Е. С. Половинкин, О непрерывной зависимости траекторий дифференциального включения от начальных приближений, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2019, том 25, номер 1, 174–195

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-174-195

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 1 2019

УДК 517.977

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТРАЕКТОРИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ[1]

Е. С. Половинкин

В работе рассмотрено дифференциальное включение с неограниченной правой частью F в случае, когда эта правая часть удовлетворяет условиям измеримой псевдолипшицевости в окрестности некоторой фиксированной траектории $\widehat{x}(\cdot)$. В пространстве абсолютно непрерывных функций доказана теорема о существовании непрерывного отображения из некоторого множества псевдотраекторий, заданных в окрестности траектории $\widehat{x}(\cdot)$, во множество траекторий данного дифференциального включения с оценками, определяемыми множеством псевдотраекторий. Для заданных многозначного отображения F и траектории $\widehat{x}(\cdot)$ определено вариационное дифференциальное включение, график правой части которого является нижним касательным конусом к графику правой части F в точках графика траектории $\widehat{x}(\cdot)$. Доказано существование непрерывного отображения из множества траекторий вариационного дифференциального включения во множество траекторий исходного дифференциального включения с оценками. Эти свойства являются важнейшей частью прямого метода получения необходимых условий оптимальности в задачах с ограничениями в виде дифференциального включения.

Ключевые слова: многозначное отображение, дифференциальное включение, производная многозначного отображения, касательный конус, условия измеримо-псевдолипшицевости многозначного отображения, необходимые условия оптимальности.

E. S. Polovinkin. On the continuous dependence of trajectories of a differential inclusion on initial approximations.

We consider a differential inclusion with an unbounded right-hand side F in the case when this right-hand side satisfies conditions of measurable pseudo-Lipschitzness in a neighborhood of some fixed trajectory $\widehat{x}(\cdot)$. In the space of absolutely continuous functions, we prove a theorem on the existence of a continuous mapping from a certain set of pseudo-trajectories defined in a neighborhood of the trajectory $\widehat{x}(\cdot)$ to a set of trajectories of the differential inclusion with estimates determined by the set of pseudo-trajectories. For the given multivalued mapping F and trajectory $\widehat{x}(\cdot)$, a variational differential inclusion is defined such that the graph of its right-hand side is the lower tangent cone to the graph of the right-hand side F at points of the graph of the trajectory $\widehat{x}(\cdot)$. The existence of a continuous mapping from the set of trajectories of the variational differential inclusion to the set of trajectories of the original differential inclusion is proved with estimates. These properties are an important part of the direct method of deriving necessary optimality conditions in problems with constraints in the form of a differential inclusion.

Keywords: multivalued mapping, differential inclusion, derivative of a multivalued mapping, tangent cone, conditions of measurable pseudo-Lipschitzness of a multivalued mapping, necessary optimality conditions.

MSC: 28B05, 46G10, 49J53, 49K99

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-174-195

Введение

При исследовании необходимых условий оптимальности первого порядка в экстремальных задачах, опирающихся на множество траекторий некоторого дифференциального включения, основное внимание обращается на поведение траекторий дифференциального включения в окрестности траектории, которая подозрительна на экстремум. В данной работе мы исследуем дифференциальные включения с неограниченной правой частью. Если правая часть дифференциального включения может принимать неограниченные значения, то общепринятое условие Липшица в метрике Хаусдорфа становится очень обременительными. Указанные условия можно ослабить и использовать условия псевдолипшицевости, введенные Ж.-П.Обеном

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00209а).

(см. [1]). При таких условиях уже доказаны теоремы существования решения дифференциального включения и теоремы о релаксации (см., например, [2; 3]), получены необходимые условия экстремума в экстремальных задачах с дифференциальным включением (см., например, [4–6]). В статье мы обобщаем результаты статьи [7] со случая дифференциального включения с липщицевой правой частью на случай, когда правая часть дифференциального включения является многозначным отображением с неограниченной правой частью и с псевдолипшицевой зависимостью от фазовой переменной.

В данной работе заданы дифференциальное включение с неограниченной правой частью $F(t,x)$ и некоторая траектория $\widehat{x}(\cdot)$ этого дифференциального включения в случае, когда правая часть F удовлетворяет условиям измеримой псевдолипшицевости в окрестности траектории $\widehat{x}(\cdot)$. В пространстве абсолютно непрерывных функций определено некоторое множество функций (псевдотраекторий) в окрестности заданной траектории $\widehat{x}(\cdot)$ и доказана теорема (теорема 2) о существовании непрерывного отображения из этого множества псевдотраекторий во множество траекторий дифференциального включения с оценками, определяемыми множеством псевдотраекторий. Для заданных многозначного отображения F и траектории $\widehat{x}(\cdot)$ дифференциального включения с правой частью F определено вариационное дифференциальное включение, график правой части которого является нижним касательным конусом к графику правой части исходного дифференциального включения в точках траектории $\widehat{x}(\cdot)$. В теореме 3 доказано существование непрерывного отображения из множества траекторий вариационного дифференциального включения во множество траекторий исходного дифференциального включения с оценками. В результате в теоремах 2 и 3 получены непрерывные отображения во множество траекторий с оценками при более слабых ограничениях, чем ранее это было сделано, например, в работах [3; 8–10]. Такие отображения играют центральную роль в прямом методе исследования экстремальных задач с дифференциальными включениями (см., например, [9; 10]). Результаты данной статьи анонсированы в [11].

1. Основные обозначения и определения

Будем обозначать через $T := [t_0, t_1]$ замкнутый интервал прямой $\mathbb{R}^1$ с обычной мерой Лебега на нем. Как обычно, через $\mathbb{R}^n$ обозначаем n-мерное евклидово пространство, а через E — некоторое сепарабельное банахово пространство с σ-алгеброй борелевских множеств $\mathcal{B}$, через E^* — его сопряженное пространство. Через $B_r(a) := \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$ ($\overline{B_r(a)} := \{x \in E \mid \|x-a\| \le r\}$) обозначаем открытый (замкнутый) шар с центром в точке a радиуса $r > 0$ в пространстве E (или в $\mathbb{R}^n$). Расстояние от точки $x \in E$ до множества $A \subset E$ обозначаем через $\varrho(x, A) := \inf\{\|x-y\| \mid y \in A\}$.

Функцией отклонения Помпейю множества A от другого множества B в пространстве E называется функция вида

$$h^+(A,B) := \inf\{r > 0 \mid A \subset B + B_r(0)\}, \tag{1.1}$$

а *расстоянием Помпейю — Хаусдорфа между множествами A и B* в пространстве E называется функция вида

$$h(A,B) := \max\{h^+(A,B); h^+(B,A)\}.$$

Через $\mathcal{P}(E)$ обозначаем множество всех подмножеств из банахова пространства E, через $\mathcal{F}(E)$ — множество непустых замкнутых подмножеств из пространства E.

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 1 [9, лемма 5.4]. *Для любых множеств $A, B \in \mathcal{F}(E)$ и точки $x \in E$ справедливо неравенство*

$$\varrho(x,A) \le \varrho(x,B) + h^+(B,A). \tag{1.2}$$

Через $AC(T,\mathbb{R}^n)$ обозначаем *линейное нормированное пространство абсолютно непрерывных функций* (или, коротко, *кривых*) из T в $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|f\|_{AC} := \|f(t_0)\|_{\mathbb{R}^n} + \|f'(\cdot)\|_{L^1}$.

2. Специальные свойства непрерывных разбиений

В дальнейшем нам потребуется некоторое свойство непрерывных семейств последовательностей измеримых разбиений как инструмент исследования дифференциальных включений с неограниченной правой частью. В основе этого результата лежат знаменитая теорема А. А. Ляпунова о векторных мерах [12], ее обобщение для сепарабельных банаховых пространств, а также замечательные конструкции ε-сегментов и сегментов для векторной меры (см. работы [13–15]).

Для формулировки результата нам потребуется вспомнить некоторые понятия. В этом разделе считаем, что (S,d) — некоторое сепарабельное метрическое пространство с метрикой d, $T=(T,\mathcal{T},\mu)$ — компактное топологическое пространство с σ-алгеброй измеримых подмножеств $\mathcal{T}$ и с конечной неотрицательной неатомарной мерой Радона μ на них. Для измеримых подмножеств $\mathcal{T}$ пространства T, точнее, для классов эквивалентностей из $\mathcal{T}$, рассмотрим метрику $\operatorname{dist}(A,B):=\mu(A\triangle B)$ $\forall A,B\in\mathcal{T}$, где $A\triangle B$ означает симметрическую разность этих множеств. В дальнейшем мы будем рассматривать непрерывные отображения (см. ниже $A_i: S\to\mathcal{T}$) из метрического пространства (S,d) в метрическое пространство $(\mathcal{T},\operatorname{dist})$.

(*Простым*) открытым покрытием метрического пространства (S,d) называется некоторая совокупность $\{V_\lambda\subset S\}_{\lambda\in\Lambda}$ непустых открытых множеств из (S,d) такая, что $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda=S$ и для любого $\lambda\in\Lambda$ выполнено $V_\lambda\neq S$. Открытое покрытие $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ сепарабельного метрического пространства (S,d) называется *локально конечным*, если для любой точки $s_0\in S$ существует ее окрестность $U(s_0)$ такая, что $V_i\cap U(s_0)\neq\varnothing$ лишь для конечного набора индексов $i\in\mathbb{N}$.

Последовательность $\{p_i: S\to I\}_{i\in\mathbb{N}}$ непрерывных функций из S в единичный интервал $I:=[0,1]$ называется *разбиением единицы, подчиненным некоторому локально конечному открытому покрытию* $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ пространства S, если для любого $i\in\mathbb{N}$ справедливо включение $\operatorname{supp}p_i\subset V_i$ и для любой точки $s\in S$ справедливо равенство $\sum_{i=1}^\infty p_i(s)=1$, причем в силу локальной конечности покрытия $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ лишь конечное число слагаемых в данной сумме отлично от нуля.

Измеримым разбиением пространства T называется последовательность $\{A_i\subset\mathcal{T}\}_{i\in\mathbb{N}}$ измеримых подмножеств таких, что $A_i\cap A_j=\varnothing$ при $\forall i\neq j$ и $\bigcup_{i=1}^\infty A_i=T$, причем для любого $i\in\mathbb{N}$ либо $\mu(A_i)>0$, либо $A_i=\varnothing$.

Пусть при каждом значении параметра $s\in S$ задано измеримое разбиение $\{A_i(s)\}_{i\in\mathbb{N}}$ пространства T. Если при каждом $i\in\mathbb{N}$ отображение $A_i: S\to\mathcal{T}$ непрерывно, то будем говорить, что $\{A_i(s)\}_{i\in\mathbb{N}}$ — *непрерывное семейство измеримых разбиений пространства* T или, кратко, *непрерывное* S*-семейство.*

Непрерывное S-семейство $\{A_i: S\to\mathcal{T}\}_{i\in\mathbb{N}}$ называется *конечнозначным*, если при каждом $s\in S$ множество значений $\{A_i(s)\}_{i\in\mathbb{N}}$ является конечным, в том смысле что $A_i(s)\neq\varnothing$ лишь для конечного набора индексов $i\in\mathbb{N}$.

Следующая теорема является обобщением теоремы 18 из [14].

Теорема 1. *Пусть* $\{\varphi_i\colon S\to L^1(T,E)\}_{i\in\mathbb{N}}$ *— заданная последовательность непрерывных отображений,* $\{V_i\subset S\}_{i\in\mathbb{N}}$ *— локально конечное открытое покрытие метрического пространства* (S,d) *и* $\{p_i: S\to I\}_{i\in\mathbb{N}}$ *— разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Тогда для любого* $\delta>0$ *существует конечнозначное непрерывное* S*-семейство* $\{A_i: S\to\mathcal{T}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *такое, что*

1) *при любых* $s\in S$ *и* $i\in\mathbb{N}$*, для которых* $\mu(A_i(s))>0$*, следует* $p_i(s)>0$*;*

2) *для любого* $s\in S$ *справедливы соотношения*

$$\sum_{i=1}^\infty\left\|p_i(s)\int\limits_T\varphi_i(s)(t)d\mu(t)-\int\limits_{A_i(s)}\varphi_i(s)(t)d\mu(t)\right\|<\delta, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^\infty|\mu(A_i(s))-p_i(s)\mu(T)|<\delta, \tag{2.2}$$

$$\lim_{s'\to s}\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i(s')\triangle A_i(s))=0. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 4 (см. статью Е. С. Половинкин. О некоторых свойствах векторных мер. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1).

Напомним, что *индикаторной функцией множества* $A \subset T$ называется функция $\chi_A : T \to \mathbb{R}^1$ такая, что $\chi_A(t) = 1$ при $t \in A$, и $\chi_A(t) = 0$, если $t \notin A$. Опираясь на приведенную выше теорему 1 и непрерывность по параметру измеримых разбиений отрезка T, получаем следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть для каждого $s \in S$ и $i \in \mathbb{N}$ заданы измеримые подмножества $A_i(s)$ компактного пространства T такие, что для любого $s \in S$ справедливы соотношения*

$$\begin{cases} A_{i_1}(s)\cap A_{i_2}(s)=\varnothing \ \forall i_1\neq i_2;\ T=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i(s);\\ \lim\limits_{s'\to s}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(A_i(s')\triangle A_i(s))=0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Пусть $\{v_i \in\in L^1(T,E)\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций, для которых существует функция $k \in L^1(T,\mathbb{R}^1_+)$ такая, что для всех $i \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $\|v_i(t)\| \le k(t)$ при п.в. $t \in T$. Определим отображение $g\colon S \to L^1(T,E)$ по формуле

$$g(s)(t) := \sum_{i=1}^{\infty}\chi_{A_i(s)}(t)v_i(t), \quad t\in T. \tag{2.5}$$

Тогда отображение g непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству предложения 2 (см. статью Е. С. Половинкин. О некоторых свойствах векторных мер. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1).

3. Многозначные отображения. Дифференциальные включения

В этом разделе мы сформулируем условия измеримой псевдолипшицевости многозначного отображения около некоторой траектории соответствующего дифференциального включения.

Мы опять полагаем, что $T := [t_0,t_1]$ — интервал из $\mathbb{R}^1$ с σ-алгеброй $\mathcal{L}$ измеримых по Лебегу подмножеств и с мерой Лебега μ на них. Напомним, что (многозначное) отображение $P : T \to \mathcal{P}(E)$ называется *$\mathcal{L}$-измеримым* (или просто измеримым) тогда и только тогда, когда $P^-(G) := \{t \in T \mid P(t)\cap G \neq \varnothing\} \in \mathcal{L}$ для любого открытого множества $G \subset E$. (Многозначное) отображение $P\colon T\times E \to \mathcal{P}(E)$ называется *$\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-измеримым*, если $P^-(G) := \{(t,x) \in T\times E \mid P(t,x)\cap G \neq \varnothing\} \in \mathcal{L}\times\mathcal{B}$ для любого открытого множества $G \subset E$.

Пусть задано некоторое (многозначное) отображение $F\colon T\times E \to \mathcal{P}(E)$. Тогда *эффективным множеством* отображения F называется множество $\operatorname{Dom} F := \{(t,x) \mid F(t,x) \neq \varnothing\}$. *Графиком* этого отображения называется множество $\operatorname{Graph} F := \{(t,x,y) \in T\times E\times E \mid y \in F(t,x),\ (t,x) \in \operatorname{Dom} F\}$. Сечением графика $\operatorname{Graph} F$ в точке $t \in T$ называется множество $\operatorname{Graph} F(t,\cdot) := \{(x,y) \in E\times E \mid y \in F(t,x),\ (t,x) \in \operatorname{Dom} F\}$.

Для отображения $F\colon T\times\mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим соответствующее *дифференциальное включение* вида

$$\frac{dx}{dt} \in F(t,x), \quad t\in T. \tag{3.1}$$

F-траекторией (или просто *траекторией*) дифференциального включения (3.1) на отрезке T называется всякая абсолютно непрерывная функция (кривая) $x \in AC(T, \mathbb{R}^n)$, у которой производная функция $x' := \dfrac{dx}{dt}\colon T \to \mathbb{R}^n$ является суммируемой ветвью отображения $F(\cdot, x(\cdot))\colon T \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $C_0 \subset \mathbb{R}^n$. Через $\mathcal{R}_T(F, C_0)$ будем обозначать множество всех F-траекторий $x\colon T \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих начальным условиям $x(t_0) \in C_0$.

Сформулируем основные условия на многозначное отображение F, которые обеспечат хорошие свойства дифференциального включения (3.1).

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы некоторое множество $C_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ и некоторая траектория $\widehat{x} \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$, которую будем рассматривать в качестве "тестовой" функции. В качестве такой тестовой функции может выступать, например, решение некоторой экстремальной задачи, содержащей в своих условиях дифференциальное включение.

Опираясь на определения 2 и 3 об измеримой псевдолипшицевости многозначного отображения из [3] и на определения 2.3.1 и 2.3.2 о псевдолипшицевости и умеренном росте из работы [4], мы сформулируем и в дальнейшем используем уточненные условия измеримой псевдолипшицевости на отображение F около тестовой траектории $\widehat{x}$.

Гипотеза 0 (измеримость). *Отображение $F : T \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ является $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-измеримым, и для каждого $t \in T$ множество* $\operatorname{Graph} F(t, \cdot)$ *замкнуто.*

Гипотеза 1 (псевдолипшицевость). *Пусть существуют число $\varepsilon \in (0,1)$, функция $l \in L^1(T, \mathbb{R}^1)$, $l(t) > 0$ п.в., и измеримая функция $R : T \to \mathbb{R}^1_+ \cup (+\infty)$ такие, что при п.в. $t \in T$ и любых x_1, $x_2 \in B_\varepsilon(\widehat{x}(t))$ справедливо включение*

$$G(t, x_1) \subset F(t, x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}, \tag{3.2}$$

где по определению

$$G(t, x) := F(t, x) \cap (\widehat{x}'(t) + R(t)B_1(0)) \quad \forall t \in T, \quad x \in B_\varepsilon(\widehat{x}(t)). \tag{3.3}$$

Гипотеза 2 (невырожденность). Для функций l и R, определенных в гипотезе 1, существует число $\nu \in (0, 1/\varepsilon)$ такое, что справедливо неравенство $l(t) \le \nu R(t)$ п.в.

З а м е ч а н и е 1. Свойство невырожденности (гипотеза 2) вместе со свойством псевдолипшицевости (гипотеза 1) при условии, что справедливо неравенство $\varepsilon\nu < 1$, гарантирует непустоту множеств $G(t, x)$ из (3.3) при всех $t \in T$ и $x \in B_\varepsilon(\widehat{x}(t))$.

В самом деле, для любых $t \in T$ и $x \in B_\varepsilon(\widehat{x}(t))$, выбирая в неравенстве (3.2) $x_1 = \widehat{x}(t)$ и $x_2 = x$, получаем из включений $\widehat{x}'(t) \in G(t, \widehat{x}(t))$ и (3.2), что существует $y \in F(t, x)$, для которого справедливо неравенство $\|y - \widehat{x}'(t)\| \le l(t)\|\widehat{x}(t) - x\| \le l(t)\,\varepsilon < R(t)$, т. е. $y \in G(t, x)$.

О п р е д е л е н и е 1. Говорим, что отображение F: $T \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию измеримой псевдолипшицевости около траектории $\widehat{x}(\cdot)$, если существуют числа $\nu > 0$, $\varepsilon \in \left(0, \min\left\{1; \dfrac{1}{\nu}\right\}\right)$, функции l и R такие, что гипотезы 0–2 выполнены.

Определим вспомогательные функции

$$b(\varepsilon) := \min\left\{3\varepsilon; \frac{1}{\nu}\right\}, \quad m(t) := \int\limits_{t_0}^{t} l(\tau)d\tau, \quad t \in T. \tag{3.4}$$

З а м е ч а н и е 2. Всюду в дальнейшем считаем, что заданы множество $C_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, отображение F, удовлетворяющее условию измеримой псевдолипшицевости около заданной траектории $\widehat{x}$ (см. определение 1) с заданными параметрами $\nu > 0$, $0 < \varepsilon < \min\left\{1; \dfrac{1}{\nu}\right\}$, $l(\cdot)$, $R(\cdot)$, а также заданы вспомогательные $b(\varepsilon)$, $m(\cdot)$ (см. (3.4)) и отображение G (см. (3.3)). Более того, без ограничения общности в дальнейшем полагаем, что

$$l(t) \ge 1 \quad \text{п. в. } t \in T. \tag{3.5}$$

Поясним последнее. Если заданная в гипотезе 1 функция Липшица l не удовлетворяет неравенству (3.5), то исследуемую задачу с дифференциальным включением (3.1), имеющим измеримую псевдолипшицевую правую часть F около траектории $\widehat{x}(\cdot)$, можно привести к эквивалентной задаче с другим дифференциальным включением, у которого правая часть является некоторой другой измеримой псевдолипшицевой многозначной функцией $\widetilde{F}$ с константой Липшица $\widetilde{l}(t) = 1$ п.в.

Для этого вначале нужно преобразовать дифференциальное включение (3.1) так, чтобы траектория $\widehat{x}(\cdot)$ преобразовалась в нулевую, т. е. рассмотреть дифференциальное включение с правой частью вида

$$\widehat{F}(t, x) := (F(t, x + \widehat{x}(t)) - \widehat{x}'(t)), \quad x \in B_\varepsilon(0), \quad \text{п.в. } t \in [t_0, t_1].$$

Затем нужно сделать замену шкалы времени $s = m(t)$, где $m(t) := \displaystyle\int_{t_0}^{t} l(r)dr$, при этом каждая кривая x преобразуется в кривую y по формуле $y(s) = x(t) = x(m^{-1}(s))$, $s \in [0, m(t_1)]$. Таким образом, получаем взаимно однозначное соответствие между кривыми x на $[t_0, t_1]$ и кривыми y на $[0, m(t_1)]$. Более того, кривая x является $\widehat{F}$ траекторией тогда и только тогда, когда кривая y является траекторией включения с правой частью $\widetilde{F}$, определяемой по формуле

$$\widetilde{F}(s, y) := \frac{1}{l(t)} \widehat{F}(t, y), \quad t = m^{-1}(s).$$

Отсюда следует, что кривая $\widetilde{y} \equiv 0$, соответствующая кривой $\widehat{x}$, является тестовой функцией для преобразованной задачи с $\widetilde{F}$. При этом полученная многозначная функция $\widetilde{F}$ удовлетворяет условию измеримой псевдолипшицевой около $\widetilde{y} \equiv 0$ с функцией Липшица $\widetilde{l}(s) = 1$ п.в. и с функцией $\widetilde{R}(s) = \dfrac{R(t)}{l(t)}$, $t = m^{-1}(s)$.

4. Теорема существования траекторий, непрерывно зависящих от начальных приближений

В данном разделе докажем теорему о непрерывной зависимости траекторий дифференциального включения (3.1) от начальных приближений при условии, что правая часть дифференциального включения удовлетворяет условию измеримой псевдолипшицевости около траектории $\widehat{x} \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ (см. определение 1). Для этого вначале мы сформулируем некоторые определения и докажем леммы 1–3.

В пространстве $AC(T, \mathbb{R}^n)$ определим следующее множество начальных приближений (псевдо-траекторий) дифференциального включения (3.1) в малой окрестности траектории $\widehat{x}$.

О п р е д е л е н и е 2. Для произвольных параметра $\gamma \in (0, 1]$ и функции $\rho_0 \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ определим множество

$$D_0(F, \rho_0, \gamma) := \Big\{ x \in AC(T, \mathbb{R}^n) \mid \|x - \widehat{x}\|_{AC} \le \frac{\varepsilon}{4};$$

$$\varrho(x'(t), F(t, x(t))) \le \rho_0(t); \|x'(t) - \widehat{x}'(t)\| \le \frac{\gamma}{2} \, b(\varepsilon) \, l(t) \text{ п.в. } t \in T \Big\}. \tag{4.1}$$

Лемма 1. *Пусть заданы параметр $\gamma \in (0, 1]$ и функция $\rho_0 \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$, удовлетворяющая неравенству $0 \le \rho_0(t) \le \gamma \dfrac{l(t)}{2\nu}$ при п.в. $t \in T$. Тогда для любого $x_0 \in C_0$ такого, что $\|x_0 - \widehat{x}(t_0)\| < \delta_0$, где $\delta_0 := \min\left\{\dfrac{1}{2\nu}; \dfrac{\varepsilon}{4}\right\} \gamma \, e^{-m(t_1)}$, существует функция $x \in D_0(F, \rho_0, \gamma)$ такая, что $x(t_0) = x_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При п.в. $t \in T$ и любом $x \in B_{\varepsilon/2}(\widehat{x}(t))$ определим множество

$$\widetilde{F}(t,x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \varrho(y, F(t,x)) \le \rho_0(t)\}.$$

Опираясь на гипотезы 1 и 2 (см. также замечание 1), легко проверить, что множества $\widetilde{F}(t,x) \cap (\widehat{x}'(t) + \rho_0(t)B_1(0))$ не пусты. Также очевидно включение

$$\widetilde{F}(t,x) \cap (\widehat{x}'(t) + \rho_0(t)B_1(0)) \subset F(t,x) \cap (\widehat{x}'(t) + 2\rho_0(t)B_1(0)) + \rho_0(t)\overline{B_1(0)}.$$

Так как $2\rho_0(t) \le R(t)$, то в силу гипотезы 1 для любых $x, y \in B_{\varepsilon/2}(\widehat{x}(t))$ справедливо включение

$$F(t,x) \cap (\widehat{x}'(t) + 2\rho_0(t)B_1(0)) \subset G(t,x) \subset F(t,y) + l(t)\|x-y\|\overline{B_1(0)},$$

откуда, учитывая предыдущее включение, получаем

$$\widetilde{F}(t,x) \cap (\widehat{x}'(t) + \rho_0(t)B_1(0)) \subset \widetilde{F}(t,y) + l(t)\|x-y\|\overline{B_1(0)}.$$

Последнее включение означает, что отображение $\widetilde{F}$ само является измеримым псевдолипшицевым около тестовой функции $\widehat{x} \in \mathcal{R}_T(\widetilde{F}, C_0)$ на множестве $W = \{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid x \in B_{\varepsilon/2}(\widehat{x}(t))\}$. Для него по теореме существования $\widetilde{F}$-траектории (т. е. по теореме 1 из работы [3]) при выборе в ней параметра $\beta = 0$ для любого $x_0 \in B_{\delta_0}(\widehat{x}(t_0)) \cap C_0$ существует траектория $x \in \mathcal{R}_T(\widetilde{F}, C_0)$ такая, что $x(t_0) = x_0$, $\|x(t) - \widehat{x}(t)\| \le \xi_0(t)$, $\|x'(t) - \widehat{x}'(t)\| \le \eta_0(t)$ при п.в. $t \in T$, где $\xi_0(t) = \delta_0\, e^{m(t)}$, $\eta_0(t) = l(t)\,\xi_0(t)$. В силу выбора значения δ_0 и в силу гипотезы 2 получаем, что $\xi_0(t) \le \dfrac{\varepsilon}{4}$ и $\eta_0(t) \le \dfrac{1}{2\nu}\, l(t) < R(t)$, т. е. $\|x - \widehat{x}\|_{AC} \le \dfrac{\varepsilon}{4}$ и $\|x'(t) - \widehat{x}'(t)\| \le \dfrac{\gamma}{2}\, b(\varepsilon)\, l(t)$ при п.в. $t \in T$. В свою очередь, включение $x \in \mathcal{R}_T(\widetilde{F}, C_0)$ влечет неравенство $\varrho(x'(t), F(t, x(t))) \le \rho_0(t)$ при п.в. $t \in T$. В итоге доказали, что $x \in D_0(F, \rho_0, \gamma)$. □

З а м е ч а н и е 3. В частности, из леммы 1 следует, что при $\rho_0(t) = 0$ и $\gamma = 1$ для каждого $x_0 \in B_{\delta_0}(\widehat{x}(t_0))$ существует траектория $x \in \mathcal{R}_T(F, x_0)$ дифференциального включения такая, что $\|x - \widehat{x}\|_{AC} \le \dfrac{\varepsilon}{4}$. Таким образом, из гипотез 1 и 2 следует, что траектория $\widehat{x}$ не является изолированной во множестве $\mathcal{R}_T(F, C_0)$ в случае, когда $C_0 \cap B_{\delta_0}(\widehat{x}(t_0)) \ne \{\widehat{x}(t_0)\}$.

В дальнейшем будем рассматривать два параметра $\gamma \in (0,1]$ и $a \in (0, \varepsilon]$. Для любых $\gamma \in (0,1]$, $a \in (0,\varepsilon]$ и функции $\rho_0 \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ определим последовательность $\{\rho_k \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)\}_{k\in\mathbb{N}}$ функций и последовательность $\{\vartheta_k \in \mathbb{R}^1_+\}_{k\in\mathbb{N}}$ чисел по формулам

$$\rho_k(t) := l(t)\biggl(\vartheta_k + \int\limits_{t_0}^{t} \rho_{k-1}(\tau)d\tau\biggr), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.2}$$

где

$$\vartheta_k := \gamma\, \frac{b(a)}{2^{k+3}}\, e^{-2m(t_1)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad b(a) := \min\Bigl\{3\,a;\ \frac{1}{\nu}\Bigr\}. \tag{4.3}$$

Лемма 2. *Для любой функции* $\rho_0 \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ *функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k(t)$, *порожденный последовательностью* (4.2), (4.3), *поточечно сходится и при п.в.* $t \in T$ *справедливы оценки*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k(t) \le l(t)\biggl(\frac{\gamma}{8}\, b(a) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{m(t)-m(\tau)} \rho_0(\tau)d\tau\biggr), \tag{4.4}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \biggl(\vartheta_{k+1} + \int\limits_{t_0}^{t} \rho_k(\tau)d\tau\biggr) \le \frac{\gamma}{8}\, b(a) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{m(t)-m(\tau)}\, \rho_0(\tau)d\tau. \tag{4.5}$$

В частности, если функция ρ_0 удовлетворяет неравенству

$$\rho_0(t) \leq \frac{\gamma}{8} b(\varepsilon)\, e^{-m(t_1)}\, l(t) \quad \text{п.в. } t \in T, \tag{4.6}$$

то справедливы оценки

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \rho_k(t) \leq \frac{3\gamma}{8}\, b(\varepsilon)\, l(t) \quad \text{п.в. } t \in T, \tag{4.7}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Bigl(\vartheta_{k+1} + \int\limits_{t_0}^{t} \rho_k(\tau) d\tau\Bigr) \leq \frac{\gamma}{4} b(\varepsilon) \leq \frac{3}{4}\varepsilon, \tag{4.8}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Bigl(\rho_k(t) + \frac{\vartheta_{k+1}}{4}\Bigr) \leq \frac{\gamma}{2} b(\varepsilon)\, l(t) \quad \text{п.в. } t \in T. \tag{4.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле (4.2) при $k = 2$, делая замену порядка интегрирования, получаем

$$\vartheta_2 + \int\limits_{t_0}^{t} \rho_1(\tau) d\tau = \vartheta_2 + \int\limits_{t_0}^{t} \Bigl(l(\tau)(\vartheta_1 + \int\limits_{t_0}^{\tau} \rho_0(\alpha) d\alpha)\Bigr) d\tau = \vartheta_2 + m(t)\vartheta_1 + \int\limits_{t_0}^{t} (m(t) - m(\tau))\, \rho_0(\tau)\, d\tau,$$

$$\rho_2(t) = l(t)\Bigl(\vartheta_2 + m(t)\vartheta_1 + \int\limits_{t_0}^{t} (m(t) - m(\tau))\, \rho_0(\tau)\, d\tau\Bigr).$$

Продолжая аналогичные рассуждения, из формулы (4.2) для любого $k \in \mathbb{N}$ по индукции получаем

$$\vartheta_k + \int\limits_{t_0}^{t} \rho_{k-1}(\tau)\, d\tau = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(m(t))^i}{i!} \vartheta_{k-i} + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(m(t) - m(\tau))^{k-1}}{(k-1)!}\, \rho_0(\tau)\, d\tau, \tag{4.10}$$

$$\rho_k(t) = l(t)\Bigl(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(m(t))^i}{i!} \vartheta_{k-i} + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(m(t) - m(\tau))^{k-1}}{(k-1)!}\, \rho_0(\tau)\, d\tau\Bigr). \tag{4.11}$$

В силу (4.3) при любом $t \in T$ имеем оценку

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(m(t))^i}{i!} \vartheta_{k-i} = \gamma \frac{b(a)}{2^{k+3}} e^{-2m(t_1)} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(2m(t))^i}{i!} < \gamma \frac{b(a)}{2^{k+3}},$$

Из этой оценки и из формул (4.10), (4.11) получаем сходимость рядов и оценки (4.4) и (4.5).

Если функция ρ_0 удовлетворяет неравенству (4.6), то легко показать, что

$$\int\limits_{t_0}^{t} e^{m(t)-m(\tau)}\, \rho_0(\tau)\, d\tau \leq \frac{\gamma}{8} b(\varepsilon),$$

откуда и из оценок (4.4) и (4.5) получаем неравенства (4.7) и (4.8). В свою очередь, из неравенств (4.7), (3.5) и оценки $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \vartheta_{k+1} < \frac{\gamma}{8} b(\varepsilon) \leq \frac{\gamma}{8} b(\varepsilon)\, l(t)$ выводим неравенство (4.9). $\square$

О п р е д е л е н и е 3. Пусть заданы параметры $\gamma \in (0,1]$ и $a \in (0,\varepsilon]$, функции ρ_k и числа ϑ_k определены соотношениями (4.2), (4.3), (4.6). При каждом $k \in \mathbb{N}$ определим множество

$$D_k(F,\rho_k,\gamma) := \Big\{ x \in AC(T,\mathbb{R}^n) \mid \varrho(x'(t), F(t,x(t))) \le \rho_k(t) \text{ п.в.};$$

$$\|x-\widehat{x}\|_{AC} \le \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{l=0}^{k-1} \Big(\vartheta_{l+1} + \int_{t_0}^{1} \rho_l(\tau)d\tau \Big);$$

$$\|x'(t)-\widehat{x}'(t)\| \le \frac{\gamma}{2}\, b(\varepsilon)\, l(t) + \sum_{l=0}^{k-1} \Big(\frac{1}{4}\vartheta_{l+1} + \rho_l(t) \Big) \text{ п.в.} \Big\}. \tag{4.12}$$

Лемма 3. *При любом $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ для любого $x \in D_k(F,\rho_k,\gamma)$ множества $G(t,x(t))$ не пусты, справедливо неравенство $\|x-\widehat{x}\|_{AC} \le \varepsilon$ и при п.в. $t \in T$ справедливы оценка и следующие равенства:*

$$\|x'(t)-\widehat{x}'(t)\| \le \gamma\, b(\varepsilon)\, l(t) \le R(t); \tag{4.13}$$

$$\varrho(x'(t),\, F(t,x(t))) = \varrho(x'(t),\, G(t,x(t))); \tag{4.14}$$

$$F(t,x(t)) \cap (x'(t) + r(t)\overline{B_1(0)}) = G(t,x(t)) \cap (x'(t) + r(t)\overline{B_1(0)}), \tag{4.15}$$

где $r(t) := \varrho(x'(t),\, F(t,x(t))) + \dfrac{1}{4}\vartheta_{k+1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем число $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ и кривую $x \in D_k(F,\rho_k,\gamma)$. Неравенство $\|x-\widehat{x}\|_{AC} \le \varepsilon$ очевидно следует из второго неравенства в (4.12) и неравенства (4.8). Из неравенства (4.9) и последнего неравенства в (4.12) следует неравенство (4.13).

В силу включения $F(t,x) \supset G(t,x)$ получаем, что неравенство $\le$ в (4.14) и включение $\supset$ в (4.15) очевидны.

Зафиксируем почти любое $t \in T$, при котором определены $F(t,x(t))$ и производные $x'(t)$ и $\widehat{x}'(t)$. Докажем неравенство $\ge$ в (4.14). Для любого $\delta \in \Big(0, \dfrac{1}{4}\vartheta_{k+1}\Big)$ по определению расстояния от точки до множества существует $z_\delta \in F(t,x(t))$ такое, что

$$\|x'(t)-z_\delta\| \le \varrho(x'(t), \quad F(t,x(t))) + \delta < \rho_k(t) + \frac{1}{4}\vartheta_{k+1}.$$

Тогда из этого неравенства, неравенства (4.9), из неравенства треугольника и из последнего неравенства в (4.12) получаем

$$\|\widehat{x}'(t)-z_\delta\| \le \|\widehat{x}'(t)-x'(t)\| + \rho_k(t) + \frac{1}{4}\vartheta_{k+1} \le \gamma\, b(\varepsilon)\, l(t) \le R(t).$$

Отсюда следует, что $z_\delta \in G(t,x(t))$. Поэтому

$$\varrho(x'(t),\, G(t,x(t))) \le \|x'(t)-z_\delta\| \le \varrho(x'(t), \quad F(t,x(t))) + \delta.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta \downarrow 0$, получаем неравенство $\ge$ в (4.14).

Докажем включение $\subset$ в (4.15). Так как левое множество в (4.15) по построению не пусто, то выберем в нем произвольную точку z, для которой имеем $z \in F(t,x(t))$ и $\|z-x'(t)\| \le r(t)$. Тогда по неравенству треугольника и из последнего неравенства в (4.12) получаем

$$\|\widehat{x}'(t)-z\| \le \|\widehat{x}'(t)-x'(t)\| + \rho_k(t) + \frac{1}{4}\vartheta_{k+1} < R(t).$$

Отсюда следует, что $z \in (\widehat{x}'(t) + R(t)B_1(0))$, т. е. $z \in G(t,x(t))$, в итоге $z \in G(t,x(t)) \cap (x'(t) + r(t)\overline{B_1(0)})$. Включение $\subset$ в (4.15) доказано. □

Лемма 4. *Зафиксируем число $k \in \mathbb{N}$, множество $S := D_{k-1}(F, \rho_{k-1}, \gamma)$ из (4.12) и число $\vartheta = \vartheta_k$ из (4.3). Пусть множество $S \setminus \{\widehat{x}\}$ не пусто. Тогда и множество $D_k(F, \rho_k, \gamma) \setminus \{\widehat{x}\}$ не пусто, причем существует непрерывное отображение $f : D_{k-1}(F, \rho_{k-1}, \gamma) \to D_k(F, \rho_k, \gamma)$ такое, что для любого $x \in S$ при всех $t \in T$ справедливы неравенства*

$$\int_{t_0}^{t} \|\frac{d}{d\tau} f(x)(\tau) - x'(\tau)\| d\tau \leq \frac{3}{4}\vartheta + \int_{t_0}^{t} \varrho(x'(\tau), F(\tau, x(\tau))) d\tau, \tag{4.16}$$

$$\int_{t_0}^{t} \varrho(\frac{d}{d\tau} f(x)(\tau), F(\tau, f(x)(\tau))) d\tau \leq \frac{\vartheta}{8} + \int_{t_0}^{t} l(\tau) \|f(x)(\tau) - x(\tau)\| d\tau. \tag{4.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В банаховом пространстве $AC(T, \mathbb{R}^n)$ обозначим

$U_r(x) := \{z \in AC(T, \mathbb{R}^n) \mid \|z - x\|_{AC} < r\}$ — открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в x.

Пусть $\alpha := \dfrac{\vartheta}{8(m(t_1) + 1)}$. В силу паракомпактности пространства $AC(T, \mathbb{R}^n)$ существует локально конечное покрытие $\{U_\alpha(z_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ множества $S := D_{k-1}(F, \rho_{k-1}, \gamma)$ шарами с центрами в некоторых точках $z_i \in S$. Также существует разбиение единицы $\{p_i \colon S \to I\}_{i \in \mathbb{N}}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha(z_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ множества S.

Определим последовательность $\{\varphi_i \colon S \to L^1(T, \mathbb{R}^1_+)\}_{i \in \mathbb{N}}$ отображений таких, что для любых $i \in \mathbb{N}$ и $x \in S$ имеем

$$\varphi_i(x)(t) := \|x'(t) - z_i'(t)\| \quad \text{п.в. } t \in T. \tag{4.18}$$

Легко проверить, что каждое отображение φ_i: $S \to L^1(T, \mathbb{R}^1)$ непрерывно. Также для каждого $i \in \mathbb{N}$ определим функцию $r_i : T \to \mathbb{R}^1_+$ вида

$$r_i(t) := \varrho(z_i'(t), F(t, z_i(t))) + \frac{1}{4}\vartheta, \quad t \in T. \tag{4.19}$$

В силу леммы 3 для любого $i \in \mathbb{N}$ и для почти любого $t \in T$ множества $G(t, z_i(t))$ не пусты и справедливы равенства

$$r_i(t) = \varrho(z_i'(t), G(t, z_i(t))) + \frac{1}{4}\vartheta, \tag{4.20}$$

$$F(t, z_i(t)) \cap (z_i'(t) + r_i(t)\overline{B_1(0)}) = G(t, z_i(t)) \cap (z_i'(t) + r_i(t)\overline{B_1(0)}). \tag{4.21}$$

Для любой функции $z_i \in S$ из определения 3 следует, что $\|z_i - \widehat{x}\|_{AC} < \varepsilon$, поэтому из условий на отображение F (см. гипотезы 0, 1) и равенства (4.19) получаем, что каждая функция r_i : $T \to \mathbb{R}^1$ измерима, а в силу оценки $r_i(t) \leq \rho_{k-1}(t) + \dfrac{1}{4}\vartheta$ получаем, что $r_i \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$. Из равенства (4.21), измеримости $z_i', r_i, F(\cdot, z_i(\cdot))$ следует, что отображение

$$Q_i(t) := F(t, z_i(t)) \cap (z_i'(t) + r_i(t)\overline{B_1(0)}) \quad \text{п.в. } t \in T$$

принимает непустые замкнутые значения и каждое отображение $Q_i : T \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ является измеримым.

По теореме об измеримом выборе [16] при любом $i \in \mathbb{N}$ существует измеримая функция $v_i : T \to \mathbb{R}^n$ такая, что $v_i(t) \in Q_i(t)$ при п. в. $t \in T$, и справедливы неравенства

$$\|z_i'(t) - v_i(t)\| \leq r_i(t) \quad \text{п.в. } t \in T. \tag{4.22}$$

Это значит, что $v_i \in L^1(T, \mathbb{R}^n)$.

Так как из равенства (4.21) следует включение $v_i(t) \in G(t, z_i(t))$, то очевидна оценка

$$\|v_i(t) - \widehat{x}'(t)\| < R(t) \quad \text{п.в.}$$

Получим более точную оценку этой величины. Во-первых, мы имеем

$$\|v_i(t)-\widehat{x}'(t)\| \le \|v_i(t)-z_i'(t)\| + \|z_i'(t)-\widehat{x}'(t)\| \le \rho_{k-1}(t)+\frac{1}{4}\vartheta+\|z_i'(t)-\widehat{x}'(t)\|.$$

Далее, по определению 3 из включения $z_i \in S := D_{k-1}(F,\rho_{k-1},\gamma)$ следует неравенство

$$\|z_i'(t)-\widehat{x}'(t)\| \le \frac{\gamma}{2}\,b(\varepsilon)\,l(t)+\sum_{l=0}^{k-2}\Bigl(\frac{1}{4}\vartheta_{l+1}+\rho_l(t)\Bigr) \ \text{ п.в. } t\in T.$$

Подставляя последнее неравенство в предыдущее и учитывая, что в нем $\vartheta=\vartheta_k$, получаем

$$\|v_i(t)-\widehat{x}'(t)\| \le \frac{\gamma}{2}\,b(\varepsilon)\,l(t)+\sum_{l=0}^{k-1}\Bigl(\frac{1}{4}\vartheta_{l+1}+\rho_l(t)\Bigr) \ \text{ п.в. } t\in T. \tag{4.23}$$

Теперь мы готовы применить теорему 1. Мы имеем $T=[t_0,t_1]$, множество $S:=D_{k-1}(F,\rho_{k-1},\gamma)$, последовательность $\{\varphi_i\colon S\to L^1(T,\mathbb{R}^1_+)\}_{i\in\mathbb{N}}$ отображений (4.18), покрытие $\{U_\alpha(z_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ множества S шарами и разбиение единицы $\{p_i\colon S\to I\}_{i\in\mathbb{N}}$, подчиненное покрытию. С учетом выбора параметра $\delta:=\vartheta/8$ по теореме 1 существует непрерывное S-семейство $\{A_i\colon S\to\mathcal{L}\}_{i\in\mathbb{N}}$ такое, что справедливы выражения (2.1)–(2.3). При этом для каждой кривой $x\in S$ последовательность $\{A_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ измеримых подмножеств из T является измеримым разбиением множества T, оно является конечнозначным, и каждое отображение $A_i\colon S\to\mathcal{L}$ непрерывно.

Определим отображение $g\colon S\to L^1(T,\mathbb{R}^n)$, которое для любого $x\in S$ принимает вид

$$g(x)(t) := \sum_{i=1}^{+\infty}\chi_{A_i(x)}(t)v_i(t) \quad \text{п.в. } t\in T. \tag{4.24}$$

Так как из неравенств (4.23) и (4.9) следует оценка $\|v_i(t)-\widehat{x}'(t)\| \le \gamma\, b(\varepsilon)\, l(t)$, то последовательность функций $\{v_i\in L^1(T,\mathbb{R}^n)\}_{i\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничена суммируемой функцией. Кроме того, по теореме 1 справедливо равенство (2.3), означающее усиленную непрерывность последовательности $\{A_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ измеримых разбиений T. То есть выполнены все условия предложения 2, в силу которой отображение g, определенное в (4.24), непрерывно.

Зафиксируем произвольную функцию $x^*\in S$. Так как последовательность $\{A_i(x^*)\}_{i\in\mathbb{N}}$ является измеримым разбиением отрезка T, то для всякого момента $t\in T$ существует номер $i^*\in\mathbb{N}$ такой, что $t\in A_{i^*}(x^*)$ и $\mu(A_{i^*}(x^*))>0$. При этом по определению отображения g (4.24) следует равенство $g(x^*)(t)=v_{i^*}(t)$. Отсюда в силу предложения 1 и гипотезы 1 получаем

$$\varrho(g(x^*)(t),F(t,x^*(t))) = \varrho(v_{i^*}(t),F(t,x^*(t)))$$

$$\le \varrho(v_{i^*}(t),G(t,z_{i^*}(t))) + h^+(G(t,z_{i^*}(t)),F(t,x^*(t))) \le l(t)\|z_{i^*}(t)-x^*(t)\|.$$

При этом по теореме 1 из неравенства $\mu(A_{i^*}(x^*))>0$ следует неравенство $p_{i^*}(x^*)>0$, и так как разбиение единицы $\{p_i : S\to I\}_{i\in\mathbb{N}}$ подчинено заданному покрытию $\{U_\alpha(z_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ множества S, получаем справедливость включения $x^*\in U_\alpha(z_{i^*})$. В итоге мы доказали неравенство

$$\varrho(g(x^*)(t),F(t,x^*(t))) \le l(t)\alpha. \tag{4.25}$$

(Отметим, что оно не зависит от номера i^*, и поэтому справедливо для любого $x\in S$ и любого $t\in T$).

Для выбранных ранее $x^*\in S$, $t\in T$ и $i^*\in\mathbb{N}$ из неравенства треугольника и оценки (4.22) получаем

$$\Bigl\|g(x^*)(t)-\frac{d}{dt}x^*(t)\Bigr\| \le \|v_{i^*}(t)-z_{i^*}'(t)\| + \Bigl\|z_{i^*}'(t)-\frac{d}{dt}x^*(t)\Bigr\| \le r_{i^*}(t)$$

$$+\Bigl\|z_{i^*}'(t)-\frac{d}{dt}x^*(t)\Bigr\| \le \varrho\Bigl(\frac{d}{dt}x^*(t),F(t,z_{i^*}(t))\Bigr) + 2\Bigl\|z_{i^*}'(t)-\frac{d}{dt}x^*(t)\Bigr\| + \frac{1}{4}\vartheta$$

$$\le \varrho\Big(\frac{d}{dt}x^*(t), G(t,x^*(t))\Big) + l(t)\|x^*(t)-z_{i^*}(t)\| + 2\Big\|z'_{i^*}(t)-\frac{d}{dt}x^*(t)\Big\| + \frac{1}{4}\vartheta.$$

Здесь предпоследнее неравенство следует из (4.19) и неравенства вида $\varrho(a,A)\le\varrho(b,A)+\|a-b\|$, а последнее неравенство следует из предложения 1 и гипотезы 1. При этом i^*, как отметили выше, справедливы неравенства $\|x^*-z_{i^*}\|_{AC}<\alpha$, т. е.

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\|\frac{d}{dt}x^*(t)-z'_{i^*}(t)\Big\|dt = \int\limits_{t_0}^{t_1}\varphi_{i^*}(x^*)(t)dt < \alpha.$$

Отсюда, воспользовавшись равенством (4.14) из леммы 3, получаем, что при п.в. $t\in T$ и при любом $x\in S$ справедливо неравенство

$$\|g(x)(t)-x'(t)\| \le \varrho(x'(t),F(t,x(t))) + \psi(x)(t), \tag{4.26}$$

где по определению отображение $\psi\colon S\to L^1(T,\mathbb{R}^1_+)$ для любого $x\in S$ имеет вид

$$\psi(x)(t) := l(t)\alpha + 2\sum_{i=1}^{+\infty}\chi_{A_i(x)}(t)\varphi_i(x)(t) + \frac{\vartheta}{4}.$$

Для оценки функции $\psi(x)\colon T\to\mathbb{R}^1_+$ из неравенства (2.1) в теореме 1 (напомним, что $\delta=\dfrac{1}{8}\vartheta$) получаем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{+\infty}\chi_{A_i(x)}(t)\varphi_i(x)(t)\,dt \le \sum_{i=1}^{+\infty}\int\limits_{A_i(x)}\varphi_i(x)(t)\,dt \le \sum_{i=1}^{+\infty}p_i(x)\int\limits_{t_0}^{t_1}\varphi_i(x)(t)\,dt + \frac{\vartheta}{8}.$$

Отсюда, используя оценку (4.25), имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\psi(x)(t)dt \le m(t_1)\,\alpha + 2\Big(\alpha+\frac{\vartheta}{8}\Big) + \frac{\vartheta}{4} \le \frac{3}{4}\vartheta. \tag{4.27}$$

Определим отображение $f: S\to AC(T,\mathbb{R}^n)$ для любого $x\in S$ по формуле

$$f(x)(t) := x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} g(x)(\tau)d\tau, \quad t\in T. \tag{4.28}$$

Очевидно, что из непрерывности отображения g следует непрерывность отображения f.

Чтобы завершить доказательство леммы, осталось показать справедливость оценок (4.16), (4.17) и включения $f(S)\subset D_k(F,\rho_k,\gamma)$.

Из выражений (4.28), (4.26) и (4.27) получаем для любого $x\in S$ и $t\in T$ оценку

$$\|f(x)(t)-x(t)\| \le \int\limits_{t_0}^{t}\|g(x)(\tau)-x'(\tau)\|d\tau \le \frac{3}{4}\vartheta + \int\limits_{t_0}^{t}\varrho(x'(\tau),F(\tau,x(\tau)))d\tau; \tag{4.29}$$

т. е. доказали оценку (4.16). Для получения оценки (4.17) необходимо доказать, что для любого $x\in S$ и почти любого $t\in T$ справедливо равенство

$$\varrho(g(x)(t),\, F(t,x(t))) = \varrho(g(x)(t),\, G(t,x(t))). \tag{4.30}$$

Очевидно, что для этого достаточно доказать неравенство $\ge$ в (4.30).

Зафиксируем произвольную функцию $x^* \in S$. Для любого момента $t \in T$ существует индекс $i^* \in \mathbb{N}$ такой, что $t \in A_{i^*}(x^*)$ и $\mu(A_{i^*}(x^*)) > 0$. При этом по определению g (4.24) имеем $g(x^*)(t) = v_{i^*}(t)$ и $\|x^* - z_{i^*}\|_{AC} < \alpha$. Для любого $\delta \in \Big(0, \dfrac{1}{4}\vartheta_{k+1}\Big)$ существует точка $z_\delta \in F(t, x^*(t))$ такая, что $\|v_{i^*}(t) - z_\delta\| \le \varrho(g(x^*)(t),\, F(t, x^*(t))) + \delta$. В силу предложения 1, гипотезы 1 и формулы (4.2) получаем

$$\varrho(g(x^*)(t),\, F(t,x^*(t))) \le \varrho(v_{i^*}(t),\, G(t, z_{i^*}(t))) + h^+(G(t, z_{i^*}(t)), F(t, x^*(t)))$$
$$\le l(t)\|z_{i^*}(t) - x^*(t)\| \le l(t)\alpha \le l(t)\vartheta \le \rho_k(t).$$

Из неравенства треугольника, неравенства (4.22) и того, что $z_{i^*} \in S$, имеем

$$\|z_\delta - \widehat{x}'(t)\| \le \|v_{i^*}(t) - z_\delta\| + \|v_{i^*}(t) - z'_{i^*}(t)\| + \|z'_{i^*}(t) - \widehat{x}'(t)\|$$
$$\le \rho_k(t) + \frac{1}{4}\vartheta_{k+1} + \rho_{k-1}(t) + \frac{1}{4}\vartheta_k + \|z'_{i^*}(t) - \widehat{x}'(t)\| \le \gamma\, b(\varepsilon)\, l(t) \le R(t).$$

В итоге показали, что $z_\delta \in B_{R(t)}(\widehat{x}'(t))$, т. е. $z_\delta \in G(t, x^*(t))$. По определению расстояния от точки до множества получаем

$$\varrho(g(x^*)(t),\, G(t, x^*(t))) \le \|v_{i^*}(t) - z_\delta\| \le \varrho(g(x^*)(t),\, F(t, x^*(t))) + \delta,$$

что в силу произвольности $\delta > 0$ доказывает равенство (4.30).

В силу предложения 1, равенства (4.30), гипотезы 1 и неравенства (4.25) имеем

$$\varrho\Big(\frac{d}{dt}f(x)(t),\, F(t, f(x)(t))\Big) \le \varrho(g(x)(t),\, G(t, x(t))) + h^+(G(t, x(t)), F(t, f(x)(t)))$$
$$\le \varrho(g(x)(t),\, F(t, x(t))) + l(t)\|x(t) - f(x)(t)\| \le l(t)\alpha + l(t)\|x(t) - f(x)(t)\|. \tag{4.31}$$

Интегрируя неравенство (4.31) на интервале $[t_0, t]$, и учитывая, что $8m(t)\alpha < \vartheta$, получаем неравенство (4.17).

Осталось доказать справедливость включения $f(S) \subset D_k(F, \rho_k, \gamma)$.

Для любого $x \in S$ из неравенства (4.29) и первого неравенства в (4.12) при $k-1$ получаем оценку

$$\|f(x) - x\|_{AC} \le \vartheta + \int_{t_0}^{t_1} \rho_{k-1}(\tau)d\tau. \tag{4.32}$$

Аналогично из неравенств (4.29), (4.31), неравенства $\alpha < \dfrac{1}{8}\vartheta$ и равенства $\vartheta = \vartheta_k$ имеем первое неравенство в (4.12) для $f(x)$, т. е.

$$\varrho\bigg(\frac{d}{dt}f(x)(t),\, F(t, f(x)(t))\bigg) \le l(t)\bigg(\frac{7}{8}\,\vartheta_k + \int_{t_0}^{t} \rho_{k-1}(\tau)d\tau\bigg) \le \rho_k(t) \quad \text{п.в.} \quad t \in T. \tag{4.33}$$

Из неравенства треугольника получаем

$$\|f(x) - \widehat{x}\|_{AC} \le \|x - \widehat{x}\|_{AC} + \|f(x) - x\|_{AC}. \tag{4.34}$$

В силу того что для любого $x \in S$ справедливо второе неравенство в (4.12) при $k > 1$ (или в (4.1) при $k = 1$), подставляя оценку (4.32) в неравенство (4.34), получаем, что второе неравенство в (4.12) также остается верным, если в нем x заменить на $f(x)$, а в сумме $k-2$ заменить на $k-1$.

Так как для любого $x \in S$ при каждом $t \in T$ найдется $i \in \mathbb{N}$ такой, что $\frac{d}{dt}f(x)(t) = v_i(t)$, то третье неравенство в (4.12), в котором x заменено на $f(x)$, следует из оценки (4.23). Таким образом, включение $f(x) \in D_k(F, \rho_k, \gamma)$ доказано.

Поскольку по условию леммы множество $S \setminus \{\widehat{x}\}$ не пусто, причем множество начальных точек функций из S отлично от точки $\widehat{x}(t_0)$ (см. лемму 1), а отображение f из (4.28) начальные точки оставляет неподвижными, то это означает, что $D_k(F, \rho_k, \gamma) \setminus \{\widehat{x}\} \neq \varnothing$. □

З а м е ч а н и е 4. Пусть задано некоторое непрерывное отображение $d : B_{\varepsilon/4}(\widehat{x}(t_0)) \to \mathbb{R}^n$ такое, что для любого $x \in B_{\varepsilon/4}(\widehat{x}(t_0))$ справедливо неравенство $\|d(x) - x\| < \delta_1$, где

$$\delta_1 \leq \vartheta_1/8 = \frac{b(a)}{128} e^{-2m(t_1)}. \tag{4.35}$$

При $k = 1$ заменим определение отображения f: $D_0(F, \rho_0, \gamma) \to AC(T, \mathbb{R}^n)$, данное в формуле (4.28), на следующее определение:

$$f(x)(t) := d(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t} g(x)(\tau) d\tau, \quad t \in T. \tag{4.36}$$

Очевидно, что новое отображение f из (4.36) также непрерывно. Чтобы доказать лемму 4 при $k = 1$ с измененным отображением f по формуле (4.36), необходимо сделать некоторую коррекцию доказательства. В силу сдвига начальной точки в среднюю часть неравенства (4.29) необходимо добавить (в последней строке слева) еще одно слагаемое $\|d(x(t_0)) - x(t_0)\|$, и так как по условию (4.35) $\|d(x(t_0)) - x(t_0)\| < \dfrac{1}{8}\vartheta_1$, то справа нужно заменить $\dfrac{3}{4}\vartheta$ на $\dfrac{7}{8}\vartheta$. В итоге получаем, что итоговая оценка (4.33) остается справедливой для f из (4.36), в силу чего и включение $f(D_0(F, \rho_0, \gamma)) \subset D_1(F, \rho_1, \gamma)$ также остается справедливым.

Теорема 2. *Пусть заданы числа* $\gamma \in (0, 1]$, $a \in (0, \varepsilon]$ *и функция* $\rho_0 \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$, *удовлетворяющая неравенству* (4.6), *и множество* $S_0 := D_0(F, \rho_0, \gamma)$ (*см.* (4.1)). *Пусть задана непрерывная функция* $d : B_{\varepsilon/4}(\widehat{x}(t_0)) \to \mathbb{R}^n$ *такая, что для любой точки* $z \in B_{\varepsilon/4}(\widehat{x}(t_0))$ *справедлива оценка* $\|d(z) - z\| < \delta_1$, *где* δ_1 *удовлетворяет неравенству* (4.35). *Тогда существует непрерывное отображение* $r : S_0 \to \mathcal{R}_T(F, d(B_{\varepsilon/4}(\widehat{x}(t_0))))$, *удовлетворяющее для любой кривой* $x \in S_0$ *соотношениям*

$$\|r(x) - x\|_{AC} \leq \int_{t_0}^{t_1} e^{m(t_1) - m(\tau)} \rho_0(\tau) d\tau + \frac{\gamma}{8} b(a), \tag{4.37}$$

$$r(x)(t_0) = d(x(t_0)), \quad \|r(x) - \widehat{x}\|_{AC} \leq \varepsilon, \tag{4.38}$$

$$\left\| \frac{d}{dt} r(x)(t) - \widehat{x}'(t) \right\| \leq \gamma\, b(\varepsilon)\, l(t) \quad \textit{п. в.} \quad t \in T. \tag{4.39}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В лемме 4 для каждого $k \in \mathbb{N}$ определены непрерывное отображение $g : D_{k-1}(F, \rho_{k-1}, \gamma) \to L^1(T, \mathbb{R}^n)$ по формуле (4.24), которое будем обозначать как g_k, и непрерывное отображение

$$f : D_{k-1}(F, \rho_{k-1}, \gamma) \to D_k(F, \rho_k, \gamma)$$

по формуле (4.28) при $k > 1$ и по формуле (4.36) при $k = 1$, которое будем обозначать как f_k. Для каждого отображения f_k получены оценки (4.16), (4.17) при $\vartheta := \vartheta_k$.

Для произвольной кривой $x \in S_0$ построим последовательность $\{x_k \in AC(T, \mathbb{R}^n)\}_{k=0}^{+\infty}$ кривых по формулам

$$x_0 = x, \quad x_k = f_k(x_{k-1}) \ \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.40}$$

В силу непрерывности отображений $f_1, \ldots, f_k$ каждая кривая x_k является значением некоторого непрерывного отображения из S_0 в $AC(T, \mathbb{R}^n)$ в точке $x \in S_0$. Докажем индукцией по $k \in \mathbb{N}$ следующую оценку:

$$\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq \vartheta_k + \int_{t_0}^{t} \rho_{k-1}(\tau) d\tau, \quad t \in T. \tag{4.41}$$

В силу леммы 4 и замечания 4 при $k=1$ и для любого $t\in T$ получаем оценки

$$\int\limits_{t_0}^{t}\|x_1'(s)-x_0'(s)\|\,ds\le\int\limits_{t_0}^{t}\rho_0(s)\,ds+\frac{7}{8}\vartheta_1,$$

$$\|x_1(t)-x_0(t)\|\le\delta_1+\frac{7}{8}\vartheta_1+\int\limits_{t_0}^{t}\rho_0(s)\,ds\le\vartheta_1+\int\limits_{t_0}^{t}\rho_0(s)\,ds.$$

Пусть по индуктивному предположению оценка (4.41) верна при некотором $k\in\mathbb{N}$. Проверим ее при $k+1$:

$$\|x_{k+1}(t)-x_k(t)\|\le\int\limits_{t_0}^{t}\|x_{k+1}'(s)-x_k'(s)\|\,ds\underset{(4.16)}{\le}\int\limits_{t_0}^{t}\varrho(x_k'(s),F(s,x_k(s)))\,ds+\frac{3\vartheta_{k+1}}{4}$$

$$\underset{(4.17)}{\le}\int\limits_{t_0}^{t}l(s)\|x_k(s)-x_{k-1}(s)\|\,ds+\vartheta_{k+1}\underset{(4.41)}{\le}\int\limits_{t_0}^{t}l(s)\Bigg(\vartheta_k+\int\limits_{t_0}^{s}\rho_{k-1}(\tau)d\tau\Bigg)ds+\vartheta_{k+1}$$

$$\underset{(4.2)}{=}\int\limits_{t_0}^{t}\rho_k(s)ds+\vartheta_{k+1}.$$

Итак, оценка (4.41) доказана. В частности при всех $k\in\mathbb{N}$ из нее следует

$$\|x_k-x_{k-1}\|_{AC}\le\theta_k+\int\limits_{t_0}^{t_1}\rho_{k-1}(\tau)d\tau. \tag{4.42}$$

Определим последовательность $\{u_k\in AC(T,\mathbb{R}^n)\}_{k=0}^{+\infty}$ кривых таких, что $u_k:=x_k-x_{k-1}$ при $k\in\mathbb{N}$ и $u_0:=x_0$. В силу равенства $x_k=\sum_{i=0}^{k}u_i$ сходимость последовательности $\{x_k\in AC(T,\mathbb{R}^n)\}_{k\in\mathbb{N}}$ эквивалентна сходимости функционального ряда $\sum_{i=0}^{+\infty}u_i$. В силу оценок (4.42) и (4.5) ряд $\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$ мажорируется в $AC(T,\mathbb{R}^n)$ сходящимся числовым рядом, не зависящим от кривой x, вследствие чего ряд $\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$ сходится равномерно по $x\in S_0$ в пространстве $AC(T,\mathbb{R}^n)$. Иными словами, для каждой кривой $x\in S_0$ построили последовательность $\{x_k\in AC(T,\mathbb{R}^n)\}_{k=1}^{\infty}$ кривых, каждая из которых непрерывно зависит от кривой x, причем последовательность $\{x_k\in AC(T,\mathbb{R}^n)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в пространстве $AC(T,\mathbb{R}^n)$ равномерно по параметру $x\in S_0$ к некоторой кривой, которую обозначим через $r(x)$. По известным свойствам последовательностей предел $r(x)$ последовательности также будет непрерывным по x отображением из S_0 в $AC(T,\mathbb{R}^n)$. При этом из оценок (4.42) и (4.5) следует оценка (4.37).

Так как при любой начальной кривой $x_0=x\in S_0$ при каждом $k\in\mathbb{N}$ из (4.40) следует включение $x_k\in D_k(F,\rho_k,\gamma)$, то в силу определения 3 (см. (4.12)) и леммы 3 (см. (4.13)) справедливы оценки $\|x_k-\widehat{x}\|_{AC}\le\varepsilon$ и $\|x_k'(t)-\widehat{x}'(t)\|\le\gamma\,b(\varepsilon)\,l(t)$ при п.в. $t\in T$. С одной стороны, из первого неравенства в пределе следует неравенство в (4.38). С другой стороны, последовательность $\{x_k'\in L^1(T,\mathbb{R}^n)\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится в $L^1(T,\mathbb{R}^n)$ к функции $\dfrac{d}{dt}r(x):T\to L^1(T,\mathbb{R}^n)$, откуда по теореме Ф. Рисса существует подпоследовательность $\{x_{k_m}'\}_{m\in\mathbb{N}}$ функций, которая сходится к функции $\dfrac{d}{dt}r(x)$ почти всюду на T. Отсюда и из приведенного выше второго (т. е. для $\{x_k'(t)\}$) неравенства получаем в пределе неравенство (4.39).

В заключение покажем, что для любой кривой $x \in S_0$ кривая $r(x) \in AC(T, \mathbb{R}^n)$ является траекторией дифференциального включения (3.1). Из неравенства (4.17) следует

$$\int_{t_0}^{t_1} \varrho(x'_k(s), F(s, x_k(s)))\, ds \le \int_{t_0}^{t_1} l(s)\|x_k(s) - x_{k-1}(s)\|\, ds + \frac{\vartheta_k}{8}. \tag{4.43}$$

В силу липшицевости функции расстояния от точки до фиксированного множества, предложения 1 (см. (1.2)) и гипотезы 1 получаем

$$\varrho\Big(\frac{d}{ds}r(x)(s), F(s, r(x)(s))\Big) \le \Big\|x'_k(s) - \frac{d}{ds}r(x)(s)\Big\| + \varrho(x'_k(s), F(s, r(x)(s)))$$

$$\le \Big\|x'_k(s) - \frac{d}{ds}r(x)(s)\Big\| + \varrho(x'_k(s), G(s, x_k(s))) + l(s)\|x_k(s) - r(x)(s)\|.$$

Заменим в последней строке G на F, что возможно в силу леммы 3 (см. (4.14)). Проинтегрируем обе части последнего неравенства по отрезку T и, применяя неравенство (4.43), получаем оценки

$$\int_{t_0}^{t_1} \varrho\Big(\frac{d}{ds}r(x)(s), F(s, r(x)(s))\Big) ds \le \int_{t_0}^{t_1} \Big\|x'_k(s) - \frac{d}{ds}r(x)(s)\Big\|\, ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} l(s)\|x_k(s) - x_{k-1}(s)\|\, ds + \frac{\vartheta_k}{8} + \int_{t_0}^{t_1} l(s)\|x_k(s) - r(x)(s)\| ds$$

$$\le \int_{t_0}^{t_1} \Big\|x'_k(s) - \frac{d}{ds}r(x)(s)\Big\|\, ds + 2\int_{t_0}^{t_1} l(s)\|x_k(s) - r(x)(s)\| ds + \int_{t_0}^{t_1} l(s)\|x_{k-1}(s) - r(x)(s)\|\, ds + \frac{\vartheta_k}{8}.$$

Так как последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к кривой $r(x)$ в пространстве $AC(T, \mathbb{R}^n)$, то в полученном выше неравенстве оценка в правой части неравенства может быть сделана сколь угодно малой при достаточно больших k, т. е. интеграл в левой части неравенства равен нулю, т. е. $r(x)$ является F-траекторией. □

5. Вариационные дифференциальные включения и непрерывность множества решений

В этом разделе, опираясь на теорему 2, мы получим непрерывное отображение некоторого подмножества траекторий вариационного дифференциального включения во множество всех F-траекторий исходного дифференциального включения (3.1).

Напомним, что *конусом* в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется всякое множество A такое, что для любых $x \in A$ и $\lambda > 0$ следует включение $\lambda x \in A$.

Нижним касательным конусом ко множеству $A \subset \mathbb{R}^n$ *в точке* $a \in \overline{A}$ (см. [7] или [8] § 24) называется множество вида

$$T_L(A; a) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{\lambda \downarrow 0} \varrho(v,\ \lambda^{-1}(A - a)) = 0\}. \tag{5.1}$$

Кроме нижнего касательного конуса, который может оказаться невыпуклым конусом для невыпуклого множества A, будем рассматривать *асимптотический нижний касательный конус* $T_{AL}(A, a)$ ко множеству $A \subset \mathbb{R}^n$ в точке $a \in \overline{A}$, определяемый по формуле

$$T_{AL}(A, a) := T_L(A, a) \stackrel{*}{-} T_L(A, a), \tag{5.2}$$

где разность Минковского $\overset{*}{-}$ двух множеств A и B определяется по формуле $A \overset{*}{-} B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x + B \subset A\}$. Хорошо известно (см. [17, § 4.5; 18; 19]), что асимптотический нижний касательный конус, во-первых, является выпуклым и замкнутым подконусом нижнего касательного конуса, а во-вторых, содержит касательный конус Кларка $T_C(A, a)$ (определение которого см. [20, § 2.4]).

Конкретизация понятия шатра Болтянского (см. [21, § 3]) приводит нас к понятию регулярного касательного конуса (см. [8, § 24]), более удобного в приложениях.

Регулярным касательным конусом ко множеству $A \subset \mathbb{R}^n$ *в точке* $a \in \overline{A}$ называется выпуклый замкнутый конус $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ такой, что существует отображение q: $\mathbb{R}^1_+ \times (K_0 \cap \overline{B_1(0)}) \to \mathbb{R}^n$, при котором для любых $v \in K_0 \cap \overline{B_1(0)}$ и $\lambda \in (0, 1]$ справедливо включение $a + \lambda v + q(\lambda, v) \in A$, причем при каждом $\lambda \in (0, 1]$ отображение $v \mapsto q(\lambda, v)$ непрерывно на $K_0 \cap \overline{B_1(0)}$, а также следующая функция

$$\widetilde{q}(\lambda) := \lambda^{-1} \sup\{\|q(\lambda, v)\| \mid v \in K_0 \cap \overline{B_1(0)}\} \tag{5.3}$$

удовлетворяет равенству $\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \widetilde{q}(\lambda) = 0$.

Заметим, что, например, при определенных условиях на множество A конус $T_{AL}(A, a)$ является регулярным касательным конусом (см., например, [8, теоремы 25.1 и 25.2]).

Напомним, что для данных отображения $F : T \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ и траектории $\widehat{x} \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ при п.в. $t \in T$ *нижней многозначной производной отображения* $F(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *в точке* $(\widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))$ *по направлению* $u \in \mathbb{R}^n$ называется следующее множество (см. [17; 18], а также определение 26.1 и предложение 26.5 в [8]):

$$F'_L(t, u) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (u, v) \in T_L(\operatorname{Graph} F(t, \cdot); (\widehat{x}(t), \widehat{x}'(t)))\}. \tag{5.4}$$

Подобно понятию $\mathcal{R}_T(F, C_0)$, определенному для множества всех F-траекторий дифференциального включения (3.1), символом $\mathcal{R}_T(F'_L, K_0)$ мы будем обозначать множество всех F'-траекторий *вариационного дифференциального включения*:

$$u'(t) \in F'_L(t, u(t)) \quad \text{п.в. } t \in T, \tag{5.5}$$

причем таких кривых $u \in AC(T, \mathbb{R}^n)$, для которых еще выполнено начальное условие $u(t_0) \in K_0$.

Также обозначим стандартный симплекс в $\mathbb{R}^{k+1}$ через

$$\Sigma^k := \Big\{\sigma := (\sigma_1, \dots, \sigma_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \sigma_m \geq 0, \quad \sum_{m=1}^{k+1} \sigma_m = 1\Big\}. \tag{5.6}$$

Теорема 3. *Пусть K_0 — некоторый регулярный касательный конус ко множеству C_0 в точке $\widehat{x}(t_0)$. Пусть задана конечная совокупность $u_m \in \mathcal{R}_T(F'_L, K_0)$, $m \in \overline{1, k+1}$, траекторий вариационного дифференциального включения* (5.5) *таких, что $u'_m \in L^\infty(T, \mathbb{R}^n)$. Для каждого $\sigma \in \Sigma^k$(см.* (5.6)) *определим кривую $u_\sigma := \sum_{m=1}^{k+1} \sigma_m u_m$ и пусть справедливо включение*

$$\Big\{u_\sigma := \sum_{m=1}^{k+1} \sigma_m u_m \mid \sigma \in \Sigma^k\Big\} \subset \mathcal{R}_T(F'_L, K_0). \tag{5.7}$$

Тогда для любого $\gamma \in (0, 1]$ найдется число $\lambda_0 > 0$ такое, что для каждого $\lambda \in (0, \lambda_0)$ и каждого $\sigma \in \Sigma^k$ существуют траектория $x_{\lambda,\sigma} \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ и кривая $t \mapsto o(\lambda, \sigma, t)$ такие, что

$$\|x_{\lambda,\sigma} - \widehat{x}\|_{AC} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \|x'_{\lambda,\sigma}(t) - \widehat{x}'(t)\| \leq \gamma\, b(\varepsilon)\, l(t) \quad \textit{п.в.} \;\; t \in T; \tag{5.8}$$

$$x_{\lambda,\sigma}(t) = \widehat{x}(t) + \lambda u_\sigma(t) + o(\lambda, \sigma, t), \quad t \in T; \tag{5.9}$$

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \big(\lambda^{-1} \max_{\sigma \in \Sigma^k} \|o(\lambda, \sigma, \cdot)\|_{AC}\big) = 0; \tag{5.10}$$

а также отображение $\sigma \mapsto o(\lambda, \sigma, \cdot)$ из Σ^k в $AC(T, \mathbb{R}^n)$ непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем функции $q(\lambda, v)$ и $\widetilde{q}(\lambda)$ (см.(5.3)) из определения регулярного касательного конуса K_0 ко множеству C_0 в точке $\widehat{x}(t_0)$ и $b(\varepsilon)$ из (3.4). Определим числа

$$\beta := \max_{m\in\overline{1,k+1}} \|u_m(\cdot)\|_{AC}; \quad \theta := \max_{m\in\overline{1,k+1}} (\operatorname{vrai\,sup}_{t\in T} \|u_m'(t)\|),$$

$$\lambda_0 := \min\Big\{\frac{\gamma\, b(\varepsilon)\, e^{-2\,m(t_1)}}{128\,\beta(1+\max\{\widetilde{q}(\mu)\mid \mu\in(0,1]\})};\ \frac{\gamma\, b(\varepsilon)\, e^{-m(t_1)}}{8\,(\theta+\beta)}\Big\}. \tag{5.11}$$

Для любых $\sigma\in\Sigma^k$, $\lambda\in(0,\lambda_0)$, $t\in T$ и для $u_\sigma(t)=\sum_{m=1}^{k+1}\sigma_m u_m(t)$ (см. (5.7)) определим точки

$$v_{\lambda,\sigma} := u_\sigma(t_0) + \lambda^{-1}\, q\Big(\lambda\beta, \frac{u_\sigma(t_0)}{\beta}\Big) \tag{5.12}$$

и функцию

$$\rho(t,\lambda,\sigma) := \varrho\Big(u_\sigma'(t), \frac{F(t,\widehat{x}(t)+\lambda u_\sigma(t)) - \widehat{x}'(t)}{\lambda}\Big). \tag{5.13}$$

В силу выбора чисел λ_0, β, θ для любых числа $\lambda\in(0,\lambda_0)$ и вектора $\sigma\in\Sigma^k$ получаем, что $\lambda\beta<1$ и $\frac{u_{\sigma(t_0)}}{\beta}\in K_0\cap\overline{B_1(0)}$, т. е. значения $v_{\lambda,\sigma}$ в (5.12) определены корректно. Более того, по определению регулярного касательного конуса K_0 получаем, что при любых значениях $\lambda\in(0,\lambda_0)$ и $\sigma\in\Sigma^k$ точка $\widehat{x}(t_0)+\lambda v_{\lambda,\sigma} := \widehat{x}(t_0)+\lambda u_\sigma(t_0)+q\Big(\lambda\beta,\frac{u_\sigma(t_0)}{\beta}\Big)$ принадлежит множеству C_0, причем в силу выбора числа λ_0 (5.11) получаем оценку

$$\Big\|\lambda u_\sigma(t_0)+q\Big(\lambda\beta,\frac{u_\sigma(t_0)}{\beta}\Big)\Big\| \le \lambda \max_{m\in\overline{1,k+1}}\|u_m\|_{AC}+\lambda\,\beta\,\widetilde{q}(\lambda\beta)\le\lambda_0\,\beta\,(1+\max\{\widetilde{q}(\mu)\mid\mu\in(0,1]\})<\frac{\varepsilon}{4},$$

т. е. точка $\widehat{x}(t_0)+\lambda v_{\lambda,\sigma}$ принадлежит $\frac{\varepsilon}{4}$-окрестности точки $\widehat{x}(t_0)$.

Зафиксируем число $\lambda\in(0,\lambda_0)$. Определим отображение $d: X_\lambda\to\mathbb{R}^n$ на множестве $X_\lambda := \{x\in\mathbb{R}^n \mid x=\widehat{x}(t_0)+\lambda u_\sigma(t_0),\ \sigma\in\Sigma^k\}$ по формуле

$$d(\widehat{x}(t_0)+\lambda u_\sigma(t_0)) := \widehat{x}(t_0)+\lambda u_\sigma(t_0)+q\Big(\lambda\beta,\frac{u_\sigma(t_0)}{\beta}\Big)\ \ \forall\sigma\in\Sigma^k.$$

Замечаем, что в силу определения регулярного касательного конуса отображение d будет непрерывным по σ на Σ^k. Кроме того, из приведенной выше формулы в силу определения $\widetilde{q}$ (см. (5.3)) получаем оценку

$$\|d(x)-x\|\le\lambda\beta\widetilde{q}(\lambda\beta)\ \ \forall x\in X_\lambda. \tag{5.14}$$

В силу равенства (5.13), задающего $\rho(t,\lambda,\sigma)$, определим функцию

$$\rho(t,\lambda) := \max_{\sigma\in\Sigma^k}\rho(t,\lambda,\sigma),\quad t\in T,\quad \lambda\in(0,\lambda_0). \tag{5.15}$$

Фиксируем число $\lambda\in(0,\lambda_0)$. Рассмотрим множество $D_0(F,\rho_0,\gamma)$ (4.1), в котором в качестве функции ρ_0 выбрана функция $\lambda\rho(\cdot,\lambda)$. Покажем, что кривая $z_{\lambda,\sigma}:=\widehat{x}+\lambda u_\sigma$ содержится в $D_0(F,\lambda\rho(\cdot,\lambda),\gamma)$ при любом $\sigma\in\Sigma^k$. Справедливость второго неравенства в (4.1) (т. е. $\varrho(z_{\lambda,\sigma}'(t),F(t,z_{\lambda,\sigma}(t)))\le\lambda\rho(t,\lambda)$) очевидно следует из равенств (5.13) и (5.15). Кроме того, так как по (3.5) справедливо неравенство $l(t)\ge1$, по определению для λ_0 (см. (5.11)) при п.в. $t\in T$ получаем

$$\|z_{\lambda,\sigma}'(t)-\widehat{x}'(t)\|=\lambda\|u_\sigma'(t)\|\le\lambda_0\theta\le\frac{\gamma}{8}\,b(\varepsilon)<\frac{\gamma}{2}\,b(\varepsilon)\,l(t),$$

т. е. для $z_{\lambda,\sigma}$ выполнено третье неравенство в (4.1). Аналогично имеем

$$\|z_{\lambda,\sigma}-\widehat{x}\|_{AC}=\lambda\|u_\sigma\|_{AC}<\lambda_0\,\beta<\frac{\varepsilon}{4},$$

т. е. верно первое неравенство в (4.1), и в итоге получаем, что $z_{\lambda,\sigma} \in D_0(F, \lambda\rho(\cdot,\lambda), \gamma)$.

Получим оценку для функции $\rho(\cdot,\lambda)$ из (5.15). В силу определения функции $\rho(t,\lambda,\sigma)$ (см. (5.13)), липшицевости функции расстояния от точки до постоянного множества, предложения 1 (см. (1.2)) и гипотезы 1 получаем оценку

$$\rho(t,\lambda,\sigma) \le \|u'_\sigma(t)\| + \lambda^{-1}\varrho\left(\widehat{x}'(t), F(t,\widehat{x}(t)+\lambda u_\sigma(t))\right)$$

$$\le \|u'_\sigma(t)\| + \lambda^{-1}h^+(G(t,\widehat{x}(t)), F(t,\widehat{x}(t)+\lambda u_\sigma(t))) \le \|u'_\sigma(t)\| + l(t)\|u_\sigma(t)\| \le \theta + l(t)\,\beta.$$

Так как $l(t) \ge 1$, то отсюда следует

$$\rho(t,\lambda) \le (\theta+\beta)\,l(t), \quad t \in T. \tag{5.16}$$

Для любого $\lambda \in (0,\lambda_0)$, оценивая $\lambda(\theta+\beta)$ по (5.11), получаем $\lambda\rho(t,\lambda) \le \dfrac{\gamma}{8}\,b(\varepsilon)\,e^{-m(t_1)}l(t)$, т. е. условие (4.6) в теореме 2 на $\rho_0 = \lambda\rho(\cdot,\lambda)$ выполнено.

Проверим остальные условия теоремы 2. Для любого $\lambda \in (0,\lambda_0)$ выберем значение параметра $a > 0$ в условиях теоремы 2 из равенства

$$a := \frac{128}{3\gamma}\,\lambda\,\beta\,\widetilde{q}(\lambda\beta)\,e^{2m(t_1)}. \tag{5.17}$$

Прежде всего, такой выбор параметра a в силу (5.11) влечет справедливость неравенства $a \le \varepsilon$. Кроме того, одним из условий теоремы 2 является выполнение неравенства $\|d(x)-x\| < \delta_1$. В силу (5.14) это неравенство справедливо при $\delta_1 = \lambda\,\beta\,\widetilde{q}(\lambda\beta)$. Вместе с равенством (5.17) отсюда следует неравенство (4.35). При этом параметр a пропорционален $\lambda\widetilde{q}(\lambda\beta)$ и в силу свойств регулярного конуса ведет себя как $o(\lambda)$ при $\lambda \to 0$.

Теперь мы можем воспользоваться теоремой 2. При этом для простоты вместо записи кривой вида $r(z_{\lambda,\sigma})$ (существующей по теореме 2) будем писать кривую $x_{\lambda,\sigma}$. Таким образом, по теореме 2 для любого $\lambda \in (0,\lambda_0)$ и любого $\sigma \in \Sigma^k$ существует кривая $x_{\lambda,\sigma} \in \mathcal{R}_T(F, \widehat{x}(t_0)+\lambda v_{\lambda,\sigma})$ такая, что отображение $\sigma \mapsto x_{\lambda,\sigma}$ является непрерывным из Σ^k в $AC(T,\mathbb{R}^n)$. Это означает, что отображение $\sigma \mapsto o(\lambda,\sigma,\cdot)$, определенное равенством (5.9), также непрерывно. Из неравенства (4.39) для $x_{\lambda,\sigma} = r(z_{\lambda,\sigma})$ следует правое неравенство в (5.8). Из (5.17) и (5.11) получаем равенство $b(a) = 3\,a \le \dfrac{1}{\nu}$, из которого и из неравенства (4.37) следует оценка

$$\|x_{\lambda,\sigma} - (\widehat{x}+\lambda u_\sigma)\|_{AC} \le \lambda\biggl(\int_{t_0}^{t_1} e^{m(t_1)-m(\tau)}\rho(\tau,\lambda)d\tau + \frac{3\,a\,\gamma}{8\lambda}\biggr). \tag{5.18}$$

Так как второе слагаемое в скобках в правой части неравенства (5.18) стремится к нулю при $\lambda \to 0$, то для доказательства равенства (5.10) достаточно показать, что

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\int_{t_0}^{t_1} \rho(t,\lambda)\,dt = 0. \tag{5.19}$$

Из включения (5.7), равенства (5.13) и определения производной многозначного отображения имеем

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\rho(t,\lambda,\sigma) = 0 \ \ \forall\,\sigma \in \Sigma^k \text{ и при п. в. } t \in T.$$

В силу того что для любого $\sigma \in \Sigma^k$ кривая u_σ является выпуклой комбинацией конечного числа кривых $\{u_m\}$, существует измеримое множество $T_1 \subset T$ такое, что $\mu(T\setminus T_1) = 0$, на котором существуют производные $\widehat{x}'(t)$ и $u'_\sigma(t)$ при всех $\sigma \in \Sigma^k$. В результате получаем равенство

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\rho(t,\lambda,\sigma) = 0 \ \ \forall\,\sigma \in \Sigma^k \ \ \forall\,t \in T_1. \tag{5.20}$$

Покажем, что функция $\sigma \mapsto \rho(t,\lambda,\sigma)$ удовлетворяет условию Липшица. Так как для любого $\sigma \in \Sigma^k$ справедливо включение $\widehat{x} + \lambda u_\sigma \in D_0(F, \lambda\rho(\cdot,\lambda),\gamma)$, то в силу леммы 3 справедливо равенство

$$\varrho(\widehat{x}'(t) + \lambda u'_\sigma(t), G(t, \widehat{x}(t) + \lambda u_\sigma(t))) = \varrho(\widehat{x}'(t) + \lambda u'_\sigma(t),\ F(t, \widehat{x}(t) + \lambda u_\sigma(t))). \tag{5.21}$$

Пусть $\sigma, \overline{\sigma} \in \Sigma^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$. Вычислим разность $\rho(t,\lambda,\sigma) - \rho(t,\lambda,\overline{\sigma})$. Прежде всего, из (5.13) и из липшицевости функции расстояния $x \mapsto \varrho(x, A)$ получаем

$$\rho(t,\lambda,\sigma) \leq \|u'_\sigma(t) - u'_{\overline{\sigma}}(t)\| + \lambda^{-1}\varrho(\widehat{x}'(t) + \lambda u'_{\overline{\sigma}}(t), F(t, \widehat{x}(t) + \lambda u_\sigma(t))).$$

Далее, используя (5.13) и (5.21), имеем

$$\rho(t,\lambda,\overline{\sigma}) = \lambda^{-1}\varrho(\widehat{x}'(t) + \lambda u'_{\overline{\sigma}}(t), G(t, \widehat{x}(t) + \lambda u_{\overline{\sigma}}(t))).$$

Объединяя полученные два неравенства с гипотезой 1 и предложением 1, получаем

$$\rho(t,\lambda,\sigma) - \rho(t,\lambda,\overline{\sigma}) \leq \|u'_\sigma(t) - u'_{\overline{\sigma}}(t)\| + l(t)\|u_\sigma(t) - u_{\overline{\sigma}}(t)\| \leq k(t)\|\sigma - \overline{\sigma}\|,$$

где $k(t) := \sqrt{k+1}(\theta + l(t)\beta)$. Это значит, что функция $\sigma \mapsto \rho(t,\lambda,\sigma)$ удовлетворяет условию Липшица на Σ^k с суммируемой на T функцией Липшица $k(t)$, не зависящей от значений $\lambda \in (0,\lambda_0)$. Покажем, что отсюда следует равенство

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \rho(t,\lambda) = 0 \quad \forall t \in T_1. \tag{5.22}$$

Допустим противное. Тогда существуют точка $\widetilde{t} \in T_1$, число $\alpha_0 > 0$ и последовательность $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ такие, что $\lim\limits_{m\to+\infty} \lambda_m = 0$ и $\lim\limits_{m\to+\infty} \rho(\widetilde{t},\lambda_m) = \alpha_0$. В свою очередь, это значит, что существует последовательность $\{\sigma_m \in \Sigma^k\}_{m\in\mathbb{N}}$ такая, что $\rho(\widetilde{t},\lambda_m,\sigma_m) > \alpha_0/2$ для каждого достаточно большого индекса m. Так как множество Σ^k компактно, то без потери общности можем считать, что последовательность $\{\sigma_m\}_{m=1}^{+\infty}$ сходится к некоторой точке $\sigma_0 \in \Sigma^k$. Поэтому из последнего неравенства и липшицевости функции $\sigma \mapsto \rho(\widetilde{t},\lambda,\sigma)$ следует неравенство $\rho(\widetilde{t},\lambda_m,\sigma_0) > \alpha_0/2 - k(\widetilde{t})\|\sigma_m - \sigma_0\|$. В пределе получаем противоречие с равенством (5.20) в точке $(\widetilde{t},\sigma_0)$. Таким образом, равенство (5.22) доказано.

Закончим доказательство равенства (5.19). Функции $t \to \rho(t,\lambda)$ измеримы и в силу оценки (5.16) равномерно по λ ограничены суммируемой функцией. Отсюда и из равенства (5.22) в силу интегральной теоремы Лебега получаем равенство (5.19). В свою очередь из него следует итоговая оценка на $o(\lambda) := \max\limits_{\sigma\in\Sigma^k} \|o(\lambda,\sigma,\cdot)\|_{AC}$, т. е. равенство (5.10) доказано.

В итоге из полученной в теореме 2 оценки (4.38) для любого $\lambda \in (0,\lambda_0)$ и любого $\sigma \in \Sigma^k$ следует оценка $\|x_{\lambda,\sigma} - \widehat{x}\|_{AC} \leq \varepsilon$. Более того, из неравенства (5.18) и равенства (5.10) получаем другую оценку $\|x_{\lambda,\sigma} - \widehat{x}\|_{AC} \leq \lambda\beta + o(\lambda)$, из которой следует, что существует $\lambda'_0 \leq \lambda_0$ такое, что при любом $\lambda \in (0,\lambda'_0)$ и любом $\sigma \in \Sigma^k$ справедливо левое неравенство в (5.8), что и завершает доказательство теоремы. $\square$

Заключение

Доказанные в данной работе свойства решений дифференциального включения с неограниченной правой частью (см. теоремы 2, 3) позволяют получать необходимые условия оптимальности в экстремальных задачах с дифференциальным включением при более слабых ограничениях. Так, например, в задаче быстродействия из [10], содержащей некоторое дифференциальное включение с неограниченной правой частью, теоремы 2 и 3 позволяют утверждать о справедливости полученных в работе необходимых условий оптимальности при более слабых ограничениях на дифференциальное включение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aubin J.-P.** Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems // Math. Oper. Res. 1984. Vol. 9. P. 87–111. doi: 10.1287/moor.9.1.87 .
2. **Ioffe A.D.** Existence and relaxation theorems for unbounded differential inclusions // J. Convex Anal. 2006. Vol.. 13, no. 2. P. 353–362.
3. **Половинкин Е.С.** Дифференциальные включения с измеримо-псевдолипшицевой правой частью // Тр. МИАН. 2013. Т. 283. P. 121–141.
4. **Clarke F. H.** *Necessary conditions in dynamic optimization.* Providence: AMS, 2005, 130 p. (Memoirs of the American Math. Soc.; vol. 173). ISBN: 9781470404178 .
5. **Loewen Ph.D., Rockafellar P.T.** Optimal control of unbounded differential inclusions // SIAM J. Control Optim. 1994. Vol. 32, no. 2. P. 442–470. doi: 10.1137/S0363012991217494 .
6. **Vinter R.B.** Boston: Birkhäuser, 2000, 507 p. doi: 10.1007/978-0-8176-8086-2 .
7. **Polovinkin E.S.** The properties of continuity and differentiation of solution sets of Lipschetzean differential inclusions // Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty / eds. G.B.Di Masi, A. Gombani, A.B. Kurzhansky. Boston: Birkhäuser, 1991. P. 349–360. (Ser. PSCT 10). doi: 10.1007/978-1-4612-0443-5_23 .
8. **Половинкин Е.С.** Многозначный анализ и дифференциальные включения. М.: Физматлит, 2014. 524 с.
9. **Половинкин Е.С.** Дифференциальные включения с неограниченной правой частью и необходимые условия оптимальности // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. P. 249–265.
10. **Polovinkin E.S.** Time optimum problems for unbounded differential inclusion // IFAC-PapersOnLine (Proc. of the 16th IFAC Workshop on Contr. Appl. of Optim., Garmisch-Partenkirchen, Germany, 6-9 October 2015). 2015. Vol. 48, iss. 25. P. 150–155. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.075 .
11. **Polovinkin E.S.** Necessary optimality conditions for the Mayer problem with unbounded differential inclusion // IFAC-PapersOnLine (Proc. of the 17th IFAC Workshop on Contr. Appl. of Optim., Yekaterinburg, Russia, 15-19 October, 2018). 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 521–524. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.474 .
12. **Lindenstrauss J.** A short proof of Lyapounov's convexity theorem // J. Math. Mech. 1966. Vol. 15. P. 971–972.
13. **Colombo R.M., Fryszkowski A., Rzezuchowski T., Staicu V.** Continuous selections of solution sets of Lipschitzean differential inclusions // Funkcialaj Ekvacioj. 1991. Vol. 34. P. 321–330.
14. **Fryszkowski A.** Fixed point theory for decomposable sets. Dordrecht; Boston: Kluwer Acad. Publ., 2004, 209 p. doi: 10.1007/1-4020-2499-1 .
15. **Fryszkowski A., Rzezuchowski T.** Continuous version of Filippov–Wazewski relaxation theorem // J. Diff. Eqs. 1992. Vol. 94. P. 254–265. doi: 10.1016/0022-0396(91)90092-N .
16. **Kuratowski K., Ryll-Nardzewski C.**: A general theorem on selectors // Bull. Polish Acad. Sc. 1965. Vol. 13. P. 397–403.
17. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analisys. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1990. 461 p.
18. **Половинкин Е.С., Смирнов Г.В.** Об одном подходе к дифференцированию многозначных отображений и необходимые условия оптимальности решений дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 6. P. 944–954.
19. **Половинкин Е. С., Смирнов Г. В.** : О задаче быстродействия для дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, №. 8. P. 1351–1365.
20. **Кларк Ф.**: Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 p.
21. **Болтянский В.Г.** Метод шатров в теории экстремальных задач // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, № 3 (183). P. 3–55.

Поступила 3.12.2018
После доработки 17.01.2019
Принята к публикации 21.01.2019

Половинкин Евгений Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры высшей математики
Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Долгопрудный
e-mail: polovinkin.es@mipt.ru

REFERENCES

1. Aubin J.P. Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems. *Math. Oper. Res.*, 1984, vol. 9, no. 1, pp. 87–111. doi: 10.1287/moor.9.1.87 .
2. Ioffe A.D. Existence and relaxation theorems for unbounded differential inclusions. *J. Convex Anal.*, 2006, vol. 13, no. 2, pp. 353–362.
3. Polovinkin E.S. Differential inclusions with measurable Pseudo–Lipschitz right-hand side. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2013, vol. 283, no. 1, pp. 116–135. doi: 10.1134/S0081543813080099 .
4. Clarke F.H. *Necessary conditions in dynamic optimization.* Ser. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 173, Providence: AMS, 2005, 130 p. ISBN: 9781470404178 .
5. Loewen Ph.D., Rockafellar P.T. Optimal control of unbounded differential inclusions. *SIAM J. Control Optimi.*, 1994, vol. 32, no. 2, pp. 442–470. doi: 10.1137/S0363012991217494 .
6. Vinter R.B. *Optimal control.* Boston: Birkhäuser, 2000, 507 p. doi: 10.1007/978-0-8176-8086-2 .
7. Polovinkin E.S. The properties of continuity and differentiation of solution sets of Lipschetzean differential inclusions. In: G.B.Di Masi, A. Gombani, A.B. Kurzhansky (eds.), *Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty*, Ser. PSCT 10, Boston: Birkhäuser, 1991, pp. 349–360. doi: 10.1007/978-1-4612-0443-5_23 .
8. Polovinkin E.S. *Mnogoznachnii analiz i differencial'nye vklyucheniya* [Multivalued analysis and differential inclusion]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2014, 524 p. ISBN: 978-5-9221-1594-0 .
9. Polovinkin E.S. Differential inclusions with unbounded right-hand side and necessary optimality conditions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, no. 1, pp. 237–252. doi: 10.1134/S0081543815080192 .
10. Polovinkin E.S. Time optimum problems for unbounded differential inclusion. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, vol. 48, no. 25, pp. 150–155. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.075 .
11. Polovinkin E.S. Necessary optimality conditions for the Mayer problem with unbounded differential inclusion. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 521–524. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.474 .
12. Lindenstrauss J. A short proof of Lyapounov's convexity theorem. *J. Math. Mech.*, 1966, vol. 15, pp. 971–972.
13. Colombo R.M., Fryszkowski A., Rzezuchowski T., Staicu V. Continuous selections of solution sets of Lipschitzean differential inclusions. *Funkcialaj Ekvacioj*, 1991, vol. 34, pp. 321–330.
14. Fryszkowski A. *Fixed point theory for decomposable sets.* Dordrecht; Boston: Kluwer Acad. Publ., 2004, 209 p. doi: 10.1007/1-4020-2499-1 .
15. Fryszkowski A., Rzezuchowski T. Continuous version of Filippov–Wazewski relaxation theorem. *J. Diff. Eqs.*, 1992, vol. 94, pp. 254–265. doi: 10.1016/0022-0396(91)90092-N .
16. Kuratowski K., Ryll-Nardzewski C. A general theorem on selectors. *Bull. Polish Acad. Sc.*, 1965, vol. 13, pp. 397–403.
17. Aubin J.P., Frankowska H. *Set-valued analisys.* Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1990, 461 p. ISBN: 0817634789 .
18. Polovinkin E.S., Smirnov G.V. An approach to the differentiation of set-valued mappings, and necessary conditions for optimization of solutions of differential inclusions. *Diff. Eq.*, 1986, vol. 22, no. 6, pp. 660–668.
19. Polovinkin E.S., Smirnov G.V. Time-optimal problem for differential inclusions. *Diff. eq.*, 1986, vol. 22, no. 8, pp. 940–952.
20. Clarke H. *Optimization and nonsmooth analysis.* N Y: Wiley, 1983, 308 p. Translated to Russian under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow: Nauka Publ., 1988, 280 p.
21. Boltyanskii V.G. The method of tents in the theory of extremal problems. *Russ. Math. Surv.*, 1975, vol. 30, no. 3, pp. 1–54. doi: 10.1070/RM1975v030n03ABEH001411 .

Received December 3, 2018
Revised January 17, 2019
Accepted January 21, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00209a).

Evgeny Sergeevich Polovinkin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudnyi, Moscow region, 141700 Russia, e-mail: polovinkin.es@mipt.ru .