Т. Уличевич, Об асимптотике решений в полуцилиндре с граничными условиями смешанного типа для одного нелинейного эллиптического уравнения,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 2, 94–98

Кроме того, для любого $x \in B_r$

$$\|D_{r,\delta}x - x\| \leqslant \sum_{i \in I(x)} b_i(\|\tau(x)\|)\,\|Q_i x - x\| +$$
$$+ b_{N+1}(\|\tau(x)\|)\,\|Q_0 x - x\| \leqslant \rho(x, Y) + \delta,$$

где $I(x) = \{i \in \mathbf{N} \mid i \leqslant N,\ b_i(x) \neq 0\}$. Пусть $\{d_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ — такое разбиение единицы, что $d_{n+1} \equiv 0$ вне $[2^{n-2}, 3 \cdot 2^{n-2}]$ и $d_1 \equiv 0$ вне $[0, 1]$. Положим для любого $x \in \overline{B}_n = 2^{n-1}B_1$ $D_n(x) = 2^{n-1}D_{1,\varepsilon}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)$ и $D_n \equiv 0$ вне $\overline{B}_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Нетрудно видеть, что оператор $R = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(\|\tau(\cdot)\|)D_i$ искомый.

Отметим, что аналогичная задача о гладких ε-выборках для конечномерных подпространств была исследована в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maurey B., Pisier G. Séries de variables aleatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach//Stud. math. 1976. **58.** 45—90.
2. Maurey B. Un théorème de prolongement//C. r. Acad. sci. A. 1974. **279.** 329—332.
3. Царьков И. Г. О глобальном существовании неявной функции//Матем. сб. 1993. **184,** № 7. 79—116.
4. Альбрехт П. В. Об операторах почти наилучшего приближения: Канд. дис. М., 1994.

Поступила в редакцию
12.05.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 517.95

Т. Уличевич

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ В ПОЛУЦИЛИНДРЕ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье изучаются решения уравнения

$$\Delta U(x) - |U|^{p-1}U(x) = 0, \qquad (1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $p = \mathrm{const} > 1$. Такое уравнение исследовалось во многих работах (см., например, [1, 2]). Здесь рассматривается поведение решения уравнения (1) в полуцилиндрической области с граничными условиями смешанного типа на ее боковой поверхности. Кроме того, решение уравнения (1) периодично по переменным $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, а ось x_n совпадает с осью полуцилиндра.

Пусть $S(a, b) = \{x : x \in \mathfrak{R}^n,\ x' \in \omega,\ a < x_n < b\}$, где $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, ω — ограниченная область в $\mathfrak{R}^{n-1}$ с гладкой границей, $\sigma(a, b) = \partial S(a, b) \cap \{x : a < x_n < b\}$.

Теорема. *Пусть* $U(x) \in C^2(S(0, \infty)) \cap C^1(\overline{S(0, \infty)})$ *и* $U(x)$ *— решение уравнения* (1) *с граничным условием*

$$a(x)U(x)+\frac{\partial U}{\partial \nu}=0 \text{ на } \sigma(0,\ \infty), \tag{2}$$

где ν — *внешняя конормаль к* $\sigma(0,\ \infty)$, $a_1 \geqslant a(x) \geqslant a_0$, $a_0=\text{const}>0$, $a_1=\text{const}>0$. *Тогда*

$$|U(x)| \leqslant C \exp\{-\alpha x_n\}, \tag{3}$$

где $\alpha=\text{const}>0$, $C=\text{const}>0$.

Сначала докажем некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть* $U(x) \in C^2(S(0,\ \infty)) \cap C^1(\overline{S(0,\ \infty)})$ *и* $U(x)$ — *решение уравнения* (1) *в* $S(0,\ \infty)$, *удовлетворяющее граничным условиям* (2) *на* $\sigma(0,\ \infty)$. *Тогда* $U(x',\ x_n) \to 0$ *при* $x_n \to \infty$.

Доказательство. В [1] доказана следующая

Лемма. *Пусть* $y(t)$ — *решение уравнения*

$$y''+a_1|y'|^{p_1}+a_2|y'|=f(y),$$

где $a_1=\text{const}\geqslant 0$, $a_2=\text{const}\geqslant 0$, *с начальными условиями* $y(0)=\alpha$, $y'(0)=0$, $\alpha=\text{const}>0$, $f(y)>0$ *при* $y>0$; $f(y) \geqslant a_3 y^p$, $p>1$, $a_3=\text{const}>0$ *при* $y>1$, $p_1=\frac{2p}{1+p}$, *функция* $f(y)$ *непрерывна для всех* y. *Тогда существует* $T(\alpha)$, *такое, что* $y(t)\to\infty$ *при* $t \to T(\alpha)-0$, $y(t)>0$ *и* $y'(t)>0$ *на* $(0,\ T)$, $T<\infty$.

Воспользуемся этой леммой. Предположим, что существует последовательность $\{x_n^k\}_{k=1}^{\infty}$, такая, что $U(x',\ x_n^k)>2\alpha>0$ *при* $x_n^k\to\infty$, где $\alpha=\text{const}>0$.

Рассмотрим функцию $y(x_n-x_n^k)$, построенную в сформулированной лемме. Тогда $y(x_n-x_n^k)\to\infty$ при $x_n-x_n^k \to \pm T$, так как $y(t)$ можно доопределить на интервале $-T<x_n<0$, полагая $y(x_n)=y(-x_n)$. Предположим, что $x_n^k-T>0$, и рассмотрим функцию $W=y-U$ в $S(x_n^k-T,\ x_n^k+T)$. Предположим, что в сформулированной лемме $a_1=a_2=0$ и $f(y)=|y|^{p-1}y$. Поскольку $y(x_n-x_n^k)\to\infty$ при $x_n-x_n^k\to\pm T$, $W(x)\to\infty$ при $x_n-x_n^k\to\pm T$ и $W(x',x_n^k)<0$. Функция $W(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta W=\frac{y^p-|U|^{p-1}U}{y-U}W. \tag{4}$$

Так как $W(x',\ x_n^k)<0$, то существует такая точка $\bar{x}$, принадлежащая $\bar{S}(x_n^k-T,\ x_n^k+T)$, где W имеет отрицательный минимум. Если $\bar{x} \in S(x_n^k-T,\ x_n^k+T)$, то согласно (4) $\Delta W<0$ в точке $\bar{x}$, что невозможно. Если $\bar{x}\in\sigma(x_n^k-T,\ x_n^k+T)$, то в $\bar{x}$ выполнено граничнсе условие (2), но это противоречит известной лемме о производной на границе в точке минимума (см. [3, 4]). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $U(x)$ — *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее граничному условию* (2). *Тогда*

$$|U(x)| \leqslant C\,|x_n|^{\frac{2}{1-p}},$$

где $p>1$, $C=\text{const}>0$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $z=Cx_n^{\frac{2}{1-p}}$. Если постоянную C выбрать достаточно большой, то $z''-z^p\leqslant\leqslant 0$. Пусть $W=z-U$. Функция $W(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\Delta W - \frac{z^p - |U|^{p-1}U}{z-U} W \leqslant 0 \text{ в } S(0, \infty). \tag{5}$$

Докажем, что $W \geqslant 0$ в $S(0, \infty)$. Если $W<0$ в некоторой точке $\overline{S(0, \infty)}$, то так как $W(x) \to 0$ при $x_n \to \infty$, существует точка $\bar{x}$ в $\overline{S(0, \infty)}$, в которой $W(x)$ имеет отрицательный минимум. Точка $\bar{x}$ не может принадлежать $S(0, \infty)$, ибо это противоречит (5). Очевидно, что $W(x) \to \infty$ при $x_n \to 0$. Точка $\bar{x}$ не может принадлежать $\sigma(0, \infty)$, так как $a(x)U(x) + \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0$ на $\sigma(0, \infty)$, а это противоречит лемме о производной в точке минимума на границе (см. [3, 4]). Следовательно, $W(x) \geqslant 0$ и $U(x) \leqslant z$. Аналогично устанавливается, что $U(x) \geqslant -z$. Лемма 2 доказана.

Теперь докажем основную теорему. Пусть функция $\Theta(x_n)$ такова, что $\Theta(x_n)=1$ при $|x_n|<1$, $\Theta(x_n)=0$ при $|x_n|>2$, $0 \leqslant \Theta(x_n) \leqslant 1$, $\Theta(x_n) \in C^\infty(\mathfrak{R}^1)$. Умножим уравнение (1) на $\Theta^2\left(\frac{x_n}{N}\right)U(x)$ и проинтегрируем по $S(\tau, \infty)$, где $\tau=\mathrm{const}>0$, $N=\mathrm{const}>0$, $N>\tau$. Интегрируя по частям, получаем

$$-\int\limits_{S(\tau,\infty)} |\nabla U|^2 \Theta^2(x_n)\,dx - 2\int\limits_{S(\tau,\infty)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\Theta U(x)\,dx +$$
$$+ \int\limits_{\sigma(\tau,\infty)\cup\omega(\tau)} \frac{\partial U}{\partial \nu} U\Theta^2 dS - \int\limits_{S(\tau,\infty)} |U|^{p+1}\Theta^2 dx = 0,$$

где $\omega(\tau) = S(-\infty, +\infty) \cap \{x : x_n = \tau\}$.

Из последнего равенства вытекает, что

$$\int\limits_{S(\tau,\infty)} |\nabla U|^2 \Theta^2(x_n)\,dx + a_0 \int\limits_{\sigma(\tau,\infty)} |U|^2 \Theta^2 dS + \int\limits_{S(\tau,\infty)} |U|^{p+1}\Theta^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \int\limits_{S(\tau,\infty)} |\nabla U|^2 \Theta^2(x_n)\,dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{S(N,2N)} \left|\frac{d\Theta}{dx_n}\right|^2 \left(\frac{1}{N}\right)^2 |U|^2\,dx +$$
$$+ \int\limits_{\omega(\tau)} \frac{\partial U}{\partial \nu} U\Theta^2\,dx', \tag{6}$$

где $\varepsilon=\mathrm{const}>0$. Переходя к пределу в неравенстве (6) при $N \to \infty$, находим

$$C_1 \int\limits_{S(\tau,\infty)} |\nabla U|^2\,dx + a_0 \int\limits_{\sigma(\tau,\infty)} |U|^2 dS \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\omega(\tau)} |\nabla U|^2 dx' +$$
$$+ \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{\omega(\tau)} |U|^2\,dx'. \tag{7}$$

Воспользуемся следующей теоремой вложения:

$$\int\limits_{\omega(\tau)} |U|^2 dx \leqslant C_2 \Big[\int\limits_{\omega(\tau)} |\nabla U|^2 dx' + \int\limits_{\partial\omega(\tau)} |U(x)|^2\,ds \Big], \tag{8}$$

где постоянная C_2 не зависит от U. С помощью неравенств (7) и (8) получаем

$$\int\limits_{S(\tau,\infty)} |\nabla U|^2 dx + \frac{a_0}{C_1} \int\limits_{\sigma(\tau,\infty)} |U|^2 dS \leqslant$$

$$\leqslant C_4\left(\int\limits_{\omega(\tau)} |\nabla U|^2\,dx' + \frac{a_0}{C_1}\int\limits_{\partial\omega(\tau)} |U|^2\,ds\right). \qquad (9)$$

Положим

$$H(\tau,\infty) = \int\limits_{S(\tau,\infty)} |\nabla U|^2\,dx + C_3\int\limits_{\sigma(\tau,\infty)} |U(x)|^2\,dS, \qquad (10)$$

где $C_3 = \frac{a_0}{C_1} = \mathrm{const} > 0$. Тогда неравенство (9) можно записать в виде

$$H(\tau,\infty) \leqslant -C_4\frac{\partial H}{\partial\tau}. \qquad (11)$$

Из (10) и (11) находим

$$\int\limits_{S(\tau,\infty)} |\nabla U|^2\,dx + C_3\int\limits_{\sigma(\tau,\infty)} |U|^2\,dS \leqslant C_5\exp\{-C_4\tau\}, \qquad (12)$$

где $C_j = \mathrm{const} > 0$, $j=4,5$. Теперь рассмотрим $\int\limits_{S(\tau,\tau+1)} |U|^2\,dx$ и оценим его с помощью теоремы вложения:

$$\int\limits_{S(\tau,\tau+1)} |U|^2\,dx \leqslant C\left[\int\limits_{S(\tau,\tau+1)} |\nabla U|^2\,dx + \int\limits_{\sigma(\tau,\tau+1)} |U|^2\,dS\right]. \qquad (13)$$

В силу (12) и (13)

$$\int\limits_{S(\tau,\tau+1)} |U|^2\,dx \leqslant C_6\exp\{-C_4\tau\},$$

где $C_6 = \mathrm{const} > 0$. Для получения оценки (3) воспользуемся теоремой Де Джорджи (см. [5, 6]).

Имеем

$$\max_{S\left(\tau+\frac{1}{3},\,\tau+\frac{2}{3}\right)} |U(x)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_7\left[\int\limits_{S(\tau,\tau+1)} |U|^2\,dx + \left(\int\limits_{S(\tau,\tau+1)} \big||U|^{p-1}|U|\big|^q\,dx\right)^{\frac{2}{q}}\right], \qquad (14)$$

где $q \geqslant n$, $p > 1$, $C_7 = \mathrm{const} > 0$ и $|U(x)| \leqslant C\,|x_n|^{\frac{2}{1-p}}$.

Так как

$$\int\limits_{S(\tau,\tau+1)} |U|^{pq}\,dx \leqslant C_8\int\limits_{S(\tau,\tau+1)} |U|^2\,dx \leqslant C_9\exp\{-C_4\tau\},$$

где $C_j = \mathrm{const} > 0$, $j = 8,9$, то из (14) получаем (3). Теорема доказана.

Поведение периодических по $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ решений уравнения (1) в $S(0,\infty)$ при $x_n \to \infty$ исследуется точно так же, как и в случае граничных условий Неймана на $\sigma(0,\infty)$ (см. [1]). Полученные теоремы аналогичны результатам работы [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Oleinik O. A., Kondratiev V. A. On asymptotic behaviour of solutions of some nonlinear elliptic equation in unbounded domains. Partial differential equations and related subjects//Proc. conf. dedicated to Louis Nirenberg. Longman, 1992. 163—195.
2. Berestycki H., Nirenberg L. Some qualitative properties of solution of semilinear elliptic equations in cylindrical domains//Analysis/Ed. by P. Rabinovitz. N. Y., 1990. 114—164.

3. Олейник О. А. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа//Матем. сб. 1952. **30,** № 3. 695—702.
4. Hopf E. A remark on linear elliptic differential equations of second order//Proc. Amer. Math. Soc. 1952. **3.** 791—793.
5. Giorgi E. de. Sulla differentiabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali// //Mem. Accad. Sci. Torino. 1957. Ser. 3. 1—19.
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1964.

Поступила в редакцию
16.11.95