Л. В. Розовский, Вероятности больших уклонений на борелевских множествах, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1983, том 130, 157–166

Л.В.Розовский

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ НА БОРЕЛЕВСКИХ МНОЖЕСТВАХ

I. Пусть $X_1, X_2,\ldots$ – последовательность независимых случайных векторов из k – мерного евклидового пространства R_k с общим законом распределения V ; $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

В дальнейшем $\mathfrak{B}$ – класс борелевских множеств A в R_k , $\Phi(A) = \int_A \varphi(x)\,dx$ – k – мерное нормальное распределение с нулевым вектором средних и единичной ковариационной матрицей.

В [I] изучались условия, при которых

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \in A_n\right\} = \Phi(A_n)(1 + o(1)), \quad n \to \infty \tag{I}$$

равномерно по всем последовательностям $\{A_n,\ A_n \in \mathfrak{B}\}$ таким, что

$$\Phi(A_n) \geqslant \Phi\{x : |x| > \Lambda(\sqrt{n})/\sqrt{n}\}, \tag{2}$$

где $\Lambda(z)$ – дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая при всех $z \geqslant z_0$ и некотором $\varepsilon > 0$ следующим условиям:

$$1 + \varepsilon \leqslant z\Lambda'(z)/\Lambda(z) \leqslant 2 - \varepsilon ; \tag{3а}$$

$$\varepsilon\Lambda(z)/z^3 \leqslant -\left(\frac{\Lambda'(z)}{z}\right)' \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\Lambda(z)/z^3 \tag{3в}$$

(отметим, что условие (3а) исключает из рассмотрения функции $\Lambda(z)/z$, растущие к бесконечности достаточно медленно).

В настоящей работе продолжены исследования [I], (где можно найти соответствующие ссылки) изучается точность аппроксимации вероятности $P\{\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \in A_n\}, A_n \in \mathfrak{B}$ величиной $\Phi(A_n)$ при более слабых ограничениях на $\Lambda(z)$.

Пусть $s \geqslant 2$ – целое число, функции $\Lambda(z)$ и $\varepsilon(z)$ удовлетворяют условиям

$$\Lambda(z)/z \uparrow \infty, \quad \Lambda(z)/z^{1+\varepsilon_0} \downarrow, \quad 0 < \varepsilon_0 < 1, \quad z \geqslant z_0 ; \tag{4}$$

$$\varepsilon(z) > 0, \ z^{2-s}\varepsilon(z) \downarrow 0, \ z \geqslant z_1 ; \ \liminf_{z \to \infty} \varepsilon(z) = 0 ; \tag{5}$$

$$\varepsilon(z)/\varepsilon(2z) = O(1), \quad z \to \infty ; \tag{6}$$

$$\varepsilon(z) \geqslant \begin{cases} z^{-1}, & \text{если } s \text{ нечетно}, \\ z^{-2} + z(\psi^{-1}(z))^{-2}, & \text{если } s \text{ четно}, \end{cases} \tag{7}$$

где $\psi^{-1}(z)$ – функция обратная $\psi(z) = z^2/\Lambda(z)$ (отметим, что $\psi^{-1}(z)/z \uparrow \infty$, $\psi^{-1}(z)/z^{\frac{1}{1-\varepsilon_0}} \downarrow$). Положим

$$\alpha_p(t, z) = \int_{|x| \leqslant z} (t, x)^p\, V(dx), \quad z > 0, \ t \in R_k, \ p = 1, \ldots, s ,$$

и будем говорить, что случайный вектор X_1 имеет момент $\alpha_p(t)$ порядка p , если $\alpha_p(t) = \lim_{z \to \infty} \alpha_p(t, z)$ существует и конечен для всех t, $|t|=1$.

Пусть, если s четно

$$\psi_s(z)=\int\limits_{|y|>z}|y|^s V(dy)+z^{-1}\sup_{|t|=1}|\alpha_{s+1}(t,z)|+z^{-2}\int\limits_{|y|\le z}|y|^{s+2}V(dy)$$

и $\psi_s(z)=z\psi_{s-1}(z)$, если s нечетно. Положим также

$$\varkappa_s(z)=\frac{(\Lambda(z))^s}{z^{2s-2}}\,\varepsilon(z^2/\Lambda(z)),\quad v_s(z)=\varkappa_s(\Lambda^{-1}(z)),\tag{8}$$

$\Gamma(u,z)=u\left(z-\frac{1}{2}u\right)(\Lambda(z))^{-2}$, где $u>0$, $z>z_0$.

Пусть H - класс непрерывно дифференцируемых функций $h:R_k\to R_1$, удовлетворяющих при всех $z>z_0$ и векторах $\theta\in R_k$, $|\theta|=1$ следующим условиям:

$$c_1<h(z\theta)<c_2(z/\Lambda^{-1}(z))^{k-1},\quad 0<c_1<1<c_2;\tag{9a}$$

$$\frac{1}{\varphi_k}\int\limits_{|\theta|=1}h(z\theta)\,ds=1,\quad \varphi_k=2\pi^{k/2}/\Gamma(k/2);\tag{9в}$$

$$0\le z\frac{dh(z\theta)}{dz}\le c_2h(z\theta).\tag{9c}$$

Здесь ds - элемент поверхности сферы $\{\theta:|\theta|=1\}$.

ТЕОРЕМА I. Пусть $s\ge 2$ - целое число, функции $\Lambda(z)$ и $\varepsilon(z)$ удовлетворяют условиям (4)-(7) и

$$\varepsilon(z)\ge z^{s-2}\exp\left(-\left(\tfrac{1}{2}-q\right)(z/\Lambda^{-1}(z))^2\right),\quad q>0,\quad z\ge z_q;\tag{I0}$$

$$E(t,X_1)=0,\quad E(t,X_1)^2=|t|^2,\quad \forall t\in R_k;\tag{II}$$

А) при некотором n_0 распределение суммы S_{n_0} имеет ненулевую абсолютно непрерывную компоненту.

При сделанных предположениях соотношение

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}S_n\in A_n\right\}=\Phi(A_n)e^{O(\varkappa_s(\sqrt{n}))},\quad n\to\infty\tag{I2}$$

выполняется равномерно по всем последовательностям $\{A_n, A_n\in\mathfrak{F}\}$, удовлетворяющим условию (2), тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

В) случайный вектор X_1 имеет моменты до порядка s включительно и эти моменты совпадают с соответствующими моментами распределения Φ,

С) $\psi_s(z)=O(\varepsilon(z))$; $z\to\infty$;

Д) равномерно по всем $h\in H$

$$L_h(z)\int\limits_{\beta z}^{z}e^{\Gamma(u,z)}\int\limits_{|x|>u}f_h(z,x)V(dx)\,du=O(z^{-1}v_s(z)e^{O(v_s(z))}),\quad z\to\infty.$$

Здесь

$$f_h(z,x)=\int\limits_{|\theta|=1}\exp\left\{\left(1-\frac{|x|}{z}\right)\log h(|x|\theta)-\frac{1}{2}\frac{z|x|}{(\Lambda^{-1}(x))^2}(\widehat{x,\theta})^2\right\}ds,\tag{I3}$$

$(\widehat{x,\theta})$ - угол между векторами x и θ (при $k=1$ принимаем

$f_h = 1$), β - произвольное фиксированное число из интервала $(0, \delta_*)$, где $\delta_* = \delta_*(\varepsilon_0) < 1$ - корень уравнения (см. (4)) $\delta + \delta^{-(1-\varepsilon_0)/(1+\varepsilon_0)} = 2$ ($\delta_*(\frac{1}{3}) = 0.382\ldots$, $\delta_*(\frac{1}{4}) = 0.521\ldots$, $\delta_*(\frac{1}{9}) = 0.7796\ldots$).

Для сферически симметричного V условие Д) равносильно условию

$$\int_{\beta z}^{z} e^{\Gamma(u,z)} \int_{|x|>u} V(dx)\,du = O\Big(\Big(\frac{z}{\Lambda^{-1}(z)}\Big)^{k-1} \frac{v_s(z)}{z}\, e^{O(v_s(z))}\Big), \quad z \to \infty.$$

Если $\varkappa_s(z)$ стремится к нулю с ростом z, то имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть $s \geq 2$ - целое, функции $\Lambda(z)$ и $\varepsilon(z)$ удовлетворяют (4)-(7), (10) и $\varepsilon(z) = o(z^{s}(\Psi^{-1}(z))^{-2})$, $z \to \infty$. Для выполнения соотношения

$$P\Big\{\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \in A_n\Big\} = \Phi(A_n)(1 + O(\varkappa_s(\sqrt{n}))), \quad n \to \infty \tag{14}$$

равномерно по всем последовательностям $\{A_n, A_n \in \mathfrak{B}\}$, удовлетворяющим (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия А)-Д), причем в Д) выражение $e^{O(v_s(z))}$ может быть заменено единицей.

Из доказательств следует, что достаточность в теоремах I и 2 остается справедливой, если условие (10) заменить условием

$$\varepsilon(z) \geq z^{s-2} exp\Big(-\frac{1}{q}\Big(\frac{\Psi^{-1}(z)}{z}\Big)^2\Big), \quad q > 0, \quad z \geq z_q. \tag{15}$$

Кроме того, необходимость в теоремах I и 2 выполняется, если соотношение (12) имеет место равномерно по всем последовательностям $\{A_n, A_n \in \mathfrak{B}\}$ таким, что

$$\Phi\Big\{x : |x| > r_0 \frac{\Lambda(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\Big\} \geq \Phi(A_n) \geq \Phi\Big\{x : |x| > \frac{\Lambda(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\Big\}, \tag{16}$$

где r_0 - некоторое достаточно малое положительное число, зависящее лишь от постоянных ε_0 и q из условий (4) и (10).

Легко видеть, что условия (15) и (6) выполняются если

$$\varepsilon(z) z^{M} \uparrow, \quad M > 0, \quad z \geq z_M. \tag{17}$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Условие Д) равносильно условию

Д$_1$) для $\forall \delta > 0$ $\int_{|y|>\delta\Lambda(z)} \Phi(A - \frac{y}{z}) V(dy) = O(z^{-2} \varkappa_s(z) e^{O(\varkappa_s(z))} \Phi(A))$, $z \to \infty$,

равномерно по множествам A, являющимся дополнениями выпуклых множеств в R_k и удовлетворяющим условию $\Phi(A) \geq \Phi\{x : |x| > \Lambda(z)/z\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предположим, что $\Lambda(z)$ - дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\Lambda(z)/z \uparrow \infty, \quad z(\Lambda(z)/z)' < c_3(1 + \sqrt{\varkappa_s(z)}), \quad z \geq z_1, \tag{18}$$

а функция $\varepsilon(z)$ удовлетворяет условиям (5) и (6). Тогда условие Д) равносильно условию

$$\int_{|x|>z} V(dx) = O\Big(\Big(\frac{z}{\Lambda^{-1}(z)}\Big)^{k} \frac{v_s(z)}{z^2} exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{z}{\Lambda^{-1}(z)}\Big)^2 + O(v_s(z))\Big)\Big), \quad z \to \infty. \tag{19}$$

При $s \geq 3$ из (18) следует, что $\varkappa_s(z) = o(1)$, $v_s(z) = O(1)$, $z \to \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $\Lambda(z)$ - дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (4) и (3а); функция $\varepsilon(z)$ удовлетворяет условиям (5) и (6). Тогда условие Д) равносильно условию

$$I_H(z)=\sup_{h\in H}\int\limits_z^{z+\Lambda^{-1}(z)} e^{g(u)}\int\limits_{|x|>u} f_h(Z(u),x)V(dx)\,du=O(z^{-1}v_s(z)e^{O(v_s(z))}),\ z\to\infty . \quad (20)$$

Здесь $g(u)=\Gamma(u,Z(u))$, $Z(u)$ - решение уравнения $\Gamma_z'(u,z)=0$, $u\geqslant u_0$, существующее и единственное в силу условий (4) и (3в).

Если кроме того, функция $\Lambda(z)$ удовлетворяет условиям (3), то соотношение (20) равносильно условию

$$\sup_{h\in H}\int\limits_{z<|x|\leqslant z+\Lambda^{-1}(z)} e^{g(|x|)} f_h(Z(|x|),x)V(dx)=O\Big(\frac{v_s(z)}{(\Lambda^{-1}(z))^2}e^{O(v_s(z))}\Big),\quad z\to\infty . \quad (21)$$

Далее приведем некоторые следствия наших теорем и замечаний.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть функция $\Lambda(z)$ удовлетворяет условиям (4) и

$$\Lambda(z)\geqslant(1+q)z\sqrt{(2s-4)\ln z}\,,\quad q>0,\quad z\geqslant z_q\,, \quad (22)$$

где

$$s=\max\{\ell:\ell \text{ целое},\ \limsup_{z\to\infty}(\Lambda(z))^{\ell}/z^{2\ell-2}>0\} . \quad (23)$$

Для того, чтобы

$$P\{\tfrac{1}{\sqrt{n}}S_n\in A_n\}=\Phi(A_n)(1+o(1)),\quad n\to\infty$$

равномерно по всем последовательностям $\{A_n, A_n\in\mathfrak{B}\}$, удовлетворяющим (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия А) В) теоремы I и, кроме того, условия

$$\Psi_s(z)=o(z^s(\Psi^{-1}(z))^{-2}),\quad z\to\infty ; \quad (24)$$

$$\sup_{h\in H} L_h(z)=o(z^{-1}),\quad z\to\infty . \quad (25)$$

Если дополнительно к сделанным предположениям функция $\Lambda(z)$ удовлетворяет условию (3в), то (25) равносильно условию

$$I_H(z)=o(z^{-1}),\quad z\to\infty . \quad (26)$$

Достаточность в следствии I справедлива, если $\Lambda(z)>qz\sqrt{\ln z}$, $q>0$, $z>z_q$. Следствие I уточняет основной результат работы [I].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функции $\Lambda(z), \varkappa_0(z)$ удовлетворяют условиям

$$\Lambda(z)z^{-1}\uparrow\infty,\ (\Lambda(z)z^{-1})'=O(z^{-1}),\ z\to\infty ; \quad (27)$$

$$\varkappa_0(z)\downarrow 0,\ \varkappa_0(z)\frac{z^2}{\Lambda(z)}\uparrow,\ \varkappa_0(z)\geqslant\exp\Big(-\big(\tfrac{1}{2}-q\big)\Big(\frac{\Lambda(z)}{z}\Big)^2\Big),\quad q>0,\ z\geqslant z_q .$$

Для того, чтобы $P\{\frac{1}{\sqrt{n}}S_n\in A_n\}=\Phi(A_n)(1+O(\varkappa_0(\sqrt{n})))$, $n\to\infty$ равномерно по всем последовательностям $\{A_n, A_n\in\mathfrak{B}\}$, удовлетворяющим (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия А) теоремы I, (II) и, кроме того

$$z^{-1}\sup_{|t|=1}\Big|\int\limits_{|x|<z}(t,x)^3V(dx)\Big|+\int\limits_{|x|>z}|x|^2V(dx)=O\Big(\varkappa_0(\Lambda(z))\frac{z^2}{(\Lambda(z))^2}\Big),\quad z\to\infty ;$$

$$\int\limits_{|x|>z} V(dx)=O\left(\varkappa_0\left(\frac{z^2}{\Lambda(z)}\right)\left(\frac{\Lambda(z)}{z}\right)^K z^{-2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\Lambda^{-1}(z)}\right)^2\right)\right), \quad z\to\infty .$$

В частности, утверждение следствия I выполняется тогда и только тогда, когда выполняются условия A) теоремы I, (II) и

$$\int\limits_{|x|>z} |x|^2 V(dx) = o\left(\frac{z^2}{(\Lambda(z))^2}\right), \quad z\to\infty ,$$

$$\int\limits_{|x|>z} V(dx)= o\left(z^{-2}(\Lambda(z)z^{-1})^K\exp\left(-\frac{1}{2}(z/\Lambda^{-1}(z))^2\right)\right), \quad z\to\infty .$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть дважды дифференцируемая функция $\Lambda(z)$ удовлетворяет условиям (4), $0<\varepsilon_0<1/3$, и (3в); а $\varkappa_0(z)$ такова, что $\varkappa_0(z)\downarrow 0$, $\varkappa_0(z)z^2/\Lambda(z)\uparrow$, $\varkappa_0(z)\geq \exp\left(-\left(\frac{1}{2}-q\right)(\Lambda(z)z^{-1})^{2(1-\varepsilon_0)/(1+\varepsilon_0)}\right)$.

Утверждение следствия 2 выполняется тогда и только тогда, когда выполняются условия A) теоремы I, (II) и, кроме того,

$$\int\limits_{|x|>z}|x|^2V(dx)+z^{-1}\sup_{|t|=1}\left|\int\limits_{|x|\leq z}(t,x)^3V(dx)\right|= O\left(\varkappa_0(\Psi^{-1}(z))\left(\frac{z}{\Psi^{-1}(z)}\right)^2\right), \quad z\to\infty ;$$

$$I_H(z) = O\left(z^{-1}\varkappa_0(\Lambda^{-1}(z))\right), \quad z\to\infty .$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $s\geq 3$ – целое, дважды дифференцируемая функция $\Lambda(z)$ удовлетворяет условиям (3в) и $\Lambda(z)/z^{2-2/s}\uparrow$, $z\geq z_s$. Пусть функция $\varkappa_s(z)$ такова, что $\varkappa_s(z)\downarrow 0$, $\varkappa_s(z)z^{2s}/(\Lambda(z))^{s+1}\uparrow$, $z\geq z_s$.

Для того чтобы выполнялось утверждение теоремы 2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия A), B) и кроме того,

$$\sup_{h\in H}\int\limits_{z<|x|<\Lambda^{-1}(z)+z} e^{g(|x|)} f_h(Z(|x|),x)V(dx)=O\left(\frac{\varkappa_s(\Lambda^{-1}(z))}{(\Lambda^{-1}(z))^2}\right), \quad z\to\infty . \tag{28}$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть функция $\Lambda(z)$ такова, что $\Lambda(z)/z\uparrow\infty$; $(\ln(\Lambda(z)/z))'= O(z^{-1})$, $z\to\infty$; выполняются условия A) и (II). Для того, чтобы при всех $r_0\in(0,1)$

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}S_n\in A_n\right\}=\Phi(A_n)\exp\left(o\left(\frac{\Lambda^2(\sqrt{n})}{n}\right)\right), \quad n\to\infty$$

равномерно по последовательностям $\{A_n, A_n\in\mathfrak{X}\}$, удовлетворяющим (I6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_{|x|>z} V(dx)=O\left(z^{-2}\exp\left(-\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)(z/\Lambda^{-1}(z))^2\right)\right), \quad z\to\infty . \tag{29}$$

Различные следствия из теорем I, 2 и замечаний I–3 можно формулировать аналогично их одномерным вариантам (см. [2], [3]).

Доказательства приведенных утверждений в значительной мере используют результаты из [I] – [3].

2. Пусть $\Phi_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-t^2/2}dt$.

ЛЕММА I. Пусть выполняются условия теоремы I. Если для каждого $\tau\in(0,1)$ и каждого $t\in R_K$, $|t|=1$,

$$P\{|\sum_{\ell=1}^{n}(t,X_\ell)|>u\}=(1-\Phi_1(u/\sqrt{n}))\,e^{O(\varkappa_s(\sqrt{n}))},\quad n\to\infty \tag{30}$$

равномерно относительно u в области $\frac{1}{2}\tau\Lambda(\sqrt{n})<u<\frac{1}{2}\Lambda(\sqrt{n})$, то выполняются условия B) и C).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись [2], теорема Iа (необходимость), получим для каждого $t\in R_K$, $|t|=1$ при $z\to\infty$:

$$\gamma_\ell(t,z)=\int_{|(t,x)|\le z}(t,x)^\ell V(dx)\to\xi_\ell(t)=\int_{R_K}(t,x)^\ell\Phi(dx),\quad 3\le\ell\le s;$$

$$\int_{|(t,x)|>z}(t,x)^s V(dx)+z^{-1}|\gamma_{s+1}(t,z)|+z^{-2}\gamma_{s+2}(t,z)=O(\varepsilon(\tfrac{z}{2}))\qquad (s\ \text{четно});$$

$$z\to\infty$$

$$z\int_{|(t,x)|>z}(t,x)^{s-1}V(dx)+|\gamma_s(t,z)|+z^{-1}\gamma_{s+1}(t,z)=O(\varepsilon(\tfrac{z}{2}))\qquad (s\ \text{нечетно}).$$

Отсюда(подробнее см. [4], (7)-(9)) следует утверждение леммы I.

Пусть $\delta>0$. Введем распределение V_δ на R_K, положив

$$V_\delta(dx)=\begin{cases}V(dx), & |x|\le\delta\Lambda(\sqrt{n}),\\ 0, & |x|>\delta\Lambda(\sqrt{n}).\end{cases}$$

Пусть $V_{\delta n}(A)=V_\delta^{*n}(A)$, $P_n(A)=P\{S_n\in A\}$, $A\in\mathfrak{B}$.

Представим распределение $V_{\delta n}$ в виде:

$$V_{\delta n}(A)=\int_A q_{\delta n}(x)\,dx+S_{\delta n}(A),\quad A\in\mathfrak{B}, \tag{3I}$$

где $q_{\delta n}(x)\ge 0$ - плотность, $S_{\delta n}$ - распределение на R_K.

Следующая лемма уточняет лемму 3 работы [I].

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия (5),(7),(I5), а также условия A)-C) и $M>4\sqrt{\frac{K'}{q}}$, где q взято из условия (I5).

Если при некотором $\delta>0$ и любом $\rho\ge 1$

$$\int_{|x|>\rho\tau^{-1}}e^{\tau|x|}V_\delta(dx)=O(\tau^s\varepsilon(\rho/\tau)),\quad n\to\infty \tag{32}$$

равномерно по $\tau\in R_1$, $0\le\tau\le M\Lambda(\sqrt{n})/n$, то

$$V_{\delta n}\{x:|x|>M\Lambda(\sqrt{n})\}=O(n^{-\frac{s-2}{2}}\varepsilon(\tfrac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})})\exp(-\tfrac{(\Lambda(\sqrt{n}))^2}{n}),\quad n\to\infty. \tag{33}$$

Кроме того, для $V_{\delta n}$ существует такое разложение (3I), что

$$S_{\delta n}(R_K)<e^{-\varepsilon_0 n}; \tag{34}$$

$$q_{\delta n}(x)=(2\pi n)^{-k/2}\exp(-\frac{|x|^2}{2n}+O\,(\,\varepsilon(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})})\frac{(\Lambda(\sqrt{n}))^3}{n^{s-1}}),\quad n\to\infty \tag{35}$$

равномерно по $x\in R_K$, $|x|\le M\Lambda(\sqrt{n})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f_\delta(z)=\int_{R_K}e^{(z,x)}V_\delta(dx)$, $z=h+iv$, $v\in R_K$.

При сделанных в лемме 2 предположениях так же как и в [I], лемма 3, можно показать, что выполняется условие (34) и

$$q_{\delta n}(x)=(2\pi)^{-k}\int\limits_{|v|<\varepsilon_0} e^{-(z,x)} f_\delta^n(z)\,dv+O(e^{-\varepsilon_0} f_\delta(h))^n, \quad n\to\infty \tag{36}$$

равномерно по $x\in R_k$ и h, $|h|\le M\frac{\Lambda(\sqrt{n})}{n}$, где ε_0 – некоторая достаточно малая положительная постоянная, не зависящая от x, h и v.

Покажем, что при $|h|\le M\frac{\Lambda(\sqrt{n})}{n}$ и $|z|\le\varepsilon_0$

$$\ln f_\delta(z)=\frac{1}{2}(z,z)+O(|z_n|^s\varepsilon(c/|z_n|)),\ n\to\infty, \tag{37}$$

где $c=2\sqrt{2}M$, $z_n=\max\{|z|,1/\Lambda(\sqrt{n})\}$. Имеем

$$f_\delta(z)=\int\limits_{|(z,x)|\le c} e^{(z,x)}V_\delta(dx)+\int\limits_{|(z,x)|>c} e^{(z,x)}V_\delta(dx)=I_1+I_2, \tag{38}$$

$$I_1=\int\limits_{|(z,x)|\le c}\left(1+\ldots+\frac{1}{(s_*+1)!}(z,x)^{s_*+1}+\theta_1(z,x)^{s_*+2}\right)V(dx)+$$

$$+\theta_2\int\limits_{|x|>\delta\Lambda(\sqrt{n})} V(dx)=\sum_{\ell=0}^{s}\frac{1}{\ell!}\xi_\ell(z)+O(|z_n|^s\varepsilon(c/|z_n|)),\ n\to\infty, \tag{39}$$

где $s_*=s$, если s четное, и $s_*=s-1$, если s нечетное; $|\theta_i|<e^c$. Далее, согласно условию (32), $\rho=c$,

$$|I_2|=\left|\int\limits_{|(z,x)|>c\ge|(h,x)|}+\int\limits_{|(h,x)|>c}\right|\le$$

$$\le e^c\int\limits_{|x|>c|z|^{-1}} V_\delta(dx)+\int\limits_{|x|>c|h|^{-1}} e^{|h|}V_\delta(dx)=O(|z_n|^s\varepsilon(c|z_n|^{-1})),\ n\to\infty. \tag{40}$$

Из (38)-(40) следует, что

$$f_\delta(z)-1=\frac{1}{2}(z,z)+\sum_{\ell=3}^{s}\frac{1}{\ell!}\xi_\ell(z)+O(|z_n|^s\varepsilon(c|z_n|^{-1})),\ n\to\infty. \tag{41}$$

Соотношение (37) следует теперь из оценки (41), условия (7), равенства $\ln f_\delta(z)=\sum_{\ell=1}^{s_*/2}(-1)^\ell\ell^{-1}(f_\delta(z)-1)^\ell+\theta(f_\delta(z)-1)^{(s_*+2)/2}$, $|\theta|<1$ и свойств моментов распределения Φ.

Вернемся к равенству (36). Пусть в нем $h=\frac{x}{n}$, $|x|\le M\Lambda(\sqrt{n})$. Воспользовавшись соотношениями (37) и

$$|z|^s\varepsilon(c|z|^{-1})\le 2^{s/2}(|h|^s\varepsilon(2M|h|^{-1})+|v|^s\varepsilon(2M|v|^{-1}))$$

легко получим

$$q_{\delta n}(x)=(2\pi\sqrt{n})^{-k}e^{-\frac{|x|^2}{2n}}+O\left(n\left(\frac{\Lambda(\sqrt{n})}{n}\right)^s\varepsilon\left(\frac{2Mn}{\Lambda(\sqrt{n})}\right)\times\right.$$

$$\times\int\limits_{|v|<\varepsilon_0\sqrt{n}}\exp\left(-\frac{1}{2}|v|^2+O\left(n\left(\frac{|v|}{\sqrt{n}}\right)^s\varepsilon\left(\frac{2M\sqrt{n}}{|v|}\right)\right)\right)dv+O(e^{-\varepsilon_0}f_\delta(h))^n,\ n\to\infty \tag{42}$$

равномерно по x, $|x|\le M\Lambda(\sqrt{n})$.

Покажем теперь, что

$$I=\int\limits_{|v|<\varepsilon_0\sqrt{n}}\exp\left(-\frac{1}{2}|v|^2+O\left(n\left(\frac{|v|}{\sqrt{n}}\right)^s\varepsilon\left(\frac{2M\sqrt{n}}{|v|}\right)\right)\right)dv=(2\pi)^{k/2}\exp\left(O\left(\frac{(\Lambda(\sqrt{n}))^s}{n^{s-1}}\varepsilon\left(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})}\right)\right)\right),\ n\to\infty. \tag{43}$$

Достаточно рассмотреть случай $\frac{(\Lambda(\sqrt{n}))^s}{n^{s-1}}\varepsilon\left(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})}\right)<1$, поскольку иначе соотношение (43) выполняется тривиальным образом.

Пусть $\overline{\Lambda}(z)=\Lambda(z)/z$. Разобьем интеграл I на сумму I_1+I_2 интегралов по множествам $\{|v|\le M\overline{\Lambda}(\sqrt{n})\}$ и $\{M\overline{\Lambda}(\sqrt{n})<|v|<\varepsilon_0\sqrt{n}\}$, соответственно. Тогда для всех достаточно больших n

$$I_2\le\int\limits_{|v|\ge M\overline{\Lambda}(\sqrt{n})}\exp\left(-\frac{1}{3}|v|^2\right)dv\le\exp\left(-\frac{1}{4}M^2(\Lambda(\sqrt{n}))^{-2}\right),$$

$$I_1=\int\limits_{|v|<M\overline{\Lambda}(\sqrt{n})}\exp\left(-\frac{1}{2}|v|^2\right)\left(1+O\left(n\left(\frac{|v|}{\sqrt{n}}\right)^3\varepsilon\left(\frac{2M\sqrt{n}}{|v|}\right)\right)\right)dv=$$

$$=(2\pi)^{K/2}+O\left(\exp\left(-\frac{1}{4}M^2\overline{\Lambda}(\sqrt{n})\right)+n^{-\frac{s-2}{2}}\varepsilon\left(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})}\right)\right),\quad n\to\infty.$$

Таким образом (см. (I5) и (4)) ($n\to\infty$)

$$I=(2\pi)^{K/2}\left(1+o\left(\frac{(\Lambda(\sqrt{n}))^s}{n^{s-1}}\varepsilon\left(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})}\right)\right)\right)=(2\pi)^{K/2}\exp\left(O\left(\frac{(\Lambda(\sqrt{n}))^s}{n^{s-1}}\varepsilon\left(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})}\right)\right)\right),\tag{44}$$

что доказывает (43). Из соотношений (4I)-(44) следует (35).

Докажем оценку (33). Имеем ($x=(x_1,\dots,x_K)\in R_K$)

$$V_{\delta n}\{x:|x|>M\Lambda(\sqrt{n})\}\le\sum_{\ell=1}^{K}V_{\delta n}\left\{x:|x_\ell|\ge\frac{M}{\sqrt{K}}\Lambda(\sqrt{n})\right\}=\sum_{\ell=1}^{K}I_\ell.\tag{45}$$

По неравенству Чебышева и (37) при $\omega=M\Lambda(\sqrt{n})/2\sqrt{nK}$

$$I_\ell\le e^{-2\omega^2}\left(\left(\int\limits_{R_K}e^{\frac{\omega}{\sqrt{n}}x_\ell}V_\delta(dx)\right)^n+\left(\int\limits_{R_K}e^{-\frac{\omega}{\sqrt{n}}x_\ell}V_\delta(dx)\right)^n\right)\le e^{-\omega^2}.$$

Отсюда, из (45) и (I5) следует (33). Лемма 2 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы I. Нами будет доказано, что в условиях теоремы I соотношение (I2) выполняется равномерно по всем $\{A_n, A_n\in\mathcal{B}\}$, удовлетворяющим (2), тогда и только тогда, когда выполняются условия В),С) и Д)(равносильность Д) и Д$_1$) можно доказать методами работы [I]).

Несложно доказать, что при любом $\delta>0$ и $A\in\mathcal{B}$

$$n\int\limits_{|y|>\delta\Lambda(\sqrt{n})}V_{\delta,n-1}(A-y)V(dy)\le P_n(A)-V_{\delta n}(A)\le n\int\limits_{|y|>\delta\Lambda(\sqrt{n})}P_{n-1}(A-y)V(dy).\tag{46}$$

Легко показать, что если $0<\delta\le 1$ и $E_n=\{x:|x|>\Lambda(\sqrt{n})\}$, то

$$n\int\limits_{|y|>\Lambda(\sqrt{n})}V_{\delta,n-1}(E_n-y)V(dy)\ge\sup_{y\in R_K}V_{\delta,n-1}\{x:(x,y)\ge 0\}\,n\int\limits_{|y|>\Lambda(\sqrt{n})}V(dy).\tag{47}$$

Поскольку (см.(4) и (II)) $\sup\limits_{y\in R_K}|(V_{\delta,n-1}-\Phi)(x:(x,y)\ge 0)|=o(1)$, $n\to\infty$, то из (46), (47) вытекает, что для всех $n\ge n_0$

$$P_n(E_n)\ge\frac{1}{3}nP\{|X_1|>\Lambda(\sqrt{n})\}.\tag{48}$$

Докажем теперь, что соотношение (I2)является необходимым для выполнения условий В), С) и Д$_1$). Из (I2) легко вытекает (30) и, следовательно, выполняются условия В) и С) теоремы I (см.лемму I). Далее, из (48) и (I2), $A_n\equiv E_n$ заключаем (см.также лемму 2 из [3]), что

$$P\{|X_1|>z\}=O(z^{-2}\exp(-(\tfrac{1}{2}-q_0)(z/\Lambda^{-1}(z))^2)),\ z\to\infty\ , \tag{49}$$

где $q_0>0$ сколь угодно мало. Из (49) вытекает, что

$$\int\limits_{|x|>\rho} e^{|h||x|}V_\delta(dx)=O\Big(\frac{1+\rho|h|}{\rho^2}\exp\Big(-\frac{1-q_0}{2}\Big(\frac{\rho}{\Lambda^{-1}(\rho)}\Big)^2\Big)\Big),\qquad n\to\infty \tag{50}$$

равномерно по $|h|\le M\Lambda(\sqrt{n})n^{-1}$ и $\rho\ge 1$, если $\delta=\delta(M,q_0,\varepsilon_0)$ выбрано достаточно малым (ε_0- постоянная из (4)). Таким образом (см. (I0)), выполняются условия леммы 2 и, следовательно, соотношения (33)-(35).

Для проверки выполнения условия Д$_1$) достаточно, выбрав $n=\min\{\ell:\ell^2>z\}$, применить соотношения (33) и (35) к левой части неравенства (46)(при этом следует иметь в виду, что $\varepsilon\big(\frac{n}{\Lambda(\sqrt{n})}\big)\le\varepsilon\big(\frac{z^2}{\Lambda(z)}\big)$) . Итак (I2) $\Longrightarrow$ В),С),Д$_1$).

Докажем обратное утверждение, причем вместо условия (I0) будем пользоваться более слабым условием (I5). Предварительно отметим, что из условия Д$_1$),$A=\{x:|x|>\frac{\Lambda(z)}{z}\}$, следует (I9).

Из (I9), в частности, вытекает, что

$$P\{|X_1|>z\}=O\Big(z^{-3}\varepsilon\Big(\frac{(\Lambda^{-1}(z))^2}{z}\Big)e^{-(\frac{1}{2}-q_0)(z/\Lambda^{-1}(z))^2}\Big)\ ,\ z\to\infty\ , \tag{5I}$$

где $q_0>0$ сколь угодно мало . Пользуясь (I5) и (5I) вместо (I0) и (49), соответственно, убедимся в справедливости (32). Лемма 2 и (46) позволяют заключить, что равномерно по $n\ge n_0$ и множествам $A\in\mathcal{B}$, удовлетворяющим условию (2) (при $A_n\equiv A$),

$$\Phi(A)e^{O(\varkappa_3(2\sqrt{n}))}\le P_n(\sqrt{n}A)\le\Phi(A)\,e^{O(\varkappa_3(2\sqrt{n}))}+I_n(A)\ , \tag{52}$$

где $I_n(A)=n\int\limits_{|y|>\delta\Lambda(\sqrt{n})}P_{n-1}(\sqrt{n}A-y)\,V(dy)$.

Пусть L - натуральное число, $L\ge 1/\delta$. Будем говорить, что множество $A\in\mathcal{B}$ удовлетворяет условию $E_{\ell,n}$) , если

$E_{\ell,n}$) $\qquad \Phi(A)\ge Q_n(\ell)=\int\limits_{|x|\ge(\ell/L)\Lambda(\sqrt{n})}\varphi(x)dx$.

Поскольку

$$I_n(R_k)\le n\int\limits_{|y|>1/L\Lambda(\sqrt{n})}V(dy)\le Q_n(2)\,\varepsilon\Big(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})}\Big)\ ,$$

если L и n достаточно велики (см.условия (I5),(4)-(6) и (5I); также [3],(33)),то из (52), в частности, следует, что

$$P_n(\sqrt{n}A)=\Phi(A)\,e^{O(\varkappa_3(\sqrt{n+L}))}\ ,\quad n\to\infty\ , \tag{53}$$

равномерно по множествам $A\in\mathcal{B}$, удовлетворяющим условию $E_{\ell,n}$), $\ell=2$.

Пусть $B_*=\{y:\Phi(\sqrt{\tfrac{n}{n-1}}A-y/\sqrt{n-1})\ge Q_{n-1}(2)\}$, $B_*^c=R_k/B_*$,

$$\widetilde{A}=\{x:x\in A,|x|\le 4\Lambda(\sqrt{n})\}\ ,\ A\in\mathcal{B},\ x,y\in R_k\ ,$$

$$\mathcal{U}=\{y:|y|>\tfrac{1}{L}\Lambda(\sqrt{n})\}\ .$$

Согласно условию (53) для всех $n \geqslant n_1$

$$I_n(A) \leqslant n \int\limits_{\mathcal{U} \cap B_*} P_{n-1}(\sqrt{n}A - y)V(dy) + n \int\limits_{\mathcal{U} \cap B_*^c} P_{n-1}(\sqrt{n}A - y)V(dy) \leqslant n \int\limits_{|y| > \Lambda(\sqrt{2n})} V(dy) +$$

$$+ n \int\limits_{\Lambda(\sqrt{2n}) \geqslant |y| \geqslant \Lambda(\sqrt{n})L^{-1}} \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\tilde{A} - \frac{y}{\sqrt{n-1}}\right) e^{O(\varkappa_3(\sqrt{n+L-1}))} V(dy) + 2n Q_{n-1}(2) e^{O(\varkappa_3(\sqrt{n+L-1}))} \int\limits_{|y| > \frac{1}{L}\Lambda(\sqrt{n})} V(dy) = \tag{54}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 .$$

Так же как в [3], (47) можно показать, что

$$I_3 \leqslant Q_n(3)\, \varepsilon\left(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})}\right), \quad n \geqslant n_2 . \tag{55}$$

Далее

$$I_2 \leqslant c_1 n e^{O(\varkappa_3(\sqrt{n+L-1}))} \int\limits_{|y| > \frac{1}{2L}\Lambda(\sqrt{n+L-1})} \Phi\left(A - \frac{y}{\sqrt{n+L-1}}\right) V(dy) . \tag{56}$$

Оценивая I_1 с помощью (I9), получим из (54)-(56) и Д$_1$)

$$I_n(A) = O(\varkappa_3(\sqrt{n+L-1})\, e^{O(\varkappa_3(\sqrt{n+L-1}))} \Phi(A)), \quad n \to \infty$$

равномерно по множествам $A \in \mathcal{Z}$, удовлетворяющим $E_{\ell,n}$) уже при $\ell = 3$. Отсюда следует, что $P_n(\sqrt{n}A) = \Phi(A)\, e^{O(\varkappa_3(\sqrt{n+L-1}))}$, $n \to \infty$, равномерно по A, удовлетворяющим $E_{3,n}$.

Повторив проделанные рассуждения ((53)-(56)) еще $L-3$ раза, завершим доказательство того, что В),С),Д$_1$) $\Longrightarrow$ I2. Теорема 2 является следствием теоремы I и леммы 2 из [I].

Замечание 2 доказывается так же,как замечание I из [3].Следует воспользоваться условием (9а) и в выкладках из ([3],(49),(50)) заменить функцию $d(t,x)$ на $d(t,x) + (1-t)(k-1)\,2\frac{\log \lambda(x)}{\lambda^2(x)}$, $\lambda(x) = x/\Lambda^{-1}(x)$.

Доказательство замечания 3 проводится методами работы [I]. Доказательства следствий I-5 проводятся с помощью соответствующих замечаний и теорем I,2 так же,как и одномерные аналоги в [2],[3].

Литература

I. О с и п о в Л.В. Многомерные предельные теоремы для больших уклонений.-Теор.вероятн.и ее примен.,1975,т.XX,№ I,с.40-57.

2. R o z o v s k y L.V. On asymptotic expansions for probabilities of large deviations.- Selecta math.Sov., 1983.

3. Р о з о в с к и й Л.В. О предельных теоремах для больших уклонений в узких зонах.-Теор.вероятн.и ее примен.,1981, т.XXVI № 4, с.857-867.

4. Р о з о в с к и й Л.В. Оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме без моментных предположений - Матем.заметки, 1978, т. XXIII, № 4, с.627-640.