda c = 0$).*

**Доказательство.** Доказательство проведем для $x \in J$. Случай $\lambda \in J^*$ рассматривается аналогично. Заметим, что условие $x \in J_e$ равносильно $x \in J$ и $e'x = xe' = 0$. Таким образом, элемент $x$ является сингулярным, если существует идемпотент $f \neq 0$ такой, что $fx = xf = 0$.

Очевидно, что 1) влечет 2). Покажем, что из 2) следует 1). Пусть $c$ принадлежит $A \setminus J$ и $cx = xc = 0$. Предположим, что $x \neq 0$ (нулевой элемент, очевидно, сингулярный). Элемент $c$ порождает коммутативную алгебру $C = \mathbb{F}_q[c]$, которая содержит идеал $I = c\mathbb{F}_q[c]$. Поскольку $x \neq 0$, то $\operatorname{codim}(I, C) = 1$.

Предположим, что $C$ — локальная алгебра. В этом случае $C$ имеет единственный идеал коразмерности один, который состоит из нильпотентов. В то же время элемент $c$ не принадлежит $J$ и, следовательно, не является нильпотентом. Следовательно, $C$ не является локальной алгеброй.

Алгебра $C$ содержит идемпотент $f$, отличный от нуля и единицы. Если $f \in I$, то утверждение доказано. Пусть $f \notin I$. Существует $\alpha \in \mathbb{F}_q$ такое, что $\alpha - f \in I$. Тогда

$$(\alpha - f)^2 = \alpha^2 - 2\alpha f + f^2 = \alpha^2 + (1 - 2\alpha) f \in I.$$

Легко видеть, что

$$\begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ \alpha^2 & 1 - 2\alpha \end{vmatrix} = \alpha(1 - \alpha). \tag{1}$$

Если $\alpha \neq 0, 1$, то $1 \in I$ и $I = C$, что противоречит $\operatorname{codim}(I, C) = 1$. Если $\alpha = 0$, то $f \in I$, противоречит предположению $f \notin I$. Остается случай $\alpha = 1$. В этом случае идемпотент $1 - f \neq 0$ принадлежит $I$. □

**Предложение 2.3.** *Если элемент $x \in J$ (соответственно $\lambda \in J^*$) является сингулярным, то любой элемент на его $\rho(\widetilde{G})$-орбите (соответственно $\rho^*(\widetilde{G})$-орбите) является сингулярным. Аналогично для регулярных элементов.*

**Доказательство.** Доказательство проведем для $x \in J$. Случай $\lambda \in J^*$ рассматривается аналогично. Пусть $x$ является сингулярным элементом. Существует идемпотент $f \in A$, $f \neq 0$ такой, что $fx = xf = 0$. Достаточно доказать, что элемент $ax$ (соответственно, $xa$) будет сингулярным для любого $a \in N$. Тогда для $c = fa^{-1}$ имеем $c \notin J$ и $c(ax) = (ax)c = 0$. Из леммы 20 вытекает, что элемент $ax$ является сингулярным. $\square$

**Следствие 2.4.** *Для любой сингулярной $\widetilde{G}$-орбиты $\mathcal{O} \subset J$ (соответственно $\mathcal{O}^* \subset J^*$) существует идемпотент $e \in S$ такой, что $\mathcal{O} \cap J_e \neq \varnothing$ (соответственно $\mathcal{O}^* \cap J_e^* \neq \varnothing$).*

**Доказательство.** Любой идемпотент сопряжен идемпотенту из $S$ [11, теорема 4.1]. $\square$

Обозначим через $\widetilde{G_e}$ группу обратимых элементов алгебры $A_e$. Отождествляя $\tilde{g}_e \in \widetilde{G_e}$ с $\tilde{g}_e + e' \in \widetilde{G}$, где $e' = 1 - e$, можно считать, что $\widetilde{G_e}$ — подгруппа в $\widetilde{G}$.

**Лемма 2.5.** *Пусть $e, f$ — два идемпотента из $S$. Тогда*

1) *если $\widetilde{G}$-орбита $\mathcal{O}$ имеет непустое пересечение с $J_e$ и $J_f$, то $\mathcal{O}$ имеет непустое пересечение с $J_{ef}$;*

2) *два элемента $x$ и $y$ из $J_e$ принадлежат одной $\widetilde{G}$-орбите $\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда $x$ и $y$ принадлежат одной $\widetilde{G_e}$-орбите.*

**Доказательство.** 1) Пусть $x \in \mathcal{O} \cap J_e$, $y \in \mathcal{O} \cap J_f$ (т.е. $ex = xe = x$ и $fy = yf = y$, и $y = haxbh^{-1}$, где $h \in H$ и $a, b \in N$). Рассмотрим элемент $z = eye$. Так как $ef = fe$, то $(ef)z = z(ef) = z$ и $z = eye = ehaxbh^{-1}e = heaxbeh^{-1}$. Элемент $a_1 = ea + e'$, где $e' = 1 - e$, удовлетворяет равенствам $a_1 x = eax + (1-e)x = eax$. Так как $a_1 = 1 \bmod J$, то $a_1 \in N$. Аналогично, $b_1 = be + e'$ принадлежит $N$ и $xb_1 = xbe + x(1-e) = xbe$. Тогда $z = ha_1 x b_1 h^{-1}$, где $a_1,\ b_1 \in N$; т.е. $z$ содержится в общей орбите $\mathcal{O}$.

2) Пусть $x, y \in J_e$ (т.е. $ex = xe = x$ и $ey = ye = y$). Очевидно, что если $x, y$ принадлежат одной $\widetilde{G_e}$-орбите, то $x, y$ принадлежат одной $\widetilde{G}$-орбите. Докажем обратное утверждение.

Пусть $x, y$ принадлежат одной $\widetilde{G}$-орбите, т.е. $y = haxbh^{-1}$, где $a, b \in N$ и $h \in H$. Тогда

$$y = eye = ehaxbh^{-1}e = (he)a(exe)beh^{-1} = (he)(eae)x(ebe)(h^{-1}e).$$

Элемент $he = eh$ обратим в $A_e$ и его обратный совпадает с $h^{-1}e$. Элементы $eae$ и $ebe$ принадлежат $N_e$. Это доказывает, что $x$ и $y$ принадлежат одной $\widetilde{G_e}$-орбите. $\square$

**Следствие 2.6.** *Для любого $x \in J$ существует единственный идемпотент $e \in S$ такой, что $\mathcal{O}(x) \cap J_e \neq \varnothing$ и $\mathcal{O}(x) \cap J_e$ является регулярной $\widetilde{G_e}$-орбитой в $J_e$.*

**Доказательство.** Утверждение вытекает из 1) и 2) предыдущей леммы. □

Следующие свойства для орбит из $J^*$ доказываются аналогично.

**Лемма 2.7.** *Пусть $e, f$ — два идемпотента из $S$. Тогда*

1) *если $\widetilde{G}$-орбита $\mathcal{O}^*$ имеет непустое пересечение с $J_e^*$ и $J_f^*$, то $\mathcal{O}^*$ имеет непустое пересечение с $J_{ef}^*$;*

2) *два элемента $\lambda$ и $\mu$ из $J_e^*$ принадлежат одной $\widetilde{G}$-орбите $\mathcal{O}^*$ тогда и только тогда, когда $\lambda$ и $\mu$ принадлежат одной $\widetilde{G_e}$-орбите.*

**Следствие 2.8.** *Для любого сингулярного элемента $\lambda \in J^*$ существует единственный идемпотент $e \in S$ такой, что $\mathcal{O}(\lambda) \cap J_e^* \neq \varnothing$ и $\mathcal{O}(\lambda) \cap J_e^*$ является регулярной $\widetilde{G_e}$-орбитой в $J_e^*$.*

**Обозначения 2.9.**
$\mathcal{O}(J)$ — множество $\widetilde{G}$-орбит в $J$;
$n(J)$ — число $\widetilde{G}$-орбит в $J$;
$\mathcal{O}(J_e)$ — множество $\widetilde{G}$-орбит вида $\mathcal{O}(x)$, где $x \in J_e$;
$n(J_e) = |\mathcal{O}(J_e)|$ (в силу леммы 2.5 число $n(J_e)$ совпадает с числом $\widetilde{G_e}$-орбит в $J_e$);
$n_E(J)$ — число регулярных $\widetilde{G}$-орбит в $J$;
$\mathcal{O}(J^*)$, $n(J^*)$, $\mathcal{O}(J_e^*)$, $n(J_e^*)$, $n_E(J^*)$ определяются аналогично.

**Следствие 2.10.** 1) $\mathcal{O}(J_e) \cap \mathcal{O}(J_f) = \mathcal{O}(J_{ef})$, 2) $\mathcal{O}(J_e^*) \cap \mathcal{O}(J_f^*) = \mathcal{O}(J_{ef}^*)$.

**Предложение 2.11.** *Число регулярных $\widetilde{G}$-орбит в $J$ совпадает с числом регулярных $\widetilde{G}$-орбит в $J^*$ (т.е. $n_E(J) = n_E(J^*)$).*

**Доказательство.** Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — система всех примитивных идемпотентов алгебры $S$. Обозначим $e_i' = 1 - e_i$. Для любого идемпотента $f \in S$ обозначим через $l(f)$ число множителей в разложении $f = e_{i_1}' \cdots e_{i_l}'$. Для $f = 1$ положим $l(f) = 0$. Из следствия 2.10 вытекает, что $\mathcal{O}(J_f)$ совпадает с пересечением $\bigcap \mathcal{O}(J_\phi)$, где $\phi$ пробегает множество идемпотентов $\{e_{i_1}', \ldots, e_{i_l}'\}$.

Множество сингулярных орбит в $J$ является объединением $\mathcal{O}(J_{e_i'})$, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Отсюда

$$n_E(J) = \bigoplus (-1)^{l(f)} n(J_f),$$

где $f$ пробегает множество идемпотентов в $S$. Аналогичная формула имеет место для орбит в $J^*$:

$$n_E(J^*) = \bigoplus (-1)^{l(f)} n(J_f^*),$$

где $f$ также пробегает множество идемпотентов в $S$. Для любой конечной подгруппы линейных операторов в линейном пространстве $V$ над конечным полем число орбит в $V$ совпадает с числом орбит в сопряженном пространстве $V^*$ (см. [4, лемма 4.1]). Для орбит группы $\widetilde{G}_f$ в $J_f$ и $J_f^*$ заключаем, что $n(J_f) = n(J_f^*)$. Отсюда $n_E(J) = n_E(J^*)$. □

## §3. Суперклассы

Определим действие группы $\widetilde{G}$ на $G$ по формуле

$$R_\tau(g) = 1 + ta(g-1)b^{-1}t^{-1}, \text{ где } \tau = (t,a,b),\ t \in H,\ a,b \in N. \quad (2)$$

Заметим, что для $g = 1 + x \in N$ получаем $R_\tau(1+x) = 1 + \rho_\tau(x)$.

*Суперклассом* $\mathcal{K}(g)$ назовем $\widetilde{G}$-орбиту элемента $g \in G$. Каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = h + x$, где $h \in H$ и $x \in J$. Легко видеть, что если $g = h + x$ и $g' = h' + x'$ принадлежат одному суперклассу, то $h = h'$.

**Теорема 3.1.** *Пусть $g = h + x$, где $h \in H$ и $x \in J$. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}(g)$. Пусть $f$ — идемпотент, ассоциированный с $h - 1$. Тогда*

1) *существует идемпотент $e \in S$, $e \perp f$, и регулярный элемент $y \in J_e$ такие, что элемент $h+y$ принадлежит суперклассу $\mathcal{K}$; обозначим через $\omega(y)$ орбиту для $y$ в $J_e$ относительно $\widetilde{G_e}$;*

2) *набор $\beta = (e,f,h,\omega)$ определяется по суперклассу $\mathcal{K}$ однозначно.*

**Доказательство.**

**Пункт 1.** Докажем, что существует элемент $h + y \in \mathcal{K}$ такой, что $y \in J_{f'}$, где $f' = 1 - f$.

Обозначим $s = h - 1$. Достаточно показать, что существуют $a, b \in N$ такие, что $s + y = a(s+x)b$, где $yf = fy = 0$. Так как $s$ ассоциирован с идемпотентом $f$, то достаточно доказать, что для любого $x \in J$ существуют $a, b \in N$ и $y \in J$ такие, что $f + y = a(f+x)b$ и $yf = fy = 0$.

1) Покажем, что существует $u \in J$ такой, что $f + u = a(f+x)$ и $uf = 0$. Положим $a = (1+x)^{-1} \in N$. Тогда

$$uf = \left((1+x)^{-1}(f+x) - f\right) f = ((1+x)^{-1}(f+xf) - f = 0.$$

2) Пусть $u$ как в 1). Покажем, что существует $y \in J$ такой, что $f + y = (f+u)b$, $b \in N$ и $yf = fy = 0$. Положим $b = (1 - fu) \in N$. Тогда

$$y = (f+u)(1-fu) - f = (1-f)u.$$

Отсюда $fy = yf = 0$.

**Пункт 2.** Покажем, что элементы $h+y$ и $h+y'$, где $y, y' \in J_{f'}$, принадлежат одному суперклассу тогда и только тогда, когда $y$ и $y'$ принадлежат одной $\widetilde{G}_{f'}$-орбите в $J_{f'}$.

Очевидно, что если $y$ и $y'$ принадлежат одной $\widetilde{G}_{f'}$-орбите, то $h+y$ и $h+y'$ принадлежат одному суперклассу. Докажем обратное утверждение. Пусть $h+y$ и $h+y'$ принадлежат одному суперклассу. Тогда существуют $t \in H$, $u, v \in J$ такие, что

$$h-1+y' = t(1+u)(h-1+y)(1+v)^{-1}t^{-1}, \tag{3}$$

тогда

$$(h-1+y')t(1+v) = t(1+u)(h-1+y). \tag{4}$$

Элемент, определяемый равенством (4), содержится в $(h-1)t+J$. Вычтем из левой и правой частей (4) элемент $(h-1)t$ и домножим слева и справа на $f'$. Учитывая $f'(h-1) = (h-1)f' = 0$, получаем

$$y't(1+f'vf') = t(1+f'uf')y.$$

То есть $y$ и $y'$ принадлежат общей $\widetilde{G}_{f'}$-орбите в $J_{f'}$.

**Пункт 3.** Для любой $\widetilde{G}_{f'}$-орбиты $\omega$ в $J_{f'}$ существует единственный идемпотент $e < f'$ такой, что $\omega \cap J_e$ является регулярной $\widetilde{G_e}$-орбитой в $J_e$ (см. следствие 2.6). Можно считать, что $y \in J_e$ является регулярным элементом в $J_e$. Что доказывает утверждение п. 1. Из леммы 2.5 вытекает утверждение теоремы. □

Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество наборов $\beta = (e, f, h, \omega)$, где $e, f$ — пара идемпотентов из $S$, $e \perp f$, $h \in H$, причем $h-1$ ассоциирован с $f$, и $\omega$ является регулярной $\widetilde{G_e}$-орбитой в $J_e$.

**Обозначения 3.2.** Для любого $\beta \in \mathfrak{B}$ обозначим через $\mathcal{K}_\beta$ суперкласс элемента $g = h + x$, где $x \in \omega$;

$$S_i = e_i S = S e_i; \quad H_i = \{1 - e_i + s_i, \text{ где } s_i \in S_i^*\};$$
$$H_f = \prod_{e_i \leqslant f} H_i; \quad m(f) = \sum_{e_i \leqslant f} (|H_i| - 1).$$

**Следствие 3.3.** *Суперклассы $\{\mathcal{K}_\beta \mid \beta \in \mathfrak{B}\}$ образуют разбиение группы $G$. Число суперклассов равно*

$$|\mathfrak{B}| = \sum_{e \perp f} (n_E(J_e) + m(f)). \tag{5}$$

## §4. Суперхарактеры

Пусть $e, f$ — идемпотенты из $S$ и $e \perp f$. Пусть $\lambda$ является регулярным элементом в $J_e^*$. Как и выше, $e' = 1 - e$ и

$$H_{e'} = \prod_{e_i \leqslant e'} H_i.$$

Обозначения:

$$J_{\lambda,\mathrm{right}} = \{x \in J | \ \lambda x = 0\}, \quad N_{\lambda,\mathrm{right}} = \{a \in N | \ \lambda a = \lambda\}.$$

Заметим, что $N_{\lambda,\mathrm{right}} = 1 + J_{\lambda,\mathrm{right}}$. Аналогично определяются $H_{\lambda,\mathrm{right}}$ и $H_{\lambda,\mathrm{left}}$. Легко видеть, что $H_{e'}$ содержится в $H_{\lambda,\mathrm{right}}$ и $H_{\lambda,\mathrm{left}}$. Поскольку $\lambda$ является регулярным элементом в $J_e^*$, то

$$H_{e'} = H_{\lambda,\mathrm{right}} \cap H_{\lambda,\mathrm{left}}. \tag{6}$$

Рассмотрим подгруппу $G_\lambda = H_{e'} \cdot N_{\lambda,\mathrm{right}}$. Подгруппа $G_\lambda$ является полупрямым произведением $H_{e'}$ и нормального делителя $N_{\lambda,\mathrm{right}}$. Каждый элемент $g \in G_\lambda$ однозначно записывается в виде $g = h + x$, где $h \in H_{e'}$ и $x \in J_{\lambda,\mathrm{right}}$.

Зафиксируем нетривиальный характер $c \to \varepsilon^c$ аддитивной группы поля $\mathbb{F}_q$ со значением в мультипликативной группе $\mathbb{C}^*$. Пусть $\theta$ — линейный характер (одномерное представление) подгруппы $H_{e'}$. Определим линейный характер подгруппы $G_\lambda$ по формуле

$$\xi_{\theta,\lambda}(g) = \theta(h)\varepsilon^{\lambda(x)}, \tag{7}$$

где $g = h + x$, $h \in H_{e'}$ и $x \in J_{\lambda,\mathrm{right}}$. Покажем, что $\xi = \xi_{\theta,\lambda}$ действительно является линейным характером:

$$\begin{aligned}\xi(gg') &= \xi((h+x)(h'+x')) = \xi(hh' + h'x + x'h + xx') \\ &= \theta(hh')\varepsilon^{\lambda(h'x)}\varepsilon^{\lambda(x'h)}\varepsilon^{\lambda(xx')} = \theta(h)\theta(h')\varepsilon^{\lambda(h'x)}\varepsilon^{\lambda(x'h)} = \xi(g)\xi(g').\end{aligned}$$

Следующий индуцированный характер будем называть *суперхарактером*

$$\chi_{\theta,\lambda} = \mathrm{ind}(\xi_{\theta,\lambda}, G_\lambda, G). \tag{8}$$

**Предложение 4.1.** *Суперхарактер $\chi_{\theta,\lambda}$ постоянен на суперклассах.*

**Доказательство.**

**Пункт 1.** Пусть $g \in G_\lambda$, $a \in N$. Покажем, что тогда $g' = 1 + (g-1)a \in G_\lambda$ и $\chi_{\theta,\lambda}(g') = \chi_{\theta,\lambda}(g)$.

Так как $g \in G_\lambda$, то $g = h + x$, где $h \in H_{e'}$ и $x \in J_{\lambda,\mathrm{right}}$. Пусть $a = 1 + u$, где $u \in J$. Тогда $g' = h + y$, где $h \in H_{e'}$ и $y = (h-1)u + x + xu \in J$. Поскольку

$$\lambda h = \lambda, \quad \lambda(h-1)u = 0, \quad \lambda x = 0 \text{ и } \lambda xu = 0,$$

то $\lambda y = \lambda(h-1)u + \lambda x + \lambda xu = 0$. Поэтому $y \in J_{\lambda,\mathrm{right}}$ и $g' \in G_\lambda$.

Далее

$$\xi_{\theta,\lambda}(g') = \theta(h)\varepsilon^{\lambda((h-1)u+x+xu)} = \theta(h)\varepsilon^{\lambda(x)} = \xi_{\theta,\lambda}(g). \tag{9}$$

Обозначим $\Lambda(g) = \{s \in G | \ s^{-1}gs \in G_\lambda\}$.

Покажем, что $\Lambda(g') = \Lambda(g)$. Действительно, $s^{-1}g's = 1+(s^{-1}gs-1)s^{-1}as$. Как было показано выше, если $s^{-1}gs \in G_\lambda$, то $s^{-1}g's \in G_\lambda$. Что доказывает включение $\Lambda(g) \subset \Lambda(g')$. Обратное включение показывается аналогично. Из формулы (9) получаем

$$\xi_{\theta,\lambda}(s^{-1}g's) = \xi_{\theta,\lambda}(s^{-1}gs), \tag{10}$$

для любого $s \in \Lambda(g)$. Отсюда

$$\chi_{\theta,\lambda}(g') = \frac{1}{|G_\lambda|}\sum_{s\in\Lambda(g')} \xi_{\theta,\lambda}(s^{-1}g's) = \frac{1}{|G_\lambda|}\sum_{s\in\Lambda(g)} \xi_{\theta,\lambda}(s^{-1}gs) = \chi_{\theta,\lambda}(g). \tag{11}$$

**Пункт 2.** Характеры постоянны на классах сопряженных элементов. Поэтому $\chi_{\theta,\lambda}(g_0 g g_0^{-1}) = \chi_{\theta,\lambda}(g)$ для любого $g_0 \in G$. Из (2) и п. 1 заключаем, что $\chi_{\theta,\lambda}(R_\tau(g)) = \chi_{\theta,\lambda}(g)$ для любых $\tau \in \widetilde{G}$ и $g \in G_\lambda$.

Если $\widetilde{G}$-орбита имеет пустое пересечение с $G_\lambda$, то $\chi_{\theta,\lambda}$ на ней равен нулю. □

**Предложение 4.2.** *Если* $\lambda$, $\lambda' \in J_e^*$ *принадлежат одной* $\widetilde{G_e}$*-орбите, то* $\chi_{\theta,\lambda} = \chi_{\theta,\lambda'}$.

**Доказательство.** Утверждение предложения вытекает из следующих п. 1 и п. 2.

**Пункт 1.** Рассмотрим случай $\lambda' = a\lambda$, где $a = 1 + u \in N_e$. Так как $J_{a\lambda,\mathrm{right}} = J_{\lambda,\mathrm{right}}$, то $G_{a\lambda} = G_\lambda$. Для любого $g = h + x \in G_\lambda$ имеем

$$\xi_{\theta,a\lambda}(g) = \theta(h)\varepsilon^{a\lambda(x)} = \theta(h)\varepsilon^{\lambda(x+xu)} = \theta(h)\varepsilon^{\lambda(x)} = \xi_{\theta,\lambda}(g),$$

где $g = h + x$, $h \in H_{e'}$ и $x \in J_{\lambda,\mathrm{right}}$. Отсюда $\chi_{\theta,\lambda} = \chi_{\theta,a\lambda}$.

**Пункт 2.** Пусть $\lambda' = g_0\lambda g_0^{-1}$, где $g_0 \in G_e$. Тогда $G_{\lambda'} = g_0 G_\lambda g_0^{-1}$ и

$$\xi_{\theta,\lambda'}(g) = \theta(h)\varepsilon^{g_0\lambda g_0^{-1}(x)} = \theta(h)\varepsilon^{\lambda(g_0^{-1}xg_0)} = \xi_{\theta,\lambda}(g_0^{-1}gg_0).$$

Тогда соответствующие индуцированные представления эквивалентны и $\chi_{\theta,\lambda} = \chi_{\theta,\lambda'}$. □

**Предложение 4.3.** *Если* $\theta \neq \theta'$, *то характеры* $\chi_{\theta,\lambda}$ *и* $\chi_{\theta',\lambda}$ *дизъюнктны.*

**Доказательство.** Обозначим $\xi = \xi_{\theta,\lambda}$ и $\xi' = \xi_{\theta',\lambda}$. Из теоремы о числе зацеплений индуцированных представлений [12, теорема 44.5] вытекает, что характеры $\chi_{\theta,\lambda}$ и $\chi_{\theta',\lambda}$ дизъюнктны тогда и только тогда, когда для любого $s \in G$ существует $g \in G_\lambda$ такой, что $sgs^{-1} \in G_\lambda$ и $\xi(sgs^{-1}) \neq \xi'(g)$.

Достаточно доказать, что для любых $t \in H$ и $a \in N$ существует $g \in G_\lambda$ такой, что $aga^{-1}$ и $tgt^{-1}$ содержатся в $G_\lambda$, и

$$\xi(aga^{-1}) \neq \xi'(tgt^{-1}). \tag{12}$$

**Пункт 1.** Пусть $a \in N$ и $t \in H$. Сведем доказательство (12) к случаю $a = 1 + ev$, где $v \in J$.

Покажем, что существует $w \in J$ такой, что $a(1 + e'w) = 1 + ev$, где $v \in J$, $e' = 1 - e$. Действительно, пусть $a = 1 + u$, $u \in J$. Тогда для любого $v \in J$ имеем

$$a(1 + e'w) = (1 + eu + e'u)(1 + e'w) = 1 + eu(1 + e'w) + e'u + (1 + e'u)e'w.$$

Достаточно положить $e'w = -(1 + e'u)^{-1}e'u$.

Поскольку $\lambda e' = 0$, то $e'w \in J_{\lambda,\mathrm{right}}$ и $1 + e'w \in N_{\lambda,\mathrm{right}}$. Более того, $t(1 + e'w)t^{-1} = 1 + e'twt^{-1} \in N_{\lambda,\mathrm{right}}$. Достаточно доказать (12) для $a = 1 + ev$, где $v \in J$.

**Пункт 2.** Пусть $t \in H$ и $a = 1 + ev = 1 + eve + eve'$, где $v \in J$. Докажем (12) для случая $eve' \in J_{\lambda,\mathrm{right}}$.

Заметим, что $(1 - eve')a = (1 - eve')(1 + eve + eve') = 1 + eve$. Так как $1 - eve' \in N_{\lambda,\mathrm{right}} \subset G_\lambda$, то достаточно доказать (12) для $a = 1 + eve$, где $v \in J$.

Пусть $g = h_0$ — произвольный элемент подгруппы $H_{e'} \subset G_\lambda$. Тогда $h_0 e = eh_0 = e$ и

$$ah_0a^{-1} = (1 + eve)h_0(1 + eve)^{-1} = h_0(1 + eve)(1 + eve)^{-1} = h_0 \in G_\lambda.$$

Так как $th_0 = h_0 t$, то $th_0t^{-1} = h_0 \in G_\lambda$.

По условию $\theta \neq \theta'$; существует $h_0 \in H_{e'}$ такой, что $\theta(h_0) \neq \theta'(h_0)$. Подставляя $g = h_0$ в (12), получаем

$$\xi(ah_0a^{-1}) = \xi(h_0) \neq \xi'(h_0) = \xi'(th_0t^{-1}).$$

**Пункт 3.** Пусть $a = 1 + x$, где $x = eve + eve' \in J$, причем $eve' \notin J_{\lambda,\mathrm{right}}$. Тогда

$$\lambda(xe'J) = \lambda((eve+eve')e'J) = \lambda((eve')e'J) = \lambda(eve'(eJ+e'J)) = \lambda(eve'J) \neq 0.$$

Рассмотрим цепочку правых идеалов $e'J \supset e'J^2 \supset \ldots \supset e'J^k = \{0\}$. Существует номер $i$, для которого $\lambda(xe'J^i) \neq 0$ и $\lambda(xe'J^{i+1}) = 0$. Существует $y \in e'J^i$ такой, что $\lambda(xy) \neq 0$ и $\lambda(xyJ) = 0$. Последнее равенство означает, что $xy \in J_{\lambda,\mathrm{right}}$. Так как $\lambda e' = 0$, то $y \in J_{\lambda,\mathrm{right}}$.

Положим $g = 1 + cy \in N_{\lambda,\mathrm{right}}$, где $c \in \mathbb{F}_q$. Тогда

$$aga^{-1} = (1+x)(1+cy)(1+x)^{-1} = 1+(1+x)cy(1+x)^{-1} \in 1+cy+cxy+yJ+xyJ.$$

Поэтому $aga^{-1} \in N_{\lambda,\mathrm{right}} \subset G_\lambda$. Так как $\lambda(e'J) = 0$, то $\lambda(y) = 0$. Поскольку $y,\ xy \in J_{\lambda,\mathrm{right}}$, то $\lambda(yJ) = \lambda(xyJ) = 0$. Получаем $\xi(aga^{-1}) = \varepsilon^{c\lambda(xy)}$.

Так как $y \in e'J$, то $tyt^{-1} \in e'J$ и

$$tgt^{-1} = 1 + tyt^{-1} \in N_{\lambda,\mathrm{right}} \subset G_\lambda.$$

Имеем $\xi'(tgt^{-1}) = \varepsilon^{c\lambda(tyt^{-1})} = 1$.

Поскольку $\lambda(xy) \neq 0$, то существует $c \in \mathbb{F}_q$, для которого $\varepsilon^{c\lambda(xy)} \neq 1$. Это доказывает (12). $\square$

Пусть $e \perp f$ — пара ортогональных идемпотентов. Будем говорить, что линейный характер $\theta$ подгруппы $H_{e'}$ *ассоциирован* с идемпотентом $f$, если для любого примитивного идемпотента $e_i \leqslant e'$ выполняется следующие условия:

1) если $e_i \leqslant f$, то $\mathrm{Res}_{H_i}\theta \neq 1$,

2) если $e_i \nleqslant f$, то $\mathrm{Res}_{H_i}\theta = 1$.

Число линейных характеров, ассоциированных с $f$, равно $m(f)$ (см. обозначения 3.2).

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество четверок $\alpha = (e, f, \theta, \omega^*)$, где $e, f$ — пара идемпотентов из $S$, $e \perp f$, $\theta$ — линейный характер группы $H_{e'}$, ассоциированный с $f$, и $\omega^*$ — регулярная $\widetilde{G}_e$-орбита в $J_e^*$. Для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ обозначим через $\chi_\alpha$ суперхарактер $\chi_{\theta,\lambda}$, где $\lambda \in \omega^*$ (см. предложение 4.2).

**Предложение 4.4.** *Характеры $\{\chi_\alpha |\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ попарно дизъюнктны.*

**Доказательство.** Во-первых, напомним конструкцию суперхарактеров для алгебры группы $N = 1+J$ (см. [4]). Для любого $\mu \in J^*$, суперхарактер $\chi_\mu$ группы $N$ определяется как индуцированный характер

$$\xi_\mu(1+x) = \varepsilon^{\mu(x)},$$

подгруппы $N_{\lambda,\mathrm{right}}$. Два суперхарактера $\chi_\mu$ и $\chi_{\mu'}$ равны тогда и только тогда, когда $\mu$ и $\mu'$ принадлежат общей $N \times N$-орбите. В противном случае суперхарактеры $\chi_\mu$ и $\chi_{\mu'}$ дизъюнктны [4, теорема 5.5].

Применяя формулу разложения индуцированного представления на подгруппу (см. [12, теорема 44.2], [13, предложение 22]), получаем

$$\mathrm{Res}_N(\chi_{\theta,\lambda}) = \sum_{t \in H_e} \chi_{Ad_t^* \lambda}. \qquad (13)$$

Вернемся к доказательству утверждения. Пусть $\alpha \neq \bar{\alpha}$, где $\alpha = (e, f, \theta, \omega^*)$ и $\alpha = (\bar{e}, \bar{f}, \bar{\theta}, \bar{\omega}^*)$. Если $e \neq \bar{e}$, то $\lambda$ и $\bar{\lambda}$ принадлежат различным $\widetilde{G}$-орбитам (см. следствие 2.8). Из формулы (13) вытекает, что ограничения характеров $\chi_\alpha$ и $\chi_{\bar{\alpha}}$ на $N$ дизъюнктны. Поэтому $\chi_\alpha$ и $\chi_{\bar{\alpha}}$ дизъюнктны.

Аналогично рассматривается случай $e = \bar{e}$, $f = \bar{f}$, $\theta = \bar{\theta}$ и $\omega^* \neq \bar{\omega}^*$ (см. лемму 2.7).

Осталось рассмотреть случай $e = \bar{e}$, $\omega^* = \bar{\omega}^*$, $f \neq \bar{f}$ или $\theta \neq \bar{\theta}$. Доказательство вытекает из предложения 4.3. $\square$

**Теорема 4.5.** *Системы суперхарактеров $\{\chi_\alpha |\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ и суперклассов $\{\mathcal{K}_\beta |\ \beta \in \mathfrak{B}\}$ определяют теорию суперхарактеров на группе $G$.*

**Доказательство.** Суперхарактеры дизъюнктны согласно предыдущему предложению. Суперклассы образуют разбиение группы $G$ (см. следствие 3.3). Число суперхарактеров равно числу суперклассов

$$|\mathfrak{A}| = \sum_{e \perp f} (n_E(J_e^*) + m(f)). \tag{14}$$

Из формулы (5) и предложения 2.11 заключаем, что $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$; это доказывает S1). Суперхарактеры постоянны на суперклассах (см. предложение 4.1; это доказывает S2). Наконец, $\{1\}$ является суперклассом $K(g)$ для $g = 1$; это доказывает S3). $\square$

## §5. Теория суперхарактеров для треугольной группы

Рассмотрим алгебру $A = \mathfrak{t}(n, \mathbb{F}_q)$, состоящую из $n \times n$-матриц с элементами в поле $\mathbb{F}_q$ и нулями ниже диагонали. *Треугольная группа* $G = \mathrm{T}(n, \mathbb{F}_q)$ — подгруппа обратимых элементов в алгебре $A$. Радикал $J$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F}_q)$, состоящей из треугольных матриц с нулями по диагонали. Дополнительная подалгебра $S$ — подалгебра диагональных матриц; $H = S^*$ — подгруппа диагональных матриц. В этом параграфе мы конкретизируем построенную выше теорию суперхарактеров для треугольной группы.

Упрощая язык, будем называть *положительным корнем* пару $(i, j)$, где $i, j$ — целые положительные числа $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Обозначим через $\Delta$ множество положительных корней. Назовем $i = \mathrm{row}(\gamma)$ (соответственно $j = \mathrm{col}(\gamma)$) номером строки (соответственно столбца) корня $\gamma = (i, j)$. Следуя К. Андре, введем понятие базисного подмножества. Будем называть *базисным подмножеством* подмножество $D \subset \Delta$, которое имеет не более одного корня в каждой строке и столбце [1, 2].

Пусть $\{E_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant\}$ — базис из матричных единиц радикала $J$. Каждому базисному подмножеству $D$ сопоставим элемент

$$x_D = \sum_{\gamma \in D} E_{ij},$$

в радикале $J$. Обозначим через $\mathcal{O}_D$ орбиту элемента $x_D$ в $J$ относительно $\widetilde{G}$. Орбиты $\{\mathcal{O}_D\}$ образуют разбиение $J$ (см. [2]), следовательно, подмножества $\{1 + \mathcal{O}_D\}$ образуют разбиение $N$.

Пусть $\{E_{ij}^*\}$ — дуальный базис к базису $\{E_{ij}\}$. Далее, сопоставим $D$ линейную форму

$$\lambda_D = \sum_{\gamma \in D} E_{ij}^*$$

и ее $\widetilde{G}$-орбиту $\mathcal{O}_D^*$. Орбиты $\{\mathcal{O}_D^*\}$ образуют разбиение $J^*$ [1].

**Лемма 5.1.** *Орбита* $\mathcal{O}_D$ *(соответственно* $\mathcal{O}^*_D$*) регулярны тогда и только тогда, когда* $\mathrm{row}(D) \cup \mathrm{col}(D) = [1, n]$.

**Доказательство.** Докажем, что орбита $\mathcal{O}_D$ сингулярна тогда и только тогда, когда $\mathrm{row}(D) \cup \mathrm{col}(D) \neq [1, n]$.

Пусть $\mathrm{row}(D) \cup \mathrm{col}(D) \neq [1, n]$, тогда элемент $x_D$ принадлежит $J_e$, где $e = \sum E_{ii}$ и $i$ пробегает $\mathrm{row}(D) \cup \mathrm{col}(D)$. Это доказывает, что элемент $x_D$ (и орбита $\mathcal{O}_D$) сингулярны.

С другой стороны, предположим, что $\mathcal{O}_D$ — сингулярная орбита; тогда существует идемпотент $e \in S$, $e \neq 1$, такой, что $\mathcal{O}_D \cap J_e \neq \varnothing$ (см. следствие 2.4). Алгебра $J_e$ изоморфна $\mathfrak{n}(k, \mathbb{F}_q)$ для некоторого $k < n$. Пересечение $\mathcal{O}_D \cap J_e$ является $\widetilde{G}_e$-орбитой (см. лемму 2.5); существует $x_{D'} \in \mathcal{O}_D \cap J_e$ для некоторого базисного подмножества $D'$. Так как $x_D$ и $x_{D'}$ принадлежат общей $\widetilde{G}$-орбите, то мы заключаем, что $D = D'$. Следовательно,

$$\mathrm{row}(D) \cup \mathrm{col}(D) = \mathrm{row}(D') \cup \mathrm{col}(D') \neq [1, n].$$

□

Пусть $h = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n)$ — элемент $H$, для которого $h_i = 1$ для любого $i \in \mathrm{row}(D) \cup \mathrm{col}(D)$. Пусть $g_{h,D} = h + x_D \in G$ и $K_{h,D}$ есть $\widetilde{G}$-орбита элемента $g_{h,D}$ в группе $G$.

Пусть $\theta$ — линейный характер группы $H$, для которого $\mathrm{Res}_{H_i}(\theta) = 1$ для любого $i \in \mathrm{row}(D) \cup \mathrm{col}(D)$. Для $\lambda_D$ и $\theta$ аналогично (8) определим индуцированный характер

$$\chi_{\theta,D} = \chi_{\theta,\lambda_D}.$$

**Теорема 5.2.** *Система характеров* $\{\chi_{\theta,D}\}$ *и система подмножеств* $\{K_{h,D}\}$ *определяют теорию суперхарактеров на* $G = \mathrm{T}(n, \mathbb{F}_q)$.

**Доказательство.** Доказательство вытекает из леммы 5 и теоремы 4. □

Вычислим значения суперхарактеров $\chi_{\theta,D}$ на суперклассах $K_{h,D'}$. Нам понадобится ряд новых обозначений.

Для любого положительного корня $\gamma = (i, j)$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, положим

$$\Delta'(\gamma) = \{(i, k) |\ i < k < j\}, \quad \Delta''(\gamma) = \{(k, j) |\ i < k < j\}.$$

Число элементов в обоих подмножествах одинаково и совпадает с $j - i - 1$. Положим $\delta'(D, D') = 1$, если существуют $\gamma \in D$ и $\gamma \in D'$ такие, что $\gamma' \in \Delta'(\gamma)$. В противном случае положим $\delta'(D, D') = 1$. Аналогично определим $\delta''(D, D')$.

Положим $\delta_0(D, h) = 1$, если $h_i = 1$ для любого $i \in \mathrm{row}(D) \cup \mathrm{col}(D)$; в противном случае $\delta_0(D, h) = 0$. Обозначим

$$\delta(D, h, D') = \delta'(D, D')\delta''(D, D')\delta_0(D, h). \tag{15}$$

Для любого положительного корня $\gamma = (i,j)$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, обозначим через $P(\gamma)$ подматрицу матрицы $g-1$ с системой строк и столбцов $[i+1, j-1]$. Пусть $m(\gamma, h, D')$ — коранг $P(\gamma)$. Поскольку в каждой строке и столбце $P_\gamma$ не более одного ненулевого элемента, то $m(\gamma, h, D')$ — число нулевых строк (столбцов). Введем обозначения

$$m(D,h,D') = \sum_{\gamma\in D} m(\gamma,h,D'), \quad s(D,D') = |D| + |D \setminus D'|. \tag{16}$$

**Теорема 5.3.** *Значение суперхарактера на суперклассе равно*

$$\chi_{\theta,D}(K_{h,D'}) = \delta(D,h,D')(-1)^{|D\cap D'|} q^{m(D,h,D')}(q-1)^{s(D,D')}\theta(h). \tag{17}$$

**Доказательство.** Обозначим через $\phi(\theta, D, h, D')$ выражение в правой части формулы (17). Упростим обозначения $\chi = \chi_{\theta,D}$, $\xi = \xi_{\theta,D}$, $g = g_{h,D'}$. Будем вычислять индуцированный характер $\chi(g) = \mathrm{ind}(\xi, G_1, G)$ по известной формуле

$$\chi(g) = \frac{1}{|G_\lambda|}\sum \xi(s^{-1}gs), \tag{18}$$

где $s^{-1}gs \in G_\lambda$. Если множество тех $s$, для которых $s^{-1}gs \in G_\lambda$, пусто, то полагаем $\chi(g) = 0$.

Пусть $D = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$. Для всякого $1 \leqslant k \leqslant r$ обозначим

$$\lambda_k = \sum_{a=k}^{r} E^*_{\gamma_a}, \quad D_k = \{\gamma_1, \ldots \gamma_k\}.$$

Здесь $\lambda_1 = \lambda_D$ и $D_r = D$. Положим $\lambda_{r+1} = 0$. Заметим, что $\lambda_k$ является суммой элементов дуального базиса $E^*_\gamma$ по всем $\gamma \in D \setminus D_{k-1}$.

Подгруппы $G_k = G_{\lambda_k}$ образуют цепочку $G_\lambda = G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_r \subset G_{r+1} = G$. Определим характер $\chi_k$ группы $G_k$ по формуле $\chi_k = \mathrm{ind}(\xi, G_\lambda, G_k)$. Тогда $\chi_1 = \xi$ — характер подгруппы $G_\lambda = G_1$. Для любого $1 \leqslant k \leqslant r$ имеем $\chi_{k+1} = \mathrm{ind}(\chi_k, G_k, G_{k+1})$. Индукцией по $0 \leqslant k \leqslant r$ докажем формулу

$$\chi_k(g) = \phi(\theta, D_{k-1}, h, D')\varepsilon^{\lambda_k(x_{D'})}. \tag{19}$$

Для $k = 0$ формула (19) верна, так как $\chi_1(g) = \theta(g)\varepsilon^{\lambda(x_{D'})}$. Предположим, что (19) верна для $k$; докажем ее для $k+1$.

Пусть $\gamma = (i,j)$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, — произвольный положительный корень. Обозначим через $P'(\gamma)$ подматрицу матрицы $g-1$ с системой строк $\{i\}\cup[i+1, j-1]$ и столбцов $[i+1, j-1]$. Соответственно $P''(\gamma)$ — подматрица матрицы $g-1$ с системой строк $[i+1, j-1]$ и столбцов $[i+1, j-1] \cup \{j\}$.

Из предположения индукции и формулы (18) вытекает

$$\chi_{k+1}(g) = \phi(\theta, D_{k-1}, h, D')M(\gamma_k, h, D)\varepsilon^{\lambda_{k+1}(x_{D'})}, \tag{20}$$

где

$$M(\gamma_k, h, D) = \delta_0(\gamma_k, h) \sum_{t_i, t_j \in \mathbb{F}_q^*} \varepsilon^{t_i^{-1} t_j} \sum_{(t_i, \overline{x}) P'(\gamma_k) = 0} \varepsilon^{(\overline{x}, \overline{p})}, \tag{21}$$

$\overline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_d)$ — последний столбец подматрицы $P''(\gamma_k)$, $(\overline{x}, \overline{p}) = x_1 p_1 + \ldots + x_d p_d$ и $d = j - i - 1$.

Если существует элемент $\gamma' \in D'$, принадлежащий $\Delta(\gamma_k)$ (т.е. $\delta'(\{\gamma_k\}, h, D') = 0$), то $\mathrm{rank} P(\gamma_k) < \mathrm{rank} P'(\gamma_k)$. Вторая сумма в (21) берется по пустому множеству. Следовательно, $M(\gamma_k, h, D) = 0$.

Если не существует элемента $\gamma' \in D'$, принадлежащего $\Delta(\gamma_k)$ (т.е. $\delta'(\{\gamma_k\}, h, D') = 1$), то первая строка в матрице подматрице $P'(\gamma_k)$ нулевая. Отсюда

$$M(\gamma_k, h, D) = \delta_0(\gamma_k, h) \delta'(\{\gamma_k\}, h, D') \Bigg( \sum_{t_i, t_j \in \mathbb{F}_q^*} \varepsilon^{t_i^{-1} t_j} \Bigg) \Bigg( \sum_{\overline{x} P(\gamma_k) = 0} \varepsilon^{(\overline{x}, \overline{p})} \Bigg). \tag{22}$$

Вычисляем третий множитель $M_3$ из (22):

$$M_3 = \sum_{t_i, t_j \in \mathbb{F}_q^*} \varepsilon^{t_i^{-1} t_j} = \begin{cases} (q-1)^2, & \text{если } \gamma_k \notin D', \\ (q-1)(-1) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда $M_3 = (-1)^{|\{\gamma_k\} \cap D'|} (q-1)^{s(\{\gamma_k\}, D')}$.

Для вычисления четвертого множителя в (22) отметим, что для любого подпространства $W$ имеет место

$$\sum_{\overline{x} \in W} \varepsilon^{(\overline{x}, \overline{p})} = \begin{cases} |W|, & \text{если } \overline{p} \in W^{\perp}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вычисляем четвертый множитель $M_4$ из (22):

$$M_4 = \sum_{\overline{x} P(\gamma_k) = 0} \varepsilon^{(\overline{x}, \overline{p})} = \begin{cases} q^{\mathrm{corank} P(\gamma_k)}, & \text{если } \overline{p} \in \mathrm{Im}(P(\gamma_k)), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда $M_4 = \delta''(\{\gamma_k\}, h, D') q^{m(\{\gamma_k\}, h, D')}$.

Так как

$$\delta_0(\gamma_k, h) \delta'(\{\gamma_k\}, h, D') \delta''(\{\gamma_k\}, h, D') = \delta(\{\gamma_k\}, h, D'),$$

то после подстановки $M_2$ и $M_3$ в (22) получаем

$$M(\gamma_k, h, D) = \delta(\{\gamma_k\}, h, D') (-1)^{|\{\gamma_k\} \cap D'|} (q-1)^{s(\{\gamma_k\}, D')} q^{m(\{\gamma_k\}, h, D')}. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (21), получаем $\chi_{k+1}(g) = \phi(\theta, D_k, h, D') \varepsilon^{\lambda_{k+1}(x_{D'})}$, что доказывает (19) для $k+1$.

Полагая в (19) $k = r + 1$, получаем $\chi(g) = \phi(\theta, D, h, D')$. □

## Список литературы

[1] André C. A. M., *Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group*, J. Algebra **176** (1995), no. 3, 959–1000.

[2] André C. A. M., *Basic character table of the unitriangular group*, J. Algebra **241** (2001), no. 1, 437–471.

[3] André C. A. M., *Hecke algebras for the basic characters of the unitriangular group*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 4, 987–996.

[4] Diaconis P., Isaacs I. M., *Supercharacters and superclasses for algebra groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 5, 2359–2392.

[5] Ning Yan, *Representation theory of finite unipotent linear groups*, Dissertation, 2001, `arXiv:1004.2674`.

[6] Aguiar M. etc., *Supercharacters, symmetric functions in noncommuting variables, and related Hopf algebras*, Adv. Math. **229** (2012), no. 4, 2310–2337.

[7] Hendrickson A. O. F., *Supercharacter theory costructions corresponding to Schur ring products*, Comm. Algebra **40** (2012), no. 12, 4420–4438.

[8] Andrews S., *Supercharacter theory constructed by the method of little groups*, 2014, `arXiv1405.5472`.

[9] Lang A., *Supercharacter theories and semidirect products*, 2014, `arXiv1405.1764`.

[10] Пирс Р., *Ассоциативные алгебры*, Мир, М., 1986.

[11] Дрозд Ю. Н., Кириченко В. В., *Конечномерные алгебры*, Вища школа, Киев, 1980.

[12] Кэртис Ч., Райнер И., *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*, Наука, М., 1969.

[13] Serre J.-P., *Linear representations of finite groups*, Grad. Texts in Math., vol. 42, Springer-Verlag, New York, 1977.

Самарский государственный университет
443011, Самара
ул. Акад. Павлова, 1
Самарский государственный
аэрокосмический университет
им. акад. С. П. Королева
Россия
*E-mail:* `apanov@list.ru`

Поступило 15 мая 2015 г.