А. Б. Купавский, А. А. Сагдеев, Н. Франкл, Бесконечные множества могут быть рамсеевскими в метрике Чебышёва, *УМН*, 2022, том 77, выпуск 3, 175–176

DOI: 10.4213/rm10055

Бесконечные множества могут быть рамсеевскими в метрике Чебышёва

А. Б. Купавский, А. А. Сагдеев, Н. Франкл

Зародившись с группы на первый взгляд не связанных между собой результатов из разных областей математики (теорема Рамсея, появление которой было продиктовано нуждами математической логики, теоретико-числовая теорема Шура, геометрическая "задача со счастливым концом"), во второй половине двадцатого века *теория Рамсея* оформилась в самостоятельную дисциплину (см. классическую книгу [1]). В настоящей работе рассматриваются рамсеевские задачи геометрического типа, обобщающие известную открытую *проблему хроматического числа плоскости* (см. обзор [2]) и продолжающие линию исследований, заложенную в классических работах [3], [4] Пола Эрдёша и его соавторов.

Дадим формальные определения. Пусть $\mathbb{X} = (X, \rho_X)$, $\mathcal{Y} = (Y, \rho_Y)$ – произвольные метрические пространства. Подмножество $Y' \subset X$ называется *копией* пространства $\mathcal{Y}$, если существует сохраняющая расстояния биекция $f\colon Y \to Y'$. *Хроматическим числом* $\chi(\mathbb{X}, \mathcal{Y})$ *пространства* $\mathbb{X}$ *с запрещенным подпространством* $\mathcal{Y}$ называется минимальное k, для которого существует раскраска элементов X в k цветов без одноцветных копий $Y' \subset X$ пространства $\mathcal{Y}$. В рамках *евклидовой теории Рамсея* рассматривается случай, когда $\mathbb{X}$ – это n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n_2$. Несмотря на то, что задача классификации конечных *рамсеевских* пространств, т. е. таких $\mathcal{Y}$, что $\chi(\mathbb{R}^n_2, \mathcal{Y}) \to \infty$ при $n \to \infty$, привлекает внимание крупных специалистов на протяжении нескольких десятков лет, на сегодняшний день не существует даже общепринятой гипотезы об ответе на этот вопрос (см. [5]–[11]). Однако если запрещаемое пространство $\mathcal{Y}$ является бесконечным, то ситуация оказывается несравненно более простой: в работе [4] доказано, что в этом случае в любой размерности справедливо точное равенство $\chi(\mathbb{R}^n_2, \mathcal{Y}) = 2$. Гипотеза о том, что последнее равенство справедливо не только для бесконечных, но и для всех *достаточно больших* (в терминах размерности n) пространств $\mathcal{Y}$, остается открытой (см. [12]).

В недавней серии работ [13], [14] авторы перенесли задачи евклидовой теории Рамсея на случай метрического пространства $\mathbb{R}^n_\infty = (\mathbb{R}^n, \ell_\infty)$, где ℓ_∞ – стандартная чебышёвская метрика, определяемая равенством $\ell_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_i |x_i - y_i|$ для всех $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$. Среди прочего им удалось доказать, что для любого конечного метрического пространства $\mathcal{Y}$ существует константа $c = c(\mathcal{Y}) > 1$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{Y}) > c^n$. Однако ситуация с бесконечными запрещаемыми пространствами $\mathcal{Y}$ оставалась непроясненной. Настоящая работа устраняет этот пробел.

Одними из наиболее естественных и поддающихся изучению бесконечных метрических пространств являются подмножества $\mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda}) = \{0, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \dots\}$ прямой, где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ – произвольная бесконечно убывающая последовательность положительных чисел. Без ограничения общности можно считать, что ряд $\sum_i \lambda_i$ сходится, так как простейшая двухцветная раскраска пространства попарно вложенными друг в друга цветочередующимися кубами с достаточно быстро растущей длиной стороны показывает, что $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{Y}) = 2$ при всех $\mathcal{Y}$ таких, что $\operatorname{diam}(\mathcal{Y}) = \infty$.

Работа второго автора выполнена при поддержке РНФ (грант № 22-21-00368). Второй автор также является победителем конкурса "Молодая математика России" и благодарит его спонсоров и жюри.

DOI: https://doi.org/10.4213/rm10055

Теорема 1. *Для любого натурального n справедливы следующие утверждения*:
(a) *если* $\lim_i \lambda_i/\lambda_{i+1} \leqslant 1 + 5^{-n}$, *то* $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})) = 2$;
(b) *если* $\lambda_i \geqslant 32\lambda_{i+1}$ *при всех* $i \in \mathbb{N}$, *то* $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})) \geqslant \log_3 n$;
(c) *если* $\lambda_i \geqslant 2^n\lambda_{i+1}$ *при всех* $i \in \mathbb{N}$, *то* $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})) \geqslant n+1$;
(d) *если* $|Y| \geqslant n^n$, *то* $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{Y}) \leqslant n+1$.

Отметим два следствия этого результата, иллюстрирующие принципиальную разницу между евклидовой и чебышёвской теориями Рамсея.

Во-первых, наилучшей верхней оценкой величины $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{Y})$, справедливой для всех бесконечных метрических пространств $\mathcal{Y}$, является оценка $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{Y}) \leqslant n+1$. В частности, эта оценка зависит от размерности n. Более того, ее достижимость, в отличие от евклидова случая, удается доказать не только для бесконечных, но и для всех достаточно больших пространств $\mathcal{Y}$.

Во-вторых, утверждение (b) теоремы 1 гарантирует существование бесконечного *рамсеевского в метрике Чебышёва* пространства, т. е. такого $\mathcal{Y}$, что $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{Y}) \to \infty$ при $n \to \infty$. Действительно, достаточно положить $\mathcal{Y} = \mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})$, где $\boldsymbol{\lambda}$ – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $1/32$ (или с любым меньшим знаменателем). Скорость роста величины $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{Y})$ при этом оказывается по крайней мере логарифмической.

Данный результат оставляет открытыми следующие вопросы. Как ведет себя с ростом размерности величина $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda}))$, где $\boldsymbol{\lambda}$ – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $1/32 < q < 1$? Существует ли такое бесконечное метрическое пространство $\mathcal{Y}$, что $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{Y}) = n+1$ при всех натуральных n?

Список литературы

[1] R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer, *Ramsey theory*, 2nd ed., Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990, xii+196 pp. **[2]** A. M. Raigorodskii, *Thirty essays on geometric graph theory*, Springer, New York, 2013, 429–460. **[3]** P. Erdös, R. L. Graham, P. Montgomery, B. L. Rothschild, J. Spencer, E. G. Straus, *J. Combin. Theory Ser. A*, **14**:3 (1973), 341–363. **[4]** P. Erdös, R. L. Graham, P. Montgomery, B. L. Rothschild, J. Spencer, E. G. Straus, *Infinite and finite sets* (Keszthely, 1973), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **10**, North-Holland, Amsterdam, 1975, 529–557, 559–583. **[5]** I. Leader, P. A. Russell, M. Walters, *J. Combin. Theory Ser. A.*, **119**:2 (2012), 382–396. **[6]** P. Frankl, V. Rödl, *J. Amer. Math. Soc.*, **3**:1 (1990), 1–7. **[7]** I. Kříž, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **112**:3 (1991), 899–907. **[8]** Р. И. Просанов, *Матем. заметки*, **103**:2 (2018), 248–257. **[9]** А. А. Сагдеев, *Пробл. передачи информ.*, **54**:4 (2018), 82–109. **[10]** А. А. Сагдеев, *Пробл. передачи информ.*, **55**:4 (2019), 86–106. **[11]** E. Naslund, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **52**:4 (2020), 687–692. **[12]** D. Conlon, J. Fox, *Discrete Comput. Geom.*, **61**:1 (2019), 218–225. **[13]** А. Б. Купавский, А. А. Сагдеев, *УМН*, **75**:5(455) (2020), 191–192. **[14]** A. Kupavskii, A. Sagdeev, *Forum Math. Sigma*, **9** (2021), e55, 12 pp.

А. Б. Купавский (A. B. Kupavskii)
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет);
CNRS, Grenoble, France
E-mail: kupavskii@ya.ru

А. А. Сагдеев (A. A. Sagdeev)
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
E-mail: sagdeev.aa@phystech.edu

Н. Франкл (N. Frankl)
Институт математики им. А. Реньи, Будапешт, Венгрия
E-mail: nfrankl@renyi.hu

Представлено Л. Д. Беклемишевым
Принято редколлегией
04.04.2022