Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2016. Том 24. № 2. С. 14–19

УДК 511.42

ОЦЕНКА СВЕРХУ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ С ЗАДАННОЙ ВЕЛИЧИНОЙ ДИСКРИМИНАНТОВ

В. И. Берник, О. Н. Кемеш

Белорусский государственный аграрно-технический университет
e-mail: oksana.kemesh@tut.by
Поступила 28.09.2016

Получена точная асимптотическая оценка для количества целочисленных многочленов четвертой степени с близкими корнями, у которых модули дискриминантов не превосходят заданной величины. Доказательство основано на методах теории трансцендентных чисел и метрической теории диофантовых приближений.

Дискриминантом полинома

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называется число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2. \tag{1}$$

Специальное устройство $D(P)$ позволяет установить следующие несложные утверждения [1]:

a) $D(P) \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда* $P(x)$ *имеет кратные корни*;

b) $D(P) \in R$, *хотя корни* $P(x)$ *могут быть комплексными*;

c) если $a_j \in \mathbb{Z}$, $0 \le j \le n$, *то* $D(P) \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим класс многочленов для натурального $Q > 1$:

$$\mathsf{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \ \deg P \le n, \ H(P) \le Q\}. \tag{2}$$

В (2) степень многочлена $P(x)$ обозначена $\deg P$, $H = H(P) = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j|$ – высота $P(x)$. В дальнейшем через $c_1, c_2, \ldots$ будем обозначать величины, зависящие от n и не зависящие от H и Q. Величина $\#B$ – количество элементов конечного множества B, μA – мера Лебега измеримого множества $A \subset R$. Дискриминант $D(P)$ можно записать в виде определителя, состоящего из коэффициентов $P(x)$ [1, 2], откуда нетрудно получить при $\alpha_i \ne \alpha_j$, $i \ne j$, $1 \le i, \ j \le n$, неравенство

$$1 \le |D(P)| < c_1 Q^{2n-2}. \tag{3}$$

Нас будет интересовать при $0 \le v \le n-1$ асимптотическое поведение величины $\#\mathsf{P}_n(Q,v)$, где

$$\mathsf{P}_n(Q,v) = \{P \in \mathsf{P}_n(Q) : 1 \le |D(P)| < Q^{2n-2-2v}\}. \tag{4}$$

Исследование класса полиномов $\mathsf{P}_n(Q,v)$, важно в теории диофантовых уравнений [3] и диофантовых приближений [1, 6]. Так в работе [4] Давенпорт нашел оценку сверху для суммы значений дискриминантов многочленов из класса $\mathsf{P}_3(Q)$, что позволило Фолькману [5] доказать кубический случай известной проблемы Малера [7]. Широко применял оценки дискриминантов в задачах метрической теории диофантовых приближений В. Г. Спринджук [6]. В [8] найдена оценка снизу для $0 \le v < 1/2$

$$\#\mathsf{P}_n(Q,v) > c_2 Q^{n+1-2v},$$

В случае многочленов второй степени в [9] получена асимптотическая формула

$$\#\mathsf{P}_2(Q,v) = 20(1+\ln 2)Q^{3-2v} + O(Q^{3-3v} + Q^2), \quad 0 \le v \le 1/2, \tag{5}$$

Представление (5) получено вычислением объема трехмерного тела, определяемого неравенством $|a_1^2 - 4a_2a_0| < Q^{4-2v}$. Для многочленов третьей степени в [10] показано, что

$$c_3 Q^{4-\frac{5}{3}v} < \#\mathsf{P}_3(Q,v) < c_4 Q^{4-\frac{5}{3}v}, \quad 0 \le v < \frac{3}{5}.$$

Наконец, недавно в [2] была получена оценка снизу при произвольном n :

$$\mathsf{P}_n(Q,v) > c_5 Q^{n+1-\frac{n+2}{2}v}, \quad 0 \le v \le n-1.$$

Оценки сверху пока заметно отстают от оценок снизу, хотя они нужны при получении точных метрических теорем [1, 10] и при оценке сверху размерности Хаусдорфа множества трансцендентных чисел с заданной мерой трансцендентности [9].

В данной статье мы докажем оценку сверху для многочленов четвертой степени в наиболее часто встречающемся в метрической теории диофантовых приближений случае. Будем также считать, что у полиномов $P(x) \in \mathsf{P}_4(Q,v)$ старшие коэффициенты удовлетворяют неравенству

$$|a_4| > c_6 H(P). \tag{6}$$

К такой оценке приводятся все оценки в метрической теории трансцендентных чисел [6, 10], а при выполнении оценки (6) все корни полинома $P(x)$ удовлетворяют оценкам $|\alpha_j| < c_7$, $1 \le j \le n$ (Лемма 1). Выберем один из корней $P(x)$, пусть α_1, а все остальные корни $P(x)$ упорядочим относительно корня α_1 следующим образом:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \le |\alpha_1 - a_3| \le |\alpha_1 - a_4|.$$

Возьмем достаточно малую величину $\varepsilon_1 > 0$ и число $T = [\varepsilon_1^{-1}] + 1$. Введем величины ρ_2, ρ_3, ρ_4 как решения уравнений

$$|\alpha_1 - \alpha_j| = Q^{-\rho_j}, \quad 2 \le j \le 4,$$

и целые числа l_2, l_3 и l_4 как решения неравенств

$$(l_j - 1)T^{-1} \le \rho_j < l_j T^{-1}, \quad 2 \le j \le 4.$$

Нетрудно показать, например как в [6, 10], что все величины l_j принимают конечное, зависящее от T и n число значений, но не зависящее от H и Q. Значит, конечное число значений принимают и векторы $\vec{l} = (l_2, l_3, l_4)$.

Докажем поочередно следующую теорему для каждого вектора $\vec{l}$, а тем самым и для всех полиномов $P(x) \in \mathrm{P}_4(Q,v)$. Далее векторы $\vec{l}$ имеют специальный вид: $\vec{l} = (l_1, -1, -1)$.

Теорема. *При любом* $\varepsilon > 0$ *и* $Q > Q_0(\varepsilon)$ *справедливо неравенство*

$$\#\mathsf{P}_4(Q,v) < Q^{5-\frac{3}{2}v+\varepsilon}, \quad 0 \le v \le 2.$$

Приведем необходимые для доказательства леммы.

Лемма 1. *При выполнении условия* (6) *верны неравенства*

$$|\alpha_j| < c_8, \quad 2 \le j \le n.$$

Лемма 2. *Пусть* α_1 *– ближайший к* x *корень полинома* $P(x)$. *Тогда*

$$|x - \alpha_1| \le 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}.$$

Лемма 3. *Пусть* $P(x),\ T(x) \in \mathsf{P}_4(Q)$ *имеют одинаковые векторы* $\vec{l}$ *и не имеют общих корней. Предположим, что на интервале* I *длины* $|I| = Q^{-\eta},\ \eta > 0$, *при некотором* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство*

$$\max_{x\in I}(|P(x)|, |T(x)|) < Q^{-\tau}.$$

Тогда при любом $\delta > 0$ *и* $Q > Q_0(\delta)$ *справедливо неравенство*

$$\tau + 1 + 2\sum_{j=2}^{4} \max(\tau + 1 - j\eta, 0) < 8 + \delta. \tag{7}$$

Лемма 4. *Пусть* $P(x) = t_1(x) \cdot t_2(x)$. *Тогда* $c_9 H(P) < H(t_1) \cdot H(t_2) < c_{10} H(P)$.

Леммы 1, 2 и 4 доказаны в [6]. Лемма 3 доказана в [9]. При этом используется лемма 2 и результант $R(P,T)$ многочленов $P(x)$ и $T(x)$.

Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы из неравенства $1 \le D(P) < Q^{6-2v}$ необходимо получить неравенство $\#\mathsf{P}_4(Q,v) < Q^{5-\frac{3}{2}v+\varepsilon}$. Предположим, что верно противоположное неравенство

$$\#\mathsf{P}_4(Q,v) \ge Q^{5-\frac{3}{2}v+\varepsilon}. \tag{8}$$

Многочлен $P(x) \in \mathsf{P}_4(Q,v)$, если выполняется неравенство $\rho_2 > v$ или $l_2 T^{-1} > v - \varepsilon_1$. Поделим отрезок $I = [c_{11}, c_{12}]$ на отрезки J_i длиной $|J_i| = Q^{-v-\varepsilon_1}$. Тогда из (8) можно заключить, что существует i, при котором на отрезке J_i находится не менее

$$K = c_{11} Q^{5-\frac{3}{2}v-v-\varepsilon_1+\varepsilon} \tag{9}$$

корней $\alpha_1 = \alpha_1(P)$ многочленов $P(x) \in \mathsf{P}_4(Q,v)$. Соотношение между ε_1 и ε будет указано ниже.

Из условия $v \le 2$ следует, что

$$S = 5 - \frac{3}{2}v - v \ge 0.$$

Разложим все K многочленов $P_j(x),\ j = 1, \ldots, K$ на отрезке J_i в ряд Тэйлора в окрестности корня $\alpha_1 = \alpha_1(P_j)$:

$$P_j(x) = P_j(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \sum_{j=2}^{4} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^j.$$

Применим к оценке $|x-\alpha_1|$ лемму 2. Из оценок $|P'(\alpha_1)| \le |a_4|Q^{-\rho_2-\rho_3-\rho_4} < c_{13}Q^{-l_2T^{-1}}$, $|x-\alpha_1| < Q^{-v+\varepsilon_1}$, получаем

$$|P'(\alpha_1)|\,|x-\alpha_1| < c_{14}Q^{1-v+2\varepsilon_1}, \quad |P^{(j)}(\alpha_j)(x-\alpha_1)^j| < c_{15}Q^{1-\rho_j-jv+6\varepsilon_1}, \quad 2 \le j \le 4,$$

и для всех $x \in J_i$

$$|P(x)| < c_{16}Q^{1-2v+7\varepsilon_1}. \tag{10}$$

На отрезке J_i разложим в ряд Тэйлора и производные $P'(x)$, $P''(x)$, $P'''(x)$, $P^{(IV)}(x)$. Затем оценим их сверху:

$$|P'(x)| < c_{17}Q^{1-v+\varepsilon_1}, \quad |P''(x)| < c_{17}Q, \quad |P'''(x)| < c_{17}Q, \quad |P^{(IV)}(x)| < c_{17}Q. \tag{11}$$

Система неравенств (10), (11) выполняется в любой точке интервала J_i. Запишем ее в середине интервала J_i точке $x = d$:

$$|P(d)| < c_{18}Q^{1-2v+7\varepsilon_1}, \quad |P'(d)| < c_{18}Q^{1-v+\varepsilon_1}, \quad |P^{(j)}(d)| < c_{18}Q, \quad 2 \le j \le 4. \tag{12}$$

Покажем как из того, что на отрезке J_i имеется не менее $c_{19}Q^{S+\varepsilon}$ точек $\alpha_1(P_j)$ усилить первое неравенство в (11). Для этого положим $S_1 = \dfrac{S}{3} = \dfrac{5}{3} - \dfrac{5}{6}v$ и рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $v \ge S_1$, или учитывая $v \le 2$,

$$\frac{10}{11} \le v \le 2. \tag{13}$$

Воспользуемся принципом ящиков Дирихле. Получим для не менее чем $c_{20}Q^{\varepsilon}$ полиномов $R_j(d) = P_j(d) - R_0(d)$, $j = 1, \dots, K-1$, $R_0(d) = P_K(d)$ выполняется система неравенств

$$|R_j(d)| \le c_{21}(Q^{1-2v-S_1+7\varepsilon_1} + Q^{1-3v} + Q^{1-4v}) < c_{22}Q^{1-2v-S_1+7\varepsilon_1}. \tag{14}$$

От системы неравенств (14) можно перейти к системе неравенств для всех $x \in J_i$ разложив многочлены $R_j(x)$ в ряд Тэйлора на J_i в точке $x = d$:

$$|R_j(x)| \le c_{23}Q^{1-2v-S_1+7\varepsilon_1} = c_{23}Q^{-\frac{5}{3}-\frac{7}{6}v+7\varepsilon_1}, \quad x \in J_i. \tag{15}$$

Предположим, что среди $c_{20}Q^{\varepsilon}$ многочленов имеются хотя бы два без общих корней. Применим к ним лемму 3 с учетом неравенства (7). Здесь

$$\tau + 1 = \frac{7}{6}v + \frac{5}{3} - 7\varepsilon_1, \quad 2(\tau + 1 - \eta) = \frac{1}{3}v + \frac{10}{3} - 14\varepsilon_1, \quad 2(\tau + 1 - 2\eta) = -\frac{5}{3}v + \frac{10}{3} - 14\varepsilon_1. \tag{16}$$

Сложим три числа в (16). Имеем

$$\frac{25}{3} - \frac{v}{10} - 35\varepsilon_1 > 8 + \delta, \quad \delta = \frac{1}{15} - 35\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 < \frac{1}{1050}.$$

Получили противоречие с леммой 3.

2. $v \le S_1 \le 2v$. В этом случае в (15) для оценки $|R_j(d)|$ надо добавить в правой части член разложения $Q^{1-3v} = Q^{1-2v-S_1} \cdot Q^{-v+S_1}$ и найти S_1 из уравнения $4S_1 - v = S$: $S_1 = \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{8}v$ для

$$\frac{10}{19} \le v \le \frac{10}{11}. \tag{17}$$

Получим, вновь воспользовавшись принципом ящиков Дирихле, систему неравенств для значений $R_j(d)$ и производных $R^{(j)}(d)$, $1 \le j \le 3$. Затем оценим сверху для $|R_j(x)|$ как это сделано в (15), (16).

Имеем

$$|R_j(x)| < c_{24}Q^{-\frac{1}{4}-\frac{13}{8}v+7\varepsilon_1}.$$

Опять, если среди $c_{25}Q^{\varepsilon}$ полиномов $R_j(x)$ найдется хотя бы два без общих корней, то применим лемму 3.

В данном случае $\tau+1=\dfrac{5}{4}+\dfrac{13}{8}v-7\varepsilon_1,\ \ \eta=v,\ \ \tau+1-3\eta=\dfrac{5}{4}-\dfrac{11}{8}v\geq 7\varepsilon_1,$ и поэтому можно взять 4 слагаемых:

$$\tau+1+2(\tau+1-\eta)+2(\tau+1-2\eta)+2(\tau+1-3\eta)=7(\tau+1)-12\eta-49\varepsilon_1=$$

$$=\frac{35}{4}+\frac{91}{8}v-12v-49\varepsilon_1=\frac{35}{4}-\frac{5}{8}v-49\varepsilon_1. \tag{18}$$

При $v,$ удовлетворяющих (17), правая часть в (18) больше $\dfrac{2}{11}-49\varepsilon_1>\dfrac{1}{11},\ \ \varepsilon_1=10^{-3}$ и при $\delta_0=\dfrac{1}{11}$ вновь получаем противоречие.

3. $S_1>2v.$ В этом случае величина последнего члена в разложении в ряд Тэйлора многочлена $P(x)$ на J_1 оказывается большей, чем $c_{25}Q^{1-2v-S_1},$ так как она равна $Q^{1-4v}=Q^{1-2v-S_1+S_1-2v}.$ Поэтому и $|P^{(IV)}(x)|$ надо несколько уменьшить на величину $S-2v$ в показателе степени. Это означает, что величину S_1 следует определить из уравнения

$$5S_1-3v=5-\frac{5}{2}v,\ S_1=1+\frac{v}{10}. \tag{19}$$

Тогда

$$|R_j(x)|<Q^{-2v-\frac{v}{10}+7\varepsilon_1}=Q^{-\frac{21}{10}v+7\varepsilon_1}.$$

Опять, если среди многочленов $R_j(x)$ найдется хотя бы два без общих корней, то применим лемму 3. В данном случае можно взять все пять слагаемых в левой части (7), так как при $\tau+1=1+\dfrac{21}{10}v-7\varepsilon_1,\ \ \eta=v,$

$$\tau+1-4v=1-\frac{19}{10}v\geq 7\varepsilon_1\ \ \text{для}\ \ 0\leq v\leq\frac{10}{19}.$$

Просуммируем все пять слагаемых в левой части неравенства. Получим

$$\tau+1+2(\tau+1-\eta)+2(\tau+1-2\eta)+2(\tau+1-3\eta)+2(\tau+1-4\eta)=9(\tau+1)-20\eta-63\varepsilon_1=$$

$$=9+\frac{189}{10}v-20v-63\varepsilon_1=9-\frac{11}{10}v-63\varepsilon_1\geq 8\frac{8}{19}-63\varepsilon_1>8+\delta_0$$

при $\delta_0=4/19,\ \ \varepsilon_1=10^{-3}.$ Опять противоречие.

Осталось предположить, что среди многочленов $R_j(x)$ во всех трех случаях нельзя найти хотя бы два многочлена без общих корней.

В этом случае все многочлены $R_j(x)$ приводимые. Они могут быть разложены в произведение двух многочленов

$$R_j(x)=t_1(x)t_2(x).$$

По лемме 4 высоты многочленов $H(t_1)$ и $H(t_2)$ удовлетворяют неравенству $c_{26}H(l)<H(t_1)H(t_2)<c_{27}H(R_j),$ а степень $\deg t_1=k,\ \ k=1,2.$ Если $k=3,$ то первую степень имеет многочлен пусть $t_2(x).$ Такой случай приводимых многочленов малых степеней рассмотрен в [14].

Литература

1. *Van Der Waerden B.L.* Algebra. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1971.
2. *Beresnevich V., Bernik V., Goetze F.* Integral polinomials with small discriminants and resultants. Adv. Math. 2016. Vol. 298. P. 392–412.
3. *Bugeaud Y.* Approximation by algebraic numbers. Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 160, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. 274 p.
4. *Davenport H.* A note on binary cubic forms // Mathematika 1961. Vol. 8. P. 58–62.
5. *Volkmann B.* The real cubic case of Mahler's conjecture. Mathematika, 8 (1961), 55–57.
6. *Sprindzuk V.* Mahler's problem in the metric theory of numbers, Amer. Math. Soc., Vol. 25, Prcvidence Ri, 1969.
7. *Mahler K.* Uber das Mass der Menge aller S-Zahlen, Math, Ann. 1932. Vol. 106. P. 131–139.
8. *Bernik V., Gotze F., Kukso O.* Lower bounds for the number of integral polynomials with given order of discriminants, Acta Arith. 2008. Vol. 133. P. 375–390.
9. *Gotze F., Kaliada D., Korolev M.* On the number of quadratic polynomials with bounded discriminants, Mat, Zametki, to appear, (in Russian). arXiv: 1308.2091.
10. *Gotze F., Kaliada D., Kukso O.* The asymptotic number of integral cubic polynomials with bounded heights and discriminants, Lith. Math, j. 2014. Vol. 54. №2, P. 150–165.
11. *Bernik V.* An application of Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximation, Acta Arith. 1983. Vol. 42. P. 219–253. {in Russian). English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. 1988. Vol. 140. P. 15–44.
12. *Beresnevich V.* On approximation of-real numbers by real algebraic numbers, Acta Arith. 1999. Vol. 90, №2., P. 97–112.
13. *Bernik V.* The exact order of approximating zero by integral polynomials, Acta Arith. 1989. Vol 53, №1. P. 17–28. (in Russian).
14. *Bernik V., Budarina N., Goetze F.* Exact upper bounds for the number of the polynomials with given discriminants // Lithuanian Mathematical Journal (to appear).

V. I. Bernik, O. N. Kemesh
Upper bound for number of integral polynomials of four degree with given order of discriminants

Summary

In this paper we propose a new method for estimating the number of top-integral polynomials with given discriminates. We show asymptotically accurate height assessment in the case of polynomials of fourth degree. At the same time we used the methods of the metric theory of Diophantine approximations of dependent variables.