



A. Kh. Zhurtov, On Frobenius groups that contain an element of order 3,  
*Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2000, Volume 2, Number 2, 19–25

<https://www.mathnet.ru/eng/vmj314>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:  
IP: 18.97.14.84  
May 21, 2025, 17:51:58



УДК 512.54

О ГРУППАХ ФРОБЕНИУСА,  
СОДЕРЖАЩИХ ЭЛЕМЕНТ ПОРЯДКА 3

А. Х. Журтов

Доказывается, что группа Фробениуса  $G$ , порожденная двумя элементами порядка 3, конечна. Ядро группы  $G$  абелево и число его порождающих не превышает числа 8, а дополнение либо циклическое, либо изоморфно одной из групп  $SL_2(3)$ ,  $SL_2(5)$ .

В работе продолжают исследования начатые в [1] и [2]. Часть результатов получены совместно с В. Д. Мазуровым.

Напомним, что группой Фробениуса с ядром  $F$  и дополнением  $H$  называется полупрямое произведение  $F \cdot H$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- а)  $H$  — собственная подгруппа в  $G$  и  $H \cap H^f = 1$  для любого неединичного элемента  $f \in F$ ,
- б)  $F \setminus \{1\} = G \setminus \{H^f | f \in F\}$ .

**Теорема 1.** *Группа Фробениуса  $G$ , порожденная двумя элементами порядка 3, конечна. Ядро группы  $G$  абелево и число его порождающих не превышает числа 8, а дополнение либо циклическое, либо изоморфно одной из групп  $SL_2(3)$ ,  $SL_2(5)$ .*

Доказательству предположим три леммы. В них под модулем для группы или кольца понимается любая аддитивно записанная абелева группа, на которой данная группа или кольцо действует. Для группы  $A$   $A$ -модуль  $V$  называется *фробениусовым*, если  $v(x-1) \neq 0$  и  $V(x-1) = V$  для всех  $V \ni v \neq 0$ ,  $1 \neq x \in A$ .

**Лемма 1.** *Пусть  $m$  — натуральное число и  $V$  — ненулевой  $RA$ -модуль, где  $R$  — поле простого порядка или  $R = \mathbb{Z}[1/m]$  и в этом случае  $V$  не имеет кручения, а  $A = \langle a \rangle$  — циклическая группа. Если модуль  $V$  конечно порожден как  $RA$ -модуль, то существует натуральное число  $n$  такое, что  $V(a^n - 1) \neq V$ .*

◁ Предположим вначале, что  $R = \mathbb{Z}[1/m]$  и  $V$  — противоречащий пример с наименьшим числом  $s$  образующих  $v_1, v_2, \dots, v_s$ . Поскольку  $V(a-1) = V$ ,

то существует ненулевой полином  $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_t x^t \in \mathbb{Z}[x]$  такой, что  $v_s f(a) \in v_1 S + \dots + v_{s-1} S$ , где  $S = R\langle a \rangle$ . Выберем  $f$  наименьшей степени  $t$ . Тогда  $\alpha_0 \neq 0 \neq \alpha_t$  и  $v_s \alpha_t a^t, v_s \alpha_0 a^{-1} \in \sum_{i=1}^{s-1} v_i S$ . Это означает,

что  $V \leq \sum_{i=1}^{s-1} v_i R_1 \langle a \rangle + v_s \sum_{j=0}^{t-1} R_1 a^j = V_1$ , где  $R_1 = \mathbb{Z}[1/m\alpha_0\alpha_t]$ , и  $V_1$  является  $\langle a \rangle$ -модулем над  $R_1$ . Далее,  $V_1(a^n - 1) = V_1$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Если

$v_s(\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{t-1} a^{t-1}) \in \sum_{i=1}^{s-1} v_i R_1 \langle a \rangle$  для некоторого ненулевого вектора

$(\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{t-1}) \in R_1^t$ , то умножив на подходящее натуральное число, мы найдем нетривиальный полином  $g \in \mathbb{Z}[x]$  степени не больше  $s - 1$ ,

для которого  $v_s g(a) \in \sum_{i=1}^{s-1} v_i S$ . Это противоречит выбору  $f$ . По выбору  $V$ ,

$V_1 \neq \sum_{i=1}^{s-1} v_i R_1 \langle a \rangle = V_2$ ,  $V_3 = V_1/V_2$  — ненулевой конечномерный  $\langle a \rangle$ -модуль без

кручения над  $R_1$  с одним порождающим  $v = v_s + V_2$  и  $V_3(a^n - 1) = V_3$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Теперь мы можем рассматривать  $R_1$  как  $R$ ,  $V_3$  как  $V$  и считать, что  $V$  — конечномерный однопорожденный  $S$ -модуль.

В этом случае  $V$  как  $S$ -модуль изоморфен кольцу  $S_0 = S/\ker V$ . Пусть  $p$  — простое число, не делящее  $m$ . Если  $pV = V$ , то  $pv g(a) = v$  для некоторого полинома  $g$  над  $R$  степени не больше  $s - 1$ , и  $v(pg - 1) = 0$  вопреки выбору  $f$ . Поэтому  $pS_0$  — собственный идеал в  $S_0$  и число  $|S_0/pS_0| = |V : pV|$  конечно. Пусть  $M$  — максимальный идеал из  $S_0$  содержащий  $pS_0$ . Тогда  $a \notin M$ ,  $S_0/M$  — конечное поле и поэтому существует  $n \in \mathbb{N}$ , для которого  $a^n + M = 1 + M$ . Другими словами,  $a^n - 1 \in M$ ,  $S_0(a^n - 1) \subseteq M \neq S_0$  и  $V(a^n - 1) \neq V$ . Это противоречие доказывает лемму для  $R = \mathbb{Z}[1/m]$ . Те же рассуждения (с некоторыми очевидными упрощениями) годятся и для поля простого порядка. Лемма доказана.  $\triangleright$

**Лемма 2.** Пусть  $A$  — группа, порожденная двумя элементами  $x, y$  порядка 3 и  $V$  — однопорожденный фробениусов  $A$ -модуль. Тогда  $V$  — конечная абелева группа.

$\triangleleft$  Пусть  $u_0$  — порождающий  $A$ -модуля  $V$  и  $T$  — множество всех элементов конечного порядка из  $V$ . Тогда  $T$  —  $A$ -подмодуль и  $V/T$  — группа без кручения. Если  $T = V$  и  $m$  — порядок элемента  $u_0$ , то  $mV = 0$ . Если  $m = pn$ , где  $p$  — простой делитель числа  $m$ , то  $V_0 = \{x \in V \mid nx = 0\}$  — собственный  $A$ -модуль. Пусть  $V_1 = V/V_0$ . Тогда  $V_1$  — ненулевой однопорожденный фробениусов  $A$ -модуль над полем порядка  $p$ . Если порядок группы  $V_1$  конечен, то и порядок  $V$  конечен. Таким образом, в этом случае достаточно доказать лемму для  $A$ -модуля над полем  $F$  порядка  $p$ .

Если  $T \neq V$ , то  $V_1 = V/T$  — фробениусов  $A$ -модуль без кручения и мы

можем считать, что  $V_1 = V$ . Итак, можно предполагать  $V$  —  $RA$ -модуль, где  $R = F$  или  $R = \mathbb{Z}$  и в этом последнем случае  $V$  не имеет кручения.

Обозначим  $a = xy$  и положим  $u_i = u_0 a^i$ ,  $v_i = u_0 a^i x$  для  $i \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $V = \langle \{u_i, v_i | i \in \mathbb{Z}\} \rangle$

$$u_i x = v_i, \quad v_i x = -u_i - v_i, \quad u_i y = -u_i - v_{i-1}, \quad v_i y = u_{i+1} \quad (1)$$

для всех целых чисел  $i$ . Из (1) вытекает, что для любого целого  $i$

$$\begin{aligned} u_i a = u_{i+1}, \quad v_i a - 1 = v_{i-1}, \quad u_i a^{-1} = -u_{i-1}, \\ v_i a^{-1} = -u_i + u_{i+1} + v_{i+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Это показывает, что  $u_0, v_0$  — порождающие для  $R\langle a \rangle$ -модуля  $V$ . По лемме 1 существует  $n \in \mathbb{N}$  такой, что  $V(a^n - 1) \neq V$ . По условию  $a^n = 1$ . По [1] группа  $A$  конечна и  $V$  — конечно порожденная группа. Если  $R = F$ , то  $V$  конечна. Предположим, что  $R = \mathbb{Z}$ . Тогда  $V = V(x - 1)^2 = V(-3x) = 3V$ , что невозможно. Лемма доказана.  $\triangleright$

**Лемма 3.** Пусть  $A$  — конечная группа порожденная двумя элементами  $x, y$  порядков  $\leq 4$  и  $V$  — конечная абелева группа с  $s$  порождающими, которая является однопорожденным фробениусовым  $A$ -модулем. Тогда верно одно из следующих утверждений:

- (1) группа  $A$  циклическая порядка 2, 3, 4, 6 или 12 и  $s$  не превосходит числа 1, 2, 2, 2 или 4 соответственно;
- (2) группа  $A$  изоморфна  $SL_2(3)$ ,  $GL_2(3)$  или  $SL_2(5)$  и  $s$  не превосходит числа 4, 4 или 8 соответственно;
- (3) группа  $A$  изоморфна группе  $SQ_{2n} = \langle x^{2n} = y^4 = 1 | x^n = y^2, x^y x = 1 \rangle$  порядка  $4n$  и  $s \leq 4\varphi(n)$ , где  $\varphi$  — функция Эйлера.

$\triangleleft$  Доказательство этой леммы, по существу, содержится в [1].  $\triangleright$

Теперь докажем теорему 1.

$\triangleleft$  Пусть  $G = \langle x, z \rangle = AP$ , где  $x^3 = z^3 = 1$ ,  $F$  — ядро и  $H$  — дополнение в  $G$ . Можно считать, что  $x \in H$ . Пусть  $z = fy$ , где  $f \in F$ ,  $y \in H$ . Тогда  $G = \langle f, x, y \rangle$ ,  $H = \langle x, y \rangle$ ,  $F = \langle f^H \rangle$ . Пусть  $M$  — максимальная абелева подгруппа в  $F$ , содержащая  $f$ . Если для всех  $h \in H$  выполнено равенство  $M^h = M$ , то  $F = M$  — абелева группа. Предположим, что  $M^h \neq M$  для некоторого элемента  $h \in H$ . Тогда либо  $M^x \neq M$ , либо  $M^y \neq M$ . Из-за симметрии можно считать, что  $M^x \neq M$ . По выбору  $M$ ,  $[M^x, M] \neq 1$ . Пусть  $a, b \in M$ . Тогда  $1 = (a^x b)^2 (a^x b)^x (a^x b) = ab^{x^2} a^{x^2} b^x a^x b = ab^{x^2} (a^{x^2} a^x) (b^x b) = ab^{x^2} a^{-1} (b^{-1})^{x^2} = [a^{-1}, (b^{-1})^{x^2}]$  и поэтому  $[a, b^x] = 1$ . Следовательно,  $[M, M^x] = 1$ . Это противоречие показывает, что  $F = M$  — абелева группа. Теперь заключение теоремы вытекает из лемм 1, 2, 3.  $\triangleright$

**Следствие.** Пусть  $(G, H)$  — пара Фробениуса и  $H$  содержит элемент  $x$  порядка 3. Если для любого элемента  $g \in G$  подгруппа  $\langle x, x^g \rangle$  — является группой Фробениуса, то  $G = F \cdot H$  для нормальной периодической подгруппы  $F$ . При этом, либо подгруппа  $V = \langle x^h \mid h \in H \rangle$  изоморфна одной из групп  $SL_2(3)$ ,  $SL_2(5)$  и подгруппа  $F$  — абелева, либо  $\langle x \rangle$  — нормальная подгруппа в  $H$  и  $F$  двуступенно нильпотентна.

По теореме 1 выполнены условия (теоремы 5 из [2])  $\{2, 3\}$ -группы регулярных автоморфизмов. Пусть  $C_{p^\infty}$  — бесконечная, локально циклическая  $p$ -группа. Это означает, что

$$C_{p^\infty} = \langle a_i \mid a_1^p = 1, a_{i+1}^p = a_i, i \in \mathbb{N} \rangle.$$

Бесконечной обобщенной группой кватернионов назовем группу

$$Q^\infty = \langle C_{2^\infty}, t \mid t^2 = a_1, a_i^t = a_i^{-1} \rangle.$$

Легко проверить, что каждая подгруппа  $Q_i = \langle a_i, t \rangle$  изоморфна обобщенной группе кватернионов порядка  $2^{i+1}$  и  $Q^\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ . Заметим, что  $N = \langle a_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$  единственная собственная, бесконечная подгруппа из  $Q^\infty$  и любой элемент из  $Q^\infty$ , порядок которого больше четырех, лежит в  $N$ .

Группа  $Q^\infty$  порождается элементами порядка 4.

Любая собственная подгруппа из  $Q^\infty$  отлична от своего нормализатора и либо конечна и является циклической или обобщенной кватернионной группой, либо совпадает с  $N$ .

**Утверждение.** Пусть  $G$  — группа, в которой любые два элемента  $x, y$  со свойством  $x^y = x^{-1}$  порождают 2-подгруппу с единственной инволюцией. Любая 2-группа с единственной инволюцией либо является локально циклической, либо обобщенной группой кватернионов (возможно, бесконечной).

Если в  $G$  нет нетривиальных 2-элементов, то доказывать нечего. В противном случае  $G$  обладает единственной инволюцией  $z$ . Если в  $G$  нет элементов порядка 4, то снова доказывать нечего. Пусть в  $G$  есть элемент порядка 4. Нам потребуется следующая лемма.

**Лемма 4.** Если  $y$  — элемент порядка 4 из  $G$ , то 2-элементы из  $C_G(y)$  составляют локально циклическую подгруппу  $C_0$ , а в  $N_G(\langle y \rangle)$  2-элементы составляют нормальную 2-подгруппу, в которой  $C_0$  — подгруппа индекса  $\leq 2$ .

◁ Пусть  $C_0$  — максимальная, нормальная локально циклическая 2-подгруппа из  $C = C_G(y)$ . Если не все 2-элементы из  $C$  содержатся в  $C_0$ , то найдется такой 2-элемент  $t$  из  $C$ , что  $tC_0$  — инволюция в  $C/C_0$ .

Если  $t^c C_0 \neq tC_0$  для некоторого элемента  $c \in C$ , то  $\langle t, t^c, y \rangle$  — конечная не локально циклическая 2-группа с одной инволюцией и центральной подгруппой порядка 4. Поскольку в конечной обобщенной группе кватернионов порядок

центра равен двум, эта ситуация невозможна и  $\langle t, C_0 \rangle$  — нормальная локально конечная подгруппа из  $C$ , содержащая центральную подгруппу порядка 4. Поэтому  $\langle t, C_0 \rangle$  — локально циклическая группа, вопреки выбору подгруппы  $C_0$ . Итак  $C_0$  содержит все 2-элементы из  $C$ . Если  $N = N_G(\langle y \rangle) \neq C$ , то найдется элемент  $x$  из  $N \setminus C$ , что  $y^x = y^{-1}$ , поэтому  $x$  — 2-элемент.

Если  $x$  не централизует  $C/C_0$ , то поскольку  $\langle C_0, x \rangle$  — неабелева группа, она обобщенная группа кватернионов,  $x$  элемент порядка 4 и  $x^2$  централизует  $C_0$ . Пусть  $cC/C_0 \neq c^x C/C_0$ , для некоторого элемента  $c \in C$ . Тогда  $(c^{-1}c^x)^x = (c^{-1}c^x)^{-1}$ ,  $c^{-1}c^x \notin C_0$  и поэтому не является 2-элементом. Это противоречит условию. Поэтому  $x$  централизует  $C/C_0$  и  $\langle C_0, x \rangle$  обобщенная группа кватернионов, нормальная в  $N$ .

Если в  $G$  нет элементов порядка 8, то любые два элемента порядка 4 из  $G$  перестановочны по модулю  $\langle z \rangle$  и поэтому все 2-элементы порождают группу кватернионов порядка 8.

Пусть  $x$  — элемент из  $G$  порядка 8 и  $y = x^2$ . Тогда  $y^2 = z$ . Положим  $C = C_G(y)$ ,  $N = N_G(\langle y \rangle)$ . По лемме 4 в  $C$  существует локально циклическая нормальная силовская 2-подгруппа  $C_0$ , а в  $N$  — нормальная силовская 2-подгруппа  $N_0$  и  $|N_0 : C_0| \leq 2$ . Если  $N_0 \neq C_0$ , то  $N_0$  — обобщенная группа кватернионов (возможно, бесконечная). Если все элементы порядка 4 из  $G$  содержатся в  $N$ , то в случае  $N = C$  подгруппа  $C$  совпадает с  $G$ , а в случае  $N \neq C$  подгруппа  $N_0$  порождается элементами порядка 4 и, следовательно, нормальна в  $G$ . Но тогда  $\langle y \rangle G$  и  $N = G$ .

Поэтому пусть существует элемент  $t$  порядка 4 из  $G$ , который не содержится в  $N$ . Подгруппа  $\langle y, x \rangle$  — обобщенная группа кватернионов и  $yt$  — элемент, порядок которого больше четырех. Пусть  $z = (yt)^{2^s}$  — элемент порядка 8. Тогда  $\langle x, r \rangle$  нормализует  $H = \langle y, r^2 \rangle$  и  $xH, rH$  — инволюция в  $\langle x, r \rangle/H$ . Таким образом  $\langle x, r \rangle$  — конечная 2-подгруппа из  $G$  содержащая две различные циклические подгруппы порядка 8. Это невозможно.  $\triangleright$

**Теорема 2.** Пусть  $G$  — нетривиальная  $\{2, 3\}$ -группа регулярных автоморфизмов абелевой группы. Если  $G$  конечна, то верно одно из следующих утверждений:

- (1)  $G$  — циклическая группа;
- (2)  $G = \langle x, y \mid x^{3^t} = y^{2^s} = 1, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$  для некоторых натуральных чисел  $t$  и  $s$ ,  $s \geq 2$ ;
- (3)  $G = \langle x, y \mid x^{2^s 3^t} = y^4 = 1, y^2 = x^{2^{s-1} 3^t}, x^y = x^{-1} \rangle$  для некоторых натуральных чисел  $t$  и  $s$ ,  $s \geq 2$ ;
- (4)  $G = \langle x, y, z \mid x^4 = z^{3^t} = 1, x^2 = y^2, y^x = y^{-1}, x^z = y, y^z = xy^{-1} \rangle$ ,  $t$  — натуральное число; другими словами,  $G$  — расширение группы кватернионов  $Q$  порядка 8 посредством циклической 3-группы, индуцирующей в  $Q$

нетривиальный автоморфизм;

(5)  $G = \langle x, y, z, v \rangle$ , где  $\langle x, y, z \rangle$  — группа типа 3,  $v^2 = x^2$ ,  $z^v = z^{-1}$ ,  $x^v = y^{-1}$ ,  $y^v = x^{-1}$ ;

(6)  $G$  изоморфна  $SL_2(5)$ ;

(7)  $G$  содержит подгруппу индекса 2, изоморфную  $SL_2(5)$ , и силовская 2-подгруппа из  $G$  — обобщенная группа кватернионов.

Если  $G$  бесконечна, то подгруппа из  $G$  порожденная всеми элементами порядка 3, является циклической, и верно одно из следующих утверждений:

(8)  $G$  — расширение локально циклической 2-группы или (возможно, бесконечной) обобщенной группы кватернионов посредством 3-группы с единственной подгруппой порядка 3;

(9)  $G$  — полупрямое произведение локально циклической 3-подгруппы  $R$  и циклической 2-подгруппы  $\langle s \rangle$  порядка  $\geq 4$ ,  $r^s = r^{-1}$  для любого элемента  $r \in R$ ;

(10)  $G = (U \times V)\langle t \rangle$ , где  $U$  — локально циклическая 2-группа или конечная группа кватернионов,  $V$  — локально циклическая 3-группа,  $t$  — элемент порядка 4,  $U\langle t \rangle$  — (возможно, бесконечная) обобщенная группа кватернионов и  $v^t = v^{-1}$  для любого элемента  $v \in V$ .

Отметим, что только в случае 8 группа  $G$  может не быть локально конечной (см. примеры 1 и 2 в [3]).

◁ Если  $G$  конечна, то её строение известно (см. [4, 5, 6]). Пусть  $G$  — бесконечна и  $A$ -подгруппа из  $G$ , порожденная всеми элементами порядка 3. По [2]  $A$  — циклическая группа или группа изоморфная одной из групп  $SL_2(3)$ ,  $SL_2(5)$ . Во втором случае  $C_G(A) \leq A$  и поэтому  $G = N_G(A)$  — конечная группа. Итак  $A$  — циклическая группа.

Если  $|A| = 1$ , то  $G$  — 2-группа и по предложению 1  $G$  удовлетворяет условию 8. Поэтому пусть  $|A| = 3$ . Если  $B = C_G(A)$ , то по предложению 1  $B$  удовлетворяет условиям пункта 8 и при  $B = G$  теорема доказана.

Если  $B \neq G$ , то  $|G : B| = 2$ . Пусть  $S = O_2(G)$ . Тогда  $G/S$  — расширение 3-группы  $\overline{R}$  с помощью подгруппы  $\langle a \rangle$  порядка 2, индуцирующей в  $\overline{R}$  регулярную группу автоморфизмов. Пусть  $r \in \overline{R}$ . Тогда  $[r, a] = a^r a$  — элемент нечетного порядка и поэтому в  $\langle a^r, a \rangle$  существует инволюция  $i$ , для которой  $a^{ri} = a$ . Это означает, что  $ri = a$ ,  $r = ai$  и  $r^a = r^{-1}$ . Таким образом,  $a$  инвертирует каждый элемент из  $\overline{R}$ , поэтому  $\overline{R}$  абелева и, следовательно, локально циклическая. Пусть  $t$  — элемент из  $G \setminus B$ . Тогда  $r^t = r^{-1}$  для любого элемента  $r \in \overline{R}$ .

Пусть  $R$  — силовская 3-подгруппа из  $G$ , тогда  $R$  локально циклическая группа и  $SR = B$ . Действительно, если  $SR \neq B$ , то  $SR/S$  — собственная подгруппа в локально циклической 3-группе  $B/S$ . Поэтому  $R = \langle r \rangle$  — циклическая группа конечного порядка  $3^a$  и существует элемент  $r_1$  в  $B$  порядка  $3^{a+1}$ .

Поскольку  $B$  локально конечна, подгруппа  $\langle r_1 \rangle$  сопряжена с подгруппой из  $\langle r \rangle$  в конечной группе  $\langle r, r_1 \rangle$  и мы получаем противоречие. Если  $R$  не централизует  $S$ , то  $S$  — группа кватернионов порядка 8, а  $R$  — циклическая группа. В этом случае  $G$  — конечная группа вопреки предположению. Если же  $R$  централизует  $S$ , то  $R$  — нормальная подгруппа в  $G$  и выполнены условия пункта 9.  $\triangleright$

### Литература

1. Журтов А. Х. Квадратичные автоморфизмы абелевых групп // Алгебра и логика (в печати).
2. Журтов А. Х. О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн.—2000.—Т. 51, № 2.
3. Созутов А. П. О строении неквавариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 4.—С. 893–901.
4. Zassenhause H. Kennzeichnung endlichen linearen Gruppen als Permutationsgruppen // Abhandl. Math. Semin., Hamburg.—1936.—V. 11.—P. 17–40.
5. Буссарин В. М., Горчанов Ю. М. Конечные расщепляемые группы.—М.: Наука, 1969.
6. Huppert B., Blackburn N. Finite groups 3.—Berlin: Springer Verlag, 1982.

г. Нальчик

Статья поступила 30 марта 2000 г.